

* 이항 정리

이항 정리

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^{n-r} b^r$$

ex1)

$(3x-2)^{30}$ 의 전개식의 x^r 의 계수를 a_r 이라고 하자.

a_r 은 $r = p$ 일 때 최대, $r = q$ 일 때 최소라고 한다. p, q 의 값은?

sol)

$$\begin{aligned} a_r &= {}_{30}C_r (-2)^{30-r} \times 3^r \\ &= {}_{30}C_r 2^{30-r} \times 3^r \times (-1)^{30-r} \end{aligned}$$

$|a_r| > |a_{r+1}|$ 인 r 을 찾아보면

$${}_{30}C_r 2^{30-r} \times 3^r > {}_{30}C_{r+1} 2^{29-r} \times 3^{r+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{30-r} > \frac{3}{r+1}$$

$$\Leftrightarrow r \geq 18$$

즉, 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$$|a_0| < |a_1| < \cdots < |a_{17}| < |a_{18}| > |a_{19}| > \cdots > |a_{30}|$$

여기서 a_{18} 은 양수이므로 a_{18} 이 최댓값이다.

a_{17} 과 a_{19} 는 음수이므로 둘 중 한 값이 최솟값이 된다.

두 수를 비교해보면

$$\frac{|a_{19}|}{|a_{17}|} > 1 \rightarrow a_{19} \text{ 가 최솟값이다.}$$

$$\therefore p = 18, \quad q = 19$$