

2013 고려대학교 수리논술 적중

2013 고려대학교 논술문제

(제시문)

(가) 연속함수 $f: [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ 에 대하여 함수 f 를 n 번 합성한 함수를 f_n 이라 정의하자.

$$\text{수열 } \{a_n\} \text{을 } a_n = \int_1^2 f_n(x) dx$$

이라 할 때, $a_1 = \frac{5}{3}$ 이고 점화식은 $a_{n+1} = \frac{3a_n - 2}{a_n}$ 이다.

(나) 연속함수 $f: [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ 에 대하여 점 $(3, 3)$ 에 대하여 점대칭인 함수 g 를 생각한다. g 는 자연스럽게 정의역이 $[4, 5]$ 이고, 공역 또한 $[4, 5]$ 임을 확인할 수 있다.

이 함수 g 를 n 번 합성한 함수를 g_n 이라 정의한다.

(다) 함수 $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{3} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

마찬가지로 함수 h 를 n 번 합성한 함수를 h_n 이라 한다.

[문제 1]

(a) $p: [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ 가 일대일 대응함수라고 하자. $\int_1^2 p(x) dx = \frac{4}{3}$ 일 때, $\int_1^2 p^{-1}(x) dx$ 의 값에 대하여 서술하시오.

(b) (가)에서 제시된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하시오.

(c) $g_n(x)$ 를 f_n 을 이용하여 표현할 방법에 대해서 수학적 귀납법으로 논의하고,

$\int_4^5 g_5(x) dx$ 의 값을 구하시오.

(d) $\int_0^1 h_n(x) dx$ 의 값을 구하시오.

마찬가지로 위 그림과 같이 S_2 를 S_1 으로 옮겨서 생각하면

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx = 2(b-a)q \text{ (직사각형 두 개)임을 알 수 있다.}^{1)}$$

1) 이 상황이 가장 일반적인 상황 4 이고 $p=0, q=0$ 일 때 2 가 된다. 두 식 모두 $x=2p-f$ 라는 치환을 통해 증명할 수도 있다. 각자 해보길 바란다.

152 ... 적분법

<역함수와 관련된 항등식>

① $f^{-1}(x)=g(x)$ 라 하고, 미분가능한 증가함수 $y=f(x)$ 에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b) - af(a)$$

먼저 ①의 $\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b) - af(a)$ 을 증명해보자.

$\int_a^b f(x)dx$ 을 치환적분 하는데 $y=f(x)$ 로 치환해보자.¹⁾

그런데 $y=f(x) \Leftrightarrow x=g(y)$ 이므로 $g'(y)=\frac{dx}{dy}$ 이다.

즉 $\int_a^b f(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} yg'(y)dy$ 이 되는데, $\int_{f(a)}^{f(b)} yg'(y)dy$ 을 보면

부분적분이 떠오른다면 매우 좋은 현상이다. 왜냐하면 y 는 미분하기 좋은 형태, $g'(y)$ 는 적분하기 좋은 형태이기 때문이다. 부분적분하면

$$\int_{f(a)}^{f(b)} yg'(y)dy = [yg(y)]_{f(a)}^{f(b)} - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$$

이므로

$$\int_a^b f(x)dx = [yg(y)]_{f(a)}^{f(b)} - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$$

에서

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy = [yg(y)]_{f(a)}^{f(b)} = f(b)g(f(b)) - f(a)g(f(a)) = bf(b) - af(a)$$

임을 알 수 있다.

즉, (치환적분 + 부분적분)을 활용해서 주어진 식을 증명한 것이다.

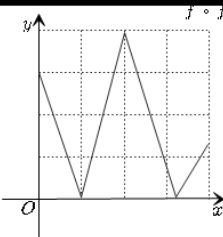
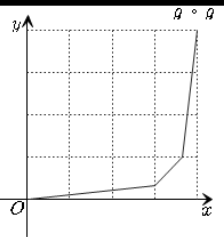
이처럼 위의 식들을 그래프로 확인하는 것도 중요하지만 다양한 적분 스킬을 통해 논리적으로 증명해보는 것이 좋다.

문제 1 - 위의 ②의 공식을 논리적으로 증명하시오.

1) 역함수를 활용하는 특별한 치환방법에 해당하는데 $y=f(x)$ 의 그래프를 생각해보면 특별한 것도 없음을 알 수 있다

2) 이 식 또한 유의미 한데, 함수 $f(x)$ 를 몰라도 역함수 $g(y)$ 를 알면 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 의 값을 대신해서 $\int_{f(a)}^{f(b)} yg'(y)dy$ 를 적분함으로써 구할 수 있음을 의미한다.

예를 들어, $f(x)=x^3+x^2+x$ 이라 하면 f 의 역함수 g 에 대하여 $\int_0^5 g(x)dx$ 를 구할 때 함수 $g(x)$ 를 모르지만 $g(x)$ 의 역함수인 $f(x)$ 를 알기 때문에 $\int_0^5 xf(x)dx$ 를 계산하면 $\int_0^5 g(x)dx$ 의 값과 같게 된다. (이는 고교과정을 전혀 벗어나지 않고, 수능이러한 그래프를 주고 풀어볼 수 있다. 실제로 출제된 바가 있다.)

(f ∘ f)(x)의 그래프를 그릴 때 고정점의 활용

(f ∘ f)(x)를 그릴 때는 두 종류의 고정점을 활용할 수 있다.

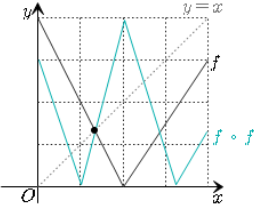
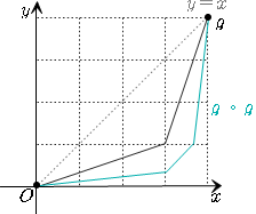
① 제1고정점
 $\{x | f(x) = x\} \subset \{x | (f \circ f)(x) = x\}$

② 제2고정점
 $\{x | f(x) = \alpha, \alpha \in S\} \subset \{x | (f \circ f)(x) = f(x)\}$

먼저 ①을 증명하고 그래프에서 확인해보자.

$A = \{x | f(x) = x\}$ 의 한 원소를 α 라 하면 $f(\alpha) = \alpha$ 이다.

따라서 $f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$ 이므로 $B = \{x | (f \circ f)(x) = x\}$ 라 할 때, $\alpha \in B$ 가 된다. 이것은 그래프 위에서는 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 교점은 $y = f(f(x))$ 와 $y = x$ 의 교점이 된다는 것으로 해석할 수 있다. 앞서 풀었던 합성문제에서 확인해보면 아래와 같다. 그림에서 보듯이 $f \circ f$ 에서 1개, $g \circ g$ 에서 2개의 고정점이 있다.

All in One ... 89

한완수 적분과 통계(상) 152p - 도형의 이동과 정적분

한완수 적분과 통계(상) 223p~224p - 치환적분

한완수 수학2(하) 89p - 합성함수의 그래프

에서 완전히 똑같은 문제가 그대로 출제되었고 실제로 많은 고려대 합격자를 배출했다.

논술전형&합격자 후기

홍대서강대투어후기.jpg |

주담(wnehd14) 성실회원 1:1

오늘 고대논술치러갔는데... 아 진짜 딱 보자마자 헐 한완수다 대박 ..
 2번 일반항 100분동안 구한건합정 ㅋ 물리도쉬웠는데 진짜아쉬움 ㅠ
 고대구경할것도없이 홍대건축가기로 맘먹어서 홍대갈생각에 들뜸ㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋ 바로지하철타고 꼬고했는데...



치대꼭간다 0

얘기하기 조심스럽지만...
 일단 심화특강 부분이 저도 처음엔 부담스러워서... 일단 CP 포인트 부분위주로 몇회독하고나서..
 심화특강 천천히 좀 여유있을때 보면서,,사고의 범위를 확장한다는 그런 마음으로 편히 보세요.
 저도 처음엔 이 많은걸 다 외워야 되나 싶었는데...그냥 하다보니 아 이런것도 있구나 하고 약간 감동받는 그런 느낌?
 글구 저는 고려대학교수시 오전 시험치르고나서 (결국 붙었네요)논술 학원 다녀본적없는데..
한완수 보길 잘했다 딱 이 생각 들었습니다..

12/15 05:24 IMIN: 375157 IP: 211.183.14 MS: 2011



해원(난만한) 0

정말 축하드립니다 ㅎㅎ

12/15 07:11 IMIN: 347173 IP: 58.247.14 MS: 2010

아주대논술군 |

로베르발(doa2610) 성실회원 1:1

한완수 반영한줄알았음 ㄷ ㄷ

아 그리고보니 한완수덕분에 아주대논술로 된듯 ㄷㄷㄷ |

연대조질로베르발HMT(doa2610) 정회원 1:1

내신3.8에다가 내신 반영비율큰데 한완수내용거의 비슷하게나와서 ㅋ난만한님께 감사드립니다 ㅠ

난만한님 서강대 논술 적응이여 ㅋㅋ 감사해요 !! |

물물물루(yahboykr) 성실회원 1:1

이번 난이도에 상관없이

두번째 제시문에 피타고라스 정리하고
 정적분 값을 변환 나왔어요 ㅋㅋㅋ 물다
 제 기억으로 한완수 기백 적분편 심화특강에서 봤던거라 ㅋㅋㅋ 멘붕 이 일어날 여지가 없었네요 ㅎㅎ

특히 2-4 번은 감회가 있던게

몇달전에 난만한님께 공간상에 피타고라스정리 질문했었고
 난만한님이 기억하실려나 모르겠는데
 피타 고라정리의 확장판으로서 그냥 증명만 해보라고 답변 달아주시거..ㅠ

그대로 똑같이 소문제로 나왔어요 ㅋ
 다른분들 얘기로 이번에 많이 쉬웠다고는 하지만

왠지 좋은 결과를 가질거같네요 ㅋ

감사해요 !!!