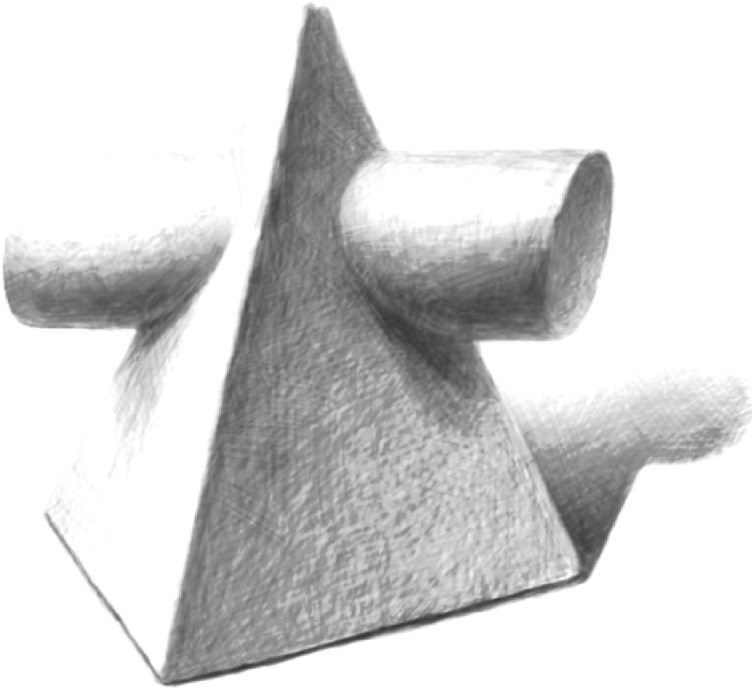


미적분2(미분법)

수학자의 명언

라이프니츠 (Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646~1716)

"발명의 근원을 아는 것보다 더 중요한 것은 없다.
내 생각으로 그것은 발명자체보다도 더 흥미롭다."

Critical Point - 교과서의 이론을 다시 한 번 체계적으로 정리하는 단계 (수능 기본개념 완성)

01.미분가능의 정의에 따라 미분가능성을 확인하라.

02.다양한 미분방법을 완벽히 숙지하라.

03.접선 문제는 모든 점에서의 접선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$을 도입하라.

04.초월함수의 그래프의 개형은 기본연산과 미분을 활용하라.

특강 - 교과서의 이론을 여러 가지 소재로 연습하는 단계 (수능 추가개념 완성, 논리력+응용력+사고력 배양)

수능특강01: 사칙연산, 합성함수의 그래프

수능특강02: 다항함수

수능특강03: 함수의 대칭성과 주기성

수능특강04: 역함수와 미분법

수능특강05: 최대, 최소 문제의 해법

수능특강06: 볼록, 오목과 관련된 식

수능특강07: 사이값의 정리, 평균값의 정리

수능에서 논술까지 한번에!

한권으로 완성하는 수학

저자의 잔소리

원리 없이 결과만을 외운다면, 언젠가 크게 혼날거야.

01.미분법

CP 01 **미분가능의 정의에 따라 미분가능성을 확인하라.**

수능에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ이나 여러 문항에서 미분가능성에 대하여 묻는 문제가 많다. **여러 가지 화려한 기술보다 [미분가능의 정의]를 완벽하게 익혀두고 사용하는 것이 수능에서 가장 중요하다. 수능에서는 다른 스킬은 거의 쓸모없고 정의가 핵심이다.**[1)]

$x=a$에서 미분가능하다.
$\Leftrightarrow$ $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재한다.
$\Leftrightarrow$ **극한값 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$이 존재한다.**[2)] **존재하면 그 값을 $f'(a)$로 약속**

위와 같은 미분가능성의 정의를 철저히 숙지하도록 하고, 자주 나오는 유형 두 가지를 다음과 같이 정리해두도록 하자.

① $x=a$에서 함수가 바뀔 때, $x=a$에서의 미분가능성
실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq a) \\ g(x) & (x < a) \end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 필요충분조건은

$$f(a)=g(a),\ f'(a)=g'(a)$$

이다.

② 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $|f(x)|$의 미분가능성

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ -f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

에서 $f(x)$와 $-f(x)$는 미분 가능하므로
"$f(x)$에서 $-f(x)$로" 혹은 "$-f(x)$에서 $f(x)$로" 함수가 바뀌는 경계점에서의 미분가능성을 확인해야 하는데, 그 경계점을 $x=a$라 하면

$$f(a)=-f(a),\ f'(a)=-f'(a)$$

여야 하므로 $f(a)=f'(a)=0$이 되는 것을 알 수 있다.
따라서 문제에서 $|f(x)|$의 미분가능성을 물을 때에는, $f(x)$의 부호가 바뀌는 점을 $x=a$[3)]**라 할 때, $f'(a)=0$인지만 확인하면 된다.**

Annotation

***중요**
CP는 교과서의 개념 중 수능 핵심개념을 모아둔 것이므로 반드시 해당 단원 교과서를 먼저 공부한 후에 CP를 공부하도록 하자.

1) 수리논술에서도 미분가능의 정의는 매우 중요하다.

2) 결국 미분계수는 극한으로 정의되므로 **좌극한**과 **우극한**을 확인해야 한다.

3) 양수에서 음수, 혹은 음수에서 양수로 바뀌는 점을 의미하는데 반드시 $f(a)=0$인 점 중에 하나임을 알 수 있다.

기본개념완성

Annotation

CP 04 초월함수의 그래프의 개형은 미분과 기본연산을 활용하라.

다항함수든 **초월함수**[1]든 수능에서 가장 중요한 것은 일단 미분해서 개형을 추론하는 것이다. **미분해서 도함수를 활용하는 것**이 모든 수능 문제 해결의 기본이고 거의 전부이다.
일단 초월함수의 특징에 대하여 몇 가지 생각해보자.

1) 고교과정에서는 다항함수가 아닌 거의 대부분의 함수를 초월함수라 해도 크게 문제없다.

① 정의역과 치역이 매우 다양하다.

다항함수는 항상 정의역이 $(-\infty,\ \infty)$이고 치역은 $(a,\ \infty)$혹은 $(-\infty,\ \infty)$이다.[2]
하지만 초월함수의 경우 정의역이나 치역이 매우 다양할 수 있다.

예를 들어 e^{-x^2}의 경우 $-x^2 \le 0$이므로 $0 < e^{-x^2} \le e^0 = 1$이므로 치역의 범위가 $(0,\ 1]$인 것을 알 수 있다.

2) 최고차항의 계수가 양수이고 차수가 짝수면 치역이 $(a,\ \infty)$이고 홀수면 치역이 $(-\infty,\ \infty)$임을 그래프를 통해 쉽게 이해할 수 있다.

② 주기성 혹은 대칭성을 가지는 경우가 있다.

앞서 공부한 $f(x)=e^{-x^2}$의 경우 $f(x)=f(-x)$를 만족하므로 y축 대칭함수이다.
또한 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$와 같은 초월함수는 다항함수와는 다르게
$f(x)=f(x+2\pi)$를 만족하므로 주기가 2π인 주기성을 가진다.[3]

3) 다항함수의 경우
상수함수를 제외하고는 절대
$f(x)=f(x+p)\ \ (p>0)$라는
식을 만족시킬 수 없다.

③ 점근선을 가지는 경우가 있다.

앞서 공부한 $f(x)=e^{-x^2}$으로 확인해보자.
$\lim_{x\to\infty} f(x)=0,\ \ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 x축이 곧 점근선임을 예측할 수 있다.

위의 특징 ①, ②, ③은 주로 다항함수와의 차이점으로 부각되는 것들이고
일반적으로 **도함수를 통해서 초월함수의 그래프의 개형을 추론하는 것은 완전히 동등하고 초월함수에서도 매우 중요**하다.

위의 방법들을 토대로 초월함수의 그래프 그리는 방법을 교과서에서 다음과 같이 설명한다.[4]

4) 외울 필요 없음.

① 곡선이 존재하는 범위 (정의역, 치역)을 찾는다.
② 곡선의 대칭성, 주기성을 파악한다.
③ x절편과 y절편을 찾는다.
④ 함수의 증가와 감소, 극값을 찾는다. ← $f'(x)$를 이용하는 중요한 과정
⑤ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점을 찾는다. ← $f''(x)$를 이용하는 중요한 과정
⑥ 극한값, 점근선을 찾는다.

Annotation

하지만 이 방법을 모두 암기해서 차근차근 해나간다는 것은 상당히 곤혹스러운 일이다. 사실 ④, ⑤를 제외한 과정은 기본적인 사칙연산이나 대입, 합성함수 등을 통해서 충분히 추론이 가능하고 대입은 중학교 때부터 활용해오던 그래프를 그리는 매우 훌륭한 방법에 속한다. 따라서 그래프를 그리는 방법을 다음과 같이 기억하자.

초월함수의 그래프의 개형을 그리는 방법

> **① 함수 $f(x)$의 형태를 보고 사칙연산이나 대입, 합성함수 등을 통해 대략적인 그래프의 개형만 추론한다.**
> **② 도함수 $f'(x)$를 구한다.**
> **③ $f'(x)>0$인 구간에서는 $f(x)$가 증가, $f'(x)<0$인 구간에서는 $f(x)$가 감소한다는 성질을 활용해서 원함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 더 정확히 그린다.**

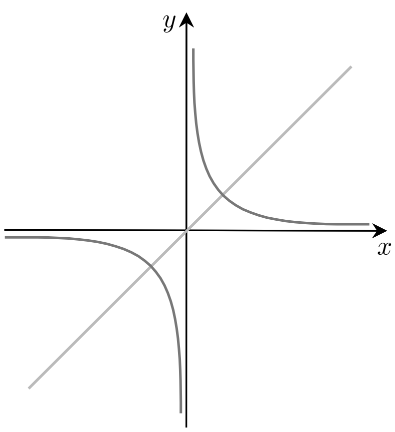
일단 위의 방법을 읽으면 ①에서 의문이 생기는데 몇 가지 예를 들어 그래프를 그려보면서 이야기를 풀어나가도록 하자.

먼저 유명한 초월함수인 $y=x+\dfrac{1}{x}$의 그래프를 그리면서 **더하기 함수**를 알아보자.

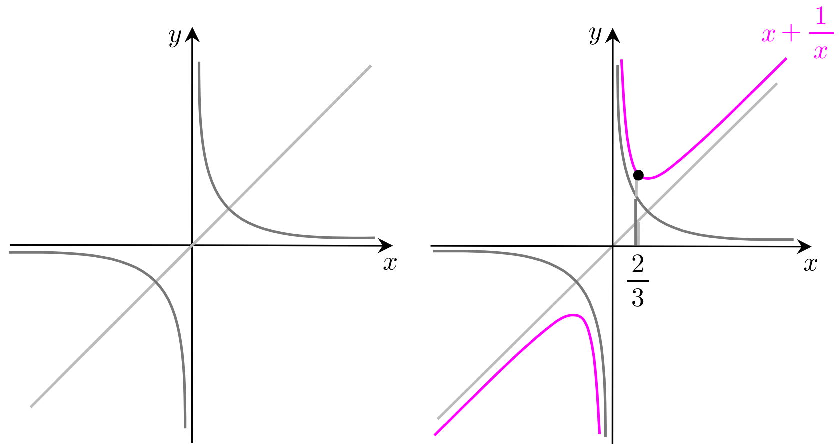
함수 $y=x+\dfrac{1}{x}$을 처음 딱 보면 어렵다는 생각을 하겠지만

대부분의 함수는 "아는 함수의 사칙연산 혹은 합성"으로 구성되어 있다.

따라서 $y=x+\dfrac{1}{x}=(x)+\left(\dfrac{1}{x}\right)$로 생각할 수 있고 그림과 같이 두 함수 x, $\dfrac{1}{x}$를 따로 따로 그린 후 실제로 두 함수를 직접 더하면서 그래프를 대략적으로 추측해볼 수 있다.[1)]



1) 함수를 어떻게 더하지? 라고 생각할 수 있는데 단순히 숫자 대입이다.
예를 들어 $y=x+\dfrac{1}{x}$에
$x=1$을 대입하면 $(1)+\left(\dfrac{1}{1}\right)$
$x=2$를 대입하면 $(2)+\left(\dfrac{1}{2}\right)$
$x=3$을 대입하면 $(3)+\left(\dfrac{1}{3}\right)$
…
이 된다는 것을 적극 활용해서 그래프의 개형을 추론하는 것이다. 조금만 연습하면 금방 숙달시킬 수 있다.



오른쪽 그림과 같이 $\frac{2}{3}$를 직접 대입했다고 생각하면 $\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)$이므로 두 함숫값을 그림과 같이 직접 더해서 점을 찍어 주면 된다.

이 같은 행위를 계속해서 반복하면 오른쪽의 그래프인 $x+\frac{1}{x}$의 그래프를 대략적으로 그려낼 수 있다. 여기서 주의할 것은 점근선을 대입하면서 자연스럽게 파악할 수 있다는 것인데 x에 점점 큰 값을 대입하면 $\frac{1}{x}$은 점점 0에 가까워 지므로 x보다 매우 약간만 큰 함숫값을 가지게 된다는 것이다. 따라서 $y=x$가 점근선임을 알 수 있다. 또한 양수 x를 점점 0에 가깝게 대입하다보면 x가 점점 사라져서 $\frac{1}{x}$이 점근선임을 알 수 있다.[1]

이처럼 **한 점씩 직접 대입한다는 생각으로 더하기 함수를 직접 그리면 점근선 또한 그래프를 그리는 과정에서 바로 추론 할 수 있고 대략적인 그래프의 개형까지 완성 할 수 있다.** 하지만 여기까지는 **정확한 논리가 아닌 숫자를 통한 추론에 불과하므로 반드시 미분을 통해 확인과정을 거쳐야 한다.**

미분해보면 $y'=1-\frac{1}{x^2}$이므로 $x>0$인 구간에서 도함수 $1-\frac{1}{x^2}$의 부호[2]를 생각해보면 $(0,\,1)$에서 음수, $(1,\,\infty)$에서 양수이므로 $x=1$에서 극소를 가지는 것을 알 수 있고 앞서 더하기 함수를 통해 추론했던 그래프가 거의 정확한 것까지 알 수 있다. 즉 함수 $x+\frac{1}{x}$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림이 맞고 극점 $(1,\,2)$, $(-1,\,-2)$까지 미분을 통해 정확하게 알아낼 수 있다.

Annotation

1) 극한으로 표현하면 다음과 같이 이해할 수 있다.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\fallingdotseq x$$

$$\lim_{x\to+0}\left(x+\frac{1}{x}\right)\fallingdotseq\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)\fallingdotseq\infty$$

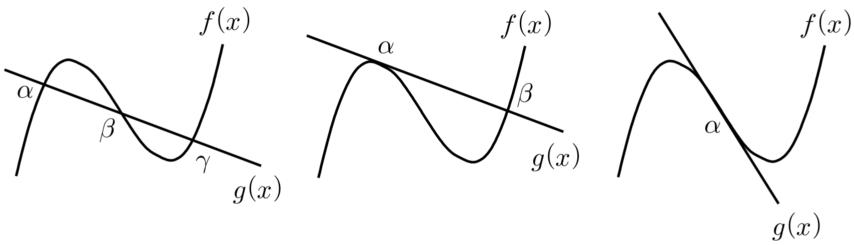
($\lim$ 에 ≒와 같은 표현은 수학적으로 올바르지 않지만 위의 식을 직관적으로 이해하기에 큰 문제는 없을 것이다.)

2) 도함수는 부호만 중요하므로 $1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$이라 생각해보면 분모 x^2은 부호에 영향을 주지 않으므로 x^2-1만 생각해보면 쉽다. 이렇게 **부호에 영향을 주지 않는 것을 무시하는 방법은 초월함수의 미분법에서 매우 자주 활용되니 완벽하게 숙지해두자.**

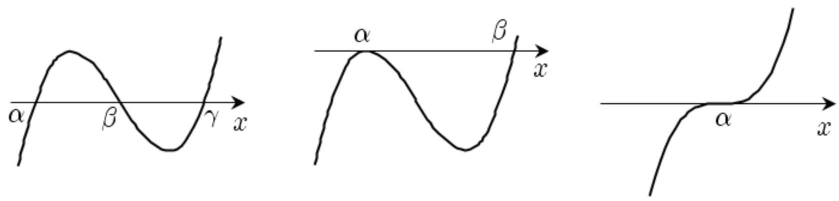
Annotation

이제 **빼기 함수**에 대하여 알아보자.

① 빼기 함수는 다항함수에서 자주 활용된다.



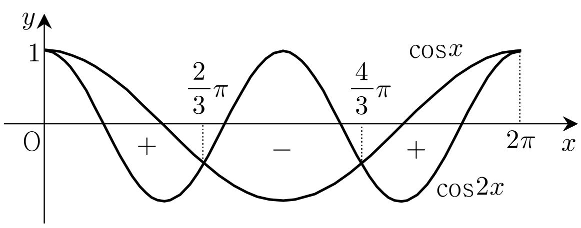
→ 빼기 함수 $f(x)-g(x)$의 그래프 그리기



그림과 같이 단순히 함숫값을 직접 뺀다고 생각하고, $f(x)-g(x)$ 또한 삼차함수라는 것을 생각해주면 어렵지 않게 그래프를 그릴 수 있다. 이와 같은 원리를 활용하면 이차함수, 삼차함수, 사차함수 … 등의 모든 다항함수에 대하여 빼기 함수 그래프를 그릴 수 있을 것이다.

② 빼기 함수는 도함수의 부호를 판정할 때 매우 유용하다.

초월함수 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$의 그래프를 그린다고 해보자. 도함수를 찾으면
$f'(x)=2(\cos x-\cos 2x)$인데 도함수의 부호를 판단하기가 만만치 않다.
여기서 함수 $\cos x$와 $\cos 2x$를 각각 그려서 뺀다고 생각하면 다음과 같이
도함수의 부호를 판단할 수 있게 된다.



또한

$$f'(x)=2\cos x-2\cos 2x=2\cos x-2(2\cos^2 x-1)=-2(2\cos x+1)(\cos x-1)$$

이므로 $\cos x=-\frac{1}{2}$에서 $\cos x$와 $\cos 2x$의 교점의 x좌표 까지 구할 수 있다.

이처럼 다항함수에서 빼기 함수의 그래프를 그릴 때, 초월함수에서 도함수의 부호를 판정할 때 “빼기 함수”를 적극적으로 활용하면 된다. 하지만 일반적으로 $y=x-\dfrac{1}{x}$와 같은 그래프를 그릴 때에는 빼기 함수가 아닌 $y=(x)+\left(-\dfrac{1}{x}\right)$라 생각해서 앞서 배운 더하기 함수로 그래프를 그리는 것이 편하다.

따라서 **더하기 함수**와 **빼기 함수**에 대해서는 다음과 같이 정리하면 된다.

더하기 함수와 빼기 함수, $f(x)\pm g(x)$를 활용해서 그래프를 그리는 방법

① 도함수의 부호 판정이나 다항함수의 빼기 함수가 필요한 경우가 아니면 더하기 함수로 해석하는 것이 편한 경우가 많다.

② 잘 아는 함수 $f(x)$와 $\pm g(x)$의 그래프를 그린다.

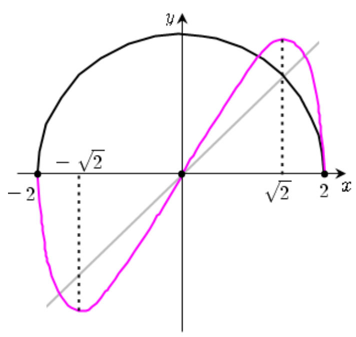
③ 두 함수에 직접 $x=0$, 1, 2 $\cdots$ 등을 대입한다는 심정으로 직접 함숫값을 더하면서 그래프의 대략적인 개형을 완성한다.

④ 도함수 $f'(x)\pm g'(x)$의 부호를 통해서 그래프의 증감을 정확히 한다.

이제 곱하기 함수, 나누기 함수 그래프 그리기에 대하여 배워보자.

일단 나누기 함수는 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)$이므로 항상 곱하기 함수로 해석해서 그래프를 그릴 수 있으므로 곱하기 함수에 대해서만 정확하게 알아두면 된다.

예를 들어 $x\sqrt{4-x^2}$의 그래프를 그려보자.



그림과 같이 x와 $\sqrt{4-x^2}$의 그래프를 그린 후 <u>**두 함수의 함숫값이 0이 되는 점을 먼저 표시한다.**</u> 다음 구간 $(-2,\ 0)$에서는 양수 곱하기 음수로 음수가 되고 $(0,\ 2)$에서는 양수 곱하기 양수로 양수가 되는 것을 알 수 있다. 따라서 대략적인 개형은 위의 그래프와 같이 완성할 수 있다. 이처럼 곱하기 함수의 경우 **함숫값이 0이 되는 점과 부호만 판정할 수 있으면 매우 쉽게 그래프의 개형을 그려낼 수 있다.** 1) 미분을 통한 정확한 추론 – 반드시 읽기

Annotation

1) 곱하기를 통해 대략적인 그래프의 개형을 추론한 후 미분을 통해 반드시 확인과정을 거쳐야 한다.

$(x\sqrt{4-x^2})'=$

$\sqrt{4-x^2}+\dfrac{-2x^2}{2\sqrt{4-x^2}}$

인데 도함수의 부호만 중요하기 때문에 다음과 같이 식을 변형하자.

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)\{(4-x^2)-x^2\}$

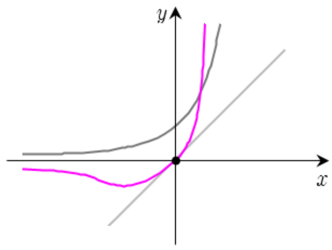
$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)2(2-x^2)$

따라서 $2-x^2$만 보고 부호를 판정하면 되므로 $x=\pm\sqrt{2}$에서 극대, 극소를 가지는 것을 쉽게 알아낼 수 있다. <u>**이처럼 도함수의 부호에 집착하는 연습을 반드시 해야 한다. 그렇지 않고 도함수 자체를 살피려하면 도함수가 너무 어려워서 멘탈이 무너질 것이다.**</u>

기본개념완성

Annotation

이번에는 $y=xe^x$의 그래프를 그려보자.



먼저 함숫값이 0이 되는 점을 찾아보면 $x=0$밖에 없다. 즉, $(0,\ 0)$을 표시한 후에 부호를 살펴보면 $(-\infty,\ 0)$에서는 음수, $(0,\ \infty)$에서는 양수인 것을 알 수 있다. $(0,\ \infty)$인 구간에서는 $x\to\infty$이면 두 함수 x와 e^x 모두 ∞로 가서 걱정 없이 무한대로 발산하는 그래프를 그려주면 된다. 하지만 $(-\infty,\ 0)$에서 $x\to-\infty$일 때 생각해보면 x는 $-\infty$로 발산하지만 e^x는 $+0$으로 수렴하게 된다. 이렇게 ±0으로 가는 함수와 $\pm\infty$로 발산하는 함수가 곱해지면 결과 값이 ±0으로 갈지 $\pm\infty$로 갈지 판단을 해줘야한다. 즉 위의 그래프에서 $\lim_{x\to-\infty} xe^x=-0$ or $-\infty$ 임을 판단해줘야 하는데 다음과 같이 힘의 세기를 기억하고 있자.[1)]

$$e^x > \cdots > x^2 > x > \sqrt{x} > \cdots > \ln x$$

따라서 x보다 e^x의 힘이 더 세므로 e^x의 0이 우세하기 때문에 $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ 이 된다. 즉 $(-\infty,\ 0)$인 구간에서는 음수이면서 0으로 수렴하는 그래프의 개형을 그려주면 된다. 2) 미분을 통한 정확한 추론 – 반드시 읽기

마찬가지로 $x\ln x$와 같은 그래프를 그릴 때에도 $+0$으로 갈 때 $(+0)\times(-\infty)$ 형태이므로 판단을 해줘야 하는데 다항함수인 x의 힘이 더 세므로 음수이면서 0으로 수렴한다는 것을 알 수 있다.[3)]

위의 두 가지 예를 통해 곱하기 함수 그리는 방법을 정리해보면 다음과 같다.

곱하기 함수와 나누기 함수, $f(x)\overset{\times}{\underset{\div}{}}g(x)$를 활용해서 그래프를 그리는 방법

① $f(x)$와 $\left(\overset{\times}{\underset{\div}{}}g(x)\right)$의 함숫값이 0이 되는 점을 모두 표시한다.

② 각 구간에서 부호를 판정해서 그래프를 그린다. 예를 들어 $f(a)=f(b)=0$ 이고 $(a,\ b)$에서 양수면 그냥 위로 볼록하게 일단 그린다.

③ 미분을 해서 정확한 그래프의 개형을 파악한다.

④ $(\pm0)\times(\pm\infty)=(\pm0)$ or $(\pm\infty)$을 판정할 때, 힘의 세기를 고려한다.

1) 힘의 세기라는 표현은 수학적으로 훌륭한 표현은 아니지만 직관적으로 이해하기에 좋으므로 일단은 이렇게 공부하도록 하자.

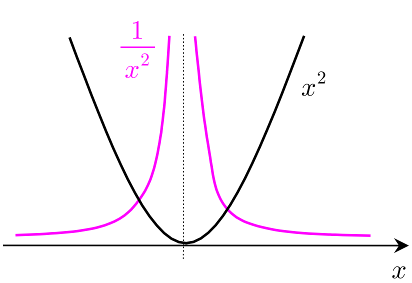
2) xe^x을 미분하면 $e^x+xe^x=e^x(1+x)$인데 도함수의 부호만 판단하면 되므로 e^x는 무시하고 생각해주면 된다. 따라서 $(-\infty,\ -1)$에서 감소하고 $(-1,\ \infty)$에서 증가하는 것을 알 수 있고, -1에서 극소를 가지는 것을 알 수 있다.

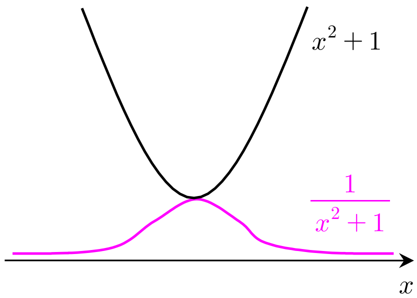
3) 이 부분에 대해서 일단은 증명보다는 직관적으로 e^x가 훨씬 빨리 무한대로 가고 $\ln x$가 느린 속도로 무한대로 간다는 것을 생각해주는 것이 좋다.

마지막으로 나누기 함수의 예를 몇 가지만 들어보자.

예를 들어 $\frac{e^x}{x}$와 같은 그래프를 그릴 때에는 e^x와 x를 그려서 직접 나누는 것이 아니라 e^x와 $\frac{1}{x}$를 그린 후 곱한다고 생각하면 된다.

하지만 $\frac{e^x}{x^2}$나 $\frac{x}{x^2+1}$같은 경우 $\frac{1}{x^2}$과 $\frac{1}{x^2+1}$의 그래프를 그릴 수 있어야 하므로 두 그래프의 개형을 알아보면 다음과 같다.

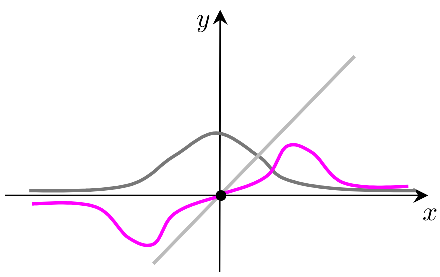




그림과 같이 $\frac{1}{f(x)}$의 그래프의 개형을 그릴 때 $f(x)$의 그래프를 그린 후 한 점씩 대입하면서 $\frac{1}{f(1)}$, $\frac{1}{f(2)}$ $\cdots$ 등의 점을 표시해보면 그래프의 개형을 어느 정도 완성할 수 있다. 물론 미분을 해서 더 정확하게 그릴수도 있다.

또한 역수그래프를 그릴 때에는 $f(x)$와 $\frac{1}{f(x)}$의 교점의 y좌표는 항상 ± 1이 된다는 것 정도는 자연스럽게 알 수 있고 실제 수능에서도 한 번 출제된 적이 있다.[1)]

마지막으로 나누기 함수를 통해서 $\frac{x}{x^2+1}$의 그래프를 그려본 후 **사칙연산과 그래프 그리기**를 마무리하도록 하자.



$x \times \left(\frac{1}{x^2+1}\right)$에서 함숫값이 0이 되는 $(0,\ 0)$을 표시한다. 이후 $(0,\ \infty)$에서는 양수라는 것을 알 수 있는데 $(+\infty)\times(+0)$이므로 직접 극한으로 판단해줘야 한다. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$이므로 위와 같이 완성할 수 있다.[2)3)]

Annotation

1) $f(x)=\frac{1}{f(x)}$에서 $f(x)=\pm 1$임을 알 수 있다.

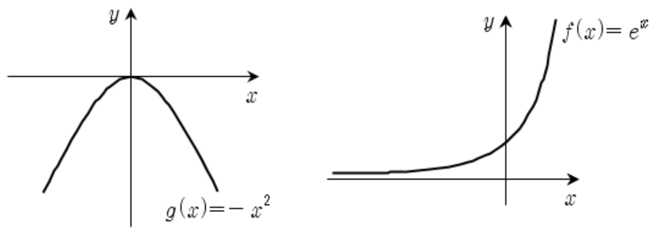
2) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$라 하면 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다. 따라서 $(0,\ \infty)$구간의 그래프를 원점 대칭이동하여 그래프를 완성하는 방법도 있다.

3) 주어진 식을 미분해보면 $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$인데 도함수의 부호만 중요하므로 양수가 되는 분모는 무시하고 $1-x^2$만으로 부호를 따져보면 ± 1에서 극대, 극소를 가진다는 것을 알 수 있다.

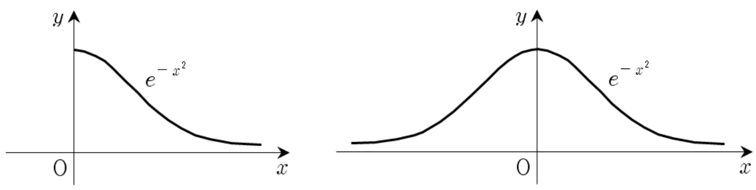
Annotation

사실 앞서 배운 사칙연산 그래프에 대한 이론은 이론이 아니라 중학교 때부터 해오던 $x=1$, $x=2$ $\cdots$ 을 대입해서 모눈종이에 점을 찍던, 그 이론이라 생각하면 된다. 한 점씩 대입해서 직접 함숫값으로 그래프를 추론한 후에 미분으로 그래프의 개형을 "논리적으로" 완성한다고 생각하면 된다.

이제 합성함수의 그래프도 몇 가지만 그려보자. 교과서 대표 예제로 있는 함수 e^{-x^2}의 그래프는 우리가 잘 알고 있는 함수의 사칙연산으로 표현이 되지 않는다. 하지만 $f(x)=e^x$, $g(x)=-x^2$이라 하면 두 함수의 합성으로 표현할 수 있다. 따라서 두 함수를 따로 따로 그린 후 사칙연산 그래프와 마찬가지로 한 점씩 직접 대입하면서 그래프를 추론하면 된다.



합성함수 $f(g(x))$에서 가장 중요한 것은 g의 치역이 다시 f의 정의역이 된다는 것이다. 위의 $g(x)$의 그래프에서 x에 0, 1, 2 $\cdots$를 하나하나 대입해보면 치역이 0부터 시작해서 점점 작아져서 $-\infty$로 가는 것을 알 수 있다.
이 치역이 다시 $f(x)$의 정의역이 되면 1부터 시작해서 점점 $+0$으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 따라서 $(0, \infty)$인 구간에서 e^{-x^2}의 그래프를 대략적으로 그려보면 왼쪽 그림과 같다.



또한 $f(g(x))=f(g(-x))$이므로 e^{-x^2}은 y축에 대하여 대칭인 것을 알 수 있으므로 오른쪽 그림과 같이 그래프의 개형을 완성할 수 있다.[1)]

이처럼 합성함수 또한 한 점씩 대입하는 것을 활용해서 그래프의 개형을 추론한 후에 미분을 통해서 정확한 그래프의 개형을 확인하는 것이 좋다.

1) 직접 e^{-x^2}의 도함수, 이계도함수를 찾아서 극점의 위치와 변곡점의 위치를 정확히 확인하고 합성함수로 추론한 개형이 정확한지 확인하도록 하자.

여기까지 **"사칙연산과 그래프 그리기" "합성함수와 그래프 그리기"**를 배웠다.
이 내용은 사실은 중학교 때 배운 한 점씩 대입하는 원리에서 오는 것임을 알아두고 아무리 어려운 그래프가 나와도 한 점씩 대입하는 방법은 절대 무너지지 않는 좋은 방법임을 알아두자. 아래의 총 정리를 읽어보고, 오른쪽 대표 예제 그래프를 하나도 빠짐없이 모두 그려본 후에 넘어가도록 하자.

초월함수의 그래프의 개형을 그리는 방법

① 함수 $f(x)$의 형태를 보고 사칙연산이나 대입, 합성함수 등을 통해 대략적인 그래프의 개형만 추론한다.
② 도함수 $f'(x)$를 구한다.
③ $f'(x)>0$인 구간에서는 $f(x)$가 증가, $f'(x)<0$인 구간에서는 $f(x)$가 감소한다는 성질을 활용해서 원함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 더 정확히 그린다.[1)]

더하기 함수와 빼기 함수, $f(x)\pm g(x)$를 활용해서 그래프를 그리는 방법[2)]

① 도함수의 부호 판정이나 다항함수의 빼기 함수가 필요한 경우가 아니면 더하기 함수로 해석하는 것이 편한 경우가 많다.
② 잘 아는 함수 $f(x)$와 $\pm g(x)$의 그래프를 그린다.
③ 두 함수에 직접 $x=0,\ 1,\ 2\ \cdots$ 등을 대입한다는 심정으로 직접 함숫값을 더하면서 그래프의 대략적인 개형을 완성한다.
④ 도함수 $f'(x)\pm g'(x)$의 부호를 통해서 그래프의 증감을 정확히 한다.

곱하기 함수와 나누기 함수, $f(x)\overset{\times}{\underset{\div}{}}g(x)$를 활용해서 그래프를 그리는 방법[3)]

① $f(x)$와 $\left(\overset{\times}{\underset{\div}{}}g(x)\right)$의 함숫값이 0이 되는 점을 모두 표시한다.
② 각 구간에서 부호를 판정해서 그래프를 그린다. 예를 들어 $f(a)=f(b)=0$이고 $(a,\ b)$에서 양수면 그냥 위로 볼록하게 일단 그린다.
③ 미분을 해서 정확한 그래프의 개형을 파악한다.
④ $(\pm 0)\times(\pm\infty)=(\pm 0)$ or $(\pm\infty)$을 판정할 때, 힘의 세기를 고려한다.

합성함수 $f(g(x))$의 그래프를 그리는 방법[4)]

① $g(x)$와 $f(x)$의 그래프의 개형을 각각 그린다.
② g의 치역이 f의 정의역이 되는 것을 생각하면서 한 점씩 대입해서 그래프의 개형을 추론한다.
③ 미분을 해서 정확한 그래프의 개형을 파악한다.

Annotation

1) 여기서 도함수의 그래프가 중요한 것이 아니라 **도함수의 부호만 중요하다는 것을 명심**해야 한다.

2) 대표 예제
$x+\dfrac{1}{x}$, e^x+x, $x+\sqrt{1-x^2}$

3) 대표 예제
$\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\sqrt{4-x^2}$,
$x\sqrt{10-x}$ xe^x, x^2e^x, $\dfrac{e^x}{x}$
$x\ln x$, $x^2\ln x$, $\dfrac{\ln x}{x}$

4) 대표 예제
$\ln(x^2+1)$, e^{-x^2}

기본개념완성

STEP1 교과서 수준의 문제에 Critical Point를 적용해보자. … 1)

방정식 $\ln x = kx$의 실근의 개수를 $f(k)$라 하자.

(1) 곡선 $\ln x$와 직선 kx의 그래프를 활용해서 $f(k)$의 그래프를 완성하시오.

(2) 곡선 $\dfrac{\ln x}{x}$와 직선 k의 그래프를 활용해서 $f(k)$의 그래프를 완성하시오.

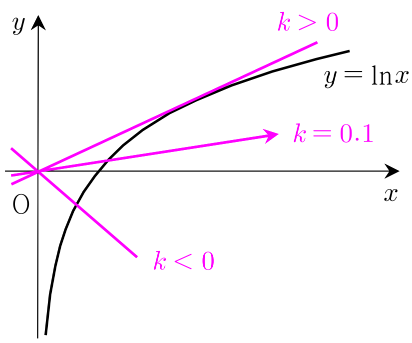
STEP2 수능 수준의 문제에 Critical Point를 적용해보고 교과서 수준의 문제와 비교해서 풀이의 공통성에 대하여 스스로 생각해보자. … 2)

실수 m에 대하여 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? [2012]

먼저 STEP1의 (1)과 (2)의 문제를 풀면서 각 풀이의 장단점을 파악해보고 어떤 풀이가 본인에게 잘 맞는지 생각해보자.

<STEP1의 풀이>

(1) 교점 개수를 찾기 위해 그림과 같이 k가 $-\infty$로부터 차근차근 커진다고 생각해보자. $y = \ln x$의 그래프의 개형을 쉽게 그릴 수 있기 때문에 $k < 0$에서 교점이 한 개라는 것을 쉽게 알 수 있다.



또한 $k = 0$일 때에는 여전히 교점이 1개이지만 $k = 0.1$과 같이 양수가 되는 순간 화살표를 따라가면 언젠가 곡선 $y = \ln x$과 한 번 더 만나서 교점이 2개가 된다. k를 계속해서 더 크게 만들면서 그래프를 그려보면 결국 그림과 같이 접하는 순간에 교점이 1개이고 더 커지면 교점이 없어지는 것을 알 수 있다.

즉 **이 문제는 교점의 개수 문제이지만 결국은 "접선 문제"인 것을 알아야 한다.**

Annotation

1) 정답 :

$(-\infty, 0]$에서 $f(k)=1$

$\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$에서 $f(k)=2$

$k=\dfrac{1}{e}$에서 $f(k)=1$

$\left(\dfrac{1}{e}, \infty\right)$에서 $f(k)=0$

*이 문제가 풀리지 않는다면 다시 한완수 전 단계인 교과서 공부로 돌아가셔서 완벽히 공부하고 오셔야 합니다.

2) 정답 : 15/4

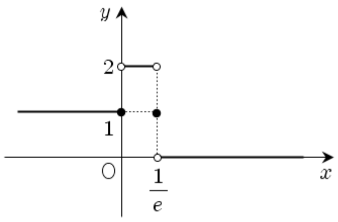
*자세한 해설은 향후 기출문제를 모아서 풀 때 볼 수 있다.

Annotation

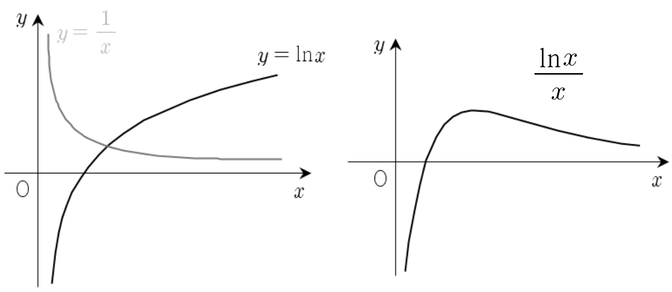
$(0,\ 0)$에서 $y=\ln x$에 그은 접선을 찾아야 하므로 $(t,\ \ln t)$에서의 접선

$$y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln t$$

을 도입하자. $(0,\ 0)$을 대입하면 $\ln t-1=0$에서 $t=e$임을 알 수 있다. $t=e$를 다시 대입하면 접선 $y=\frac{x}{e}$를 찾을 수 있다. 따라서 $k=\frac{1}{e}$일 때 교점이 1개인 것을 알 수 있고 $f(k)$의 그래프를 완성하면 다음과 같다.



(2) $\frac{\ln x}{x}$의 그래프를 그려야 문제를 해결할 수 있다. 따라서 (1)에서 $\ln x$를 그리는 것 보다 일단 난이도가 높다. $\frac{\ln x}{x}=\ln x\times\left(\frac{1}{x}\right)$이므로 $\ln x$와 $\frac{1}{x}$을 그린 후 두 함수를 곱하면 된다.



왼쪽 그림에서 알 수 있듯이 함숫값이 0이 되는 점은 $(1,\ 0)$뿐이다. 점 $(1,\ 0)$을 표시한 후에 $(1,\ \infty)$에서는 양수, $(0,\ 1)$에서는 음수임을 알 수 있고 $+0$으로 가는 값을 살펴보면 $(+\infty)\times(-\infty)=(-\infty)$이고 $+\infty$로 가는 값을 살펴보면 $(+\infty)\times(+0)$이므로 힘의 세기를 따져보면 다항함수 출신인 $\frac{1}{x}$가 더 세므로 $(+\infty)\times(+0)=(+0)$임을 알 수 있다. 따라서 오른쪽 그래프의 개형을 완성할 수 있다. 이렇게 곱하기 함수로 추론한 개형을 논리적으로 확인하기 위해 미분해보자.

$\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$에서 $1-\ln x$만 부호에 영향을 준다. 따라서 $x=e$에서 극댓값 $\frac{1}{e}$을 가지는 것을 알 수 있으므로 $f(k)$의 개형을 쉽게 완성할 수 있다.

Annotation

<STEP2의 풀이>

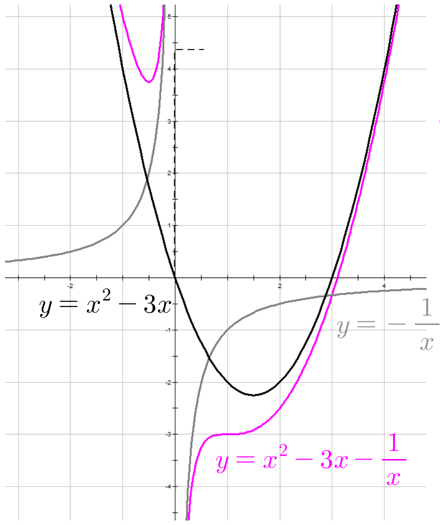
$(0,\ 2)$를 지나는 직선은 $y=mx+2$이므로

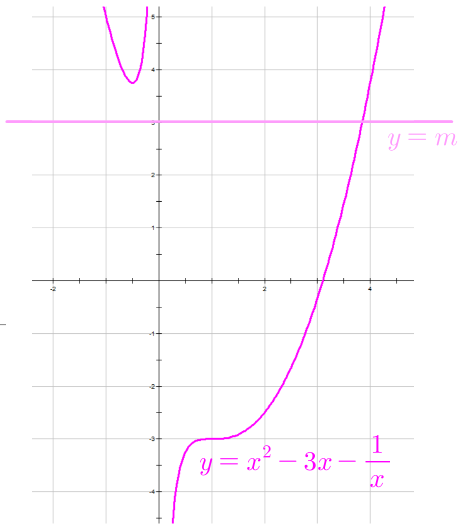
$x^3-3x^2+1=mx+2$에서 $x^3-3x^2-1=mx$, $x^2-3x-\frac{1}{x}=m$이므로

$y=x^2-3x-\frac{1}{x}$의 그래프를 그려보자. 1)

그래프를 그리기 위해서 왼쪽과 같이 $(x^2-3x)+\left(-\frac{1}{x}\right)$이라 생각한 후 두 그래프를 그린 후 더하면서 대략적인 개형을 추측하자. 2) 또한 미분해보면

$y'=2x-3+\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}$에서 $x=-\frac{1}{2}$에서 극소를 가지고 $x=0$이 점근선이 되는 것을 알 수 있고 그래프는 오른쪽과 같이 그려진다.





또한 극솟값이 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{15}{4}\right)$인 것을 알 수 있으므로 최댓값은 $\frac{15}{4}$이다.

STEP1 문제의 경우 (1)의 풀이는 $\ln x=kx$ 자체로 분석하면 **"접선 문제"**가 되고 $\frac{\ln x}{x}=k$ 로 분석하면 **"그래프의 개형 문제"**가 된다.

STEP2 문제도 마찬가지로 $x^3-3x^2+1=mx+2$ 자체로 분석하면 **"접선 문제"**가 되었고 $x^2-3x-\frac{1}{x}=m$ 으로 분석하면 **"그래프의 개형 문제"**가 된다.

두 풀이에는 모두 각각 장단점이 있다. 접선문제로 풀게 되면 접선을 찾아야 한다는 단점이 있고 교점의 개수가 명확하게 눈에 안 들어오는 경우가 있기 때문에 어느 정도 직관을 동원해서 교점의 개수를 판단해야 한다. 3) **하지만 그래프의 개형으로 문제를 풀게 되면 그래프의 개형을 그리는 것이 조금 더 어려워지고 교점의 개수는 명확하게 알 수 있다.** 따라서 **두 풀이 모두 숙지해두고 상황에 따라 풀이를 잘 선택하는 능력을 길러야 한다.**

1) $x=0$은 대입해보면 절대 근이 될 수 없다.

2) 두 함수 x^2-3x, $-\frac{1}{x}$의 그래프가 함수 $x^2-3x-\frac{1}{x}$의 그래프를 그리기 위한 보조선이라고 생각하면 된다.

3) 실제로 STEP2의 문제에 대하여 접선 단원에서 푼 풀이를 보면 변곡점에서 접할 때 교점이 계속 1개라는 것을 논리적으로 판단하는 것은 힘든 일이다. 어느 정도의 직관에 동원된다.

Annotation

마지막으로 다음 몇 가지 함수들에 대하여 **도함수의 부호에 집착하는 연습**을 하고 문제로 넘어가도록 하자.

다음 함수의 도함수를 구해서 x값에 따른 부호를 조사하시오.

(1) x^2e^x

(2) $x\sqrt{4-x^2}$

(3) $\dfrac{x-1}{(x-1)^2+1}$

(4) $x\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+1}$

(5) $\dfrac{1}{2}x-\ln(x^2+1)$

(6) $\dfrac{\ln x}{x^2}$

(7) $x\sqrt{10-x}$

(1) $2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+2x)$이므로 e^x가 아닌 이차함수 x^2+2x로 도함수의 부호를 판정하면서 원함수의 그래프를 그리면 된다. 즉, 핵심은 이차함수 x^2+2x

(2) $\sqrt{4-x^2}+\dfrac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}(2-x^2)$ → $2-x^2$의 부호 조사

(3) $\dfrac{(x-1)^2+1-2(x-1)^2}{\{(x-1)^2+1\}^2}=\dfrac{2x-x^2}{\{(x-1)^2+1\}^2}$ → $-x^2+2x$의 부호 조사

(4) $\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+1}+\dfrac{x(x-2\sqrt{2})}{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+1}}$

$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+1}}\right)(2x^2-6\sqrt{2}x+9)$ → $(\sqrt{2}x-3)^2$의 부호 조사[1]

1) $2x^2-6\sqrt{2}x+9$
$=(\sqrt{2}x-3)^2$

기본개념완성

Annotation

(5) $\frac{1}{2}-\frac{2x}{x^2+1}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(x^2-4x+1) \rightarrow x^2-4x+1$의 부호조사

(6) $\frac{x-2x\ln x}{x^4} \rightarrow x(1-2\ln x)$의 부호조사

(7) $\sqrt{10-x}+\frac{-x}{2\sqrt{10-x}}=\left(\frac{1}{2\sqrt{10-x}}\right)(20-3x) \rightarrow 20-3x$의 부호조사

위의 문제풀이에서 볼 수 있듯이 **아무리 복잡한 함수가 출제되더라도 부호에 집착하면 반드시 원함수의 증감을 파악할 수 있게 출제됨을 명심**하자.

도함수에서 중요한 것은 도함수 자체의 그래프의 개형이 아니라 부호이다.

초월함수의 그래프의 개형을 그리는 방법

① 함수 $f(x)$의 형태를 보고 사칙연산이나 대입, 합성함수 등을 통해 대략적인 그래프의 개형만 추론한다.

② 도함수 $f'(x)$를 구한다.

③ $f'(x)>0$인 구간에서는 $f(x)$가 증가, $f'(x)<0$인 구간에서는 $f(x)$가 감소한다는 성질을 활용해서 원함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 더 정확히 그린다.

$\rightarrow$ 도함수에서 중요한 것은 도함수의 그래프가 아니라 도함수의 부호이다.

기본예제

CP를 교과서 기본 예제에 적용해보는 단계, 다음 단계인 기출문제에서 같은 원리를 적용하는 연습을 해야 한다.

CP 01	미분가능의 정의에 따라 미분가능성을 확인하라.
CP 02	다양한 미분방법을 완벽하게 숙지하라.
CP 03	접선 문제는 모든 점에서의 접선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$을 도입하라.
CP 04	초월함수의 그래프의 개형은 기본연산과 미분을 활용하라.

01 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=e^x+1$ $(0,\ 2)$

(2) $y=\sin x$ $(\pi,\ 0)$

02 다음 곡선에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=e^{x-1}$

(2) $y=\ln x$

03 다음 주어진 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ $(1,\ 0)$

(2) $y=e^x$ $(0,\ 0)$

Annotation

정답 및 첨언

01

(1) 정답: $y=x+2$

: $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

에서 $(t,\ f(t))=(0,\ 2)$

이고 $f'(0)=1$이므로

$y=x+2$

(2) 정답: $y=-x+\pi$

02

(1) 정답: $y=x$

: $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

에서 $f'(t)=1$이므로

$e^{t-1}=1$이다. 즉 $t=1$

따라서 $y=(x-1)+1$,

$y=x$이다.

(2) 정답: $y=x-1$

03

(1) 정답: $y=-4x+4$

: $y=f'(t)(x-t)+f(t)$은

$y=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)+\dfrac{1}{t}$이다.

$(1,\ 0)$을 대입하고 정리하면

$1-t=t$에서 $t=\dfrac{1}{2}$이다.

대입하면 $y=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+2$

에서 $y=-4x+4$

(2) 정답: $y=ex$

기본개념완성

Annotation

04 방정식 $x^2e^x = k$의 실근이 3개일 때, 실수 k의 범위를 구하시오.

05 함수 $h(x)=\begin{cases} \ln x & (x \geqq 1) \\ ax+b & (x<1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

06 방정식 $|x|=|x^2+1|k$의 실근이 2개일 때, k의 값을 구하시오.

정답 및 첨언

04

정답: $\left(0,\ \frac{4}{e^2}\right)$

: 미분하기 전에 x^2과 e^x의 곱하면서 그래프의 개형을 대충 그려놓은 후 미분하는 것이 좋다.

05

정답: 0

06

정답: $\frac{1}{2}$

: 함수 $\left|\frac{x}{x^2+1}\right|$의 그래프를 그리면 된다.

공부방향 체크

Annotation

① 교과서 개념을 완벽하게 공부했는가?

먼저 여기서 공부하는 Critical Point는 교과서 개념 중 수능에 나오는 핵심 개념을 설명한 것이라 할 수 있다.[1] 하지만 교과서 개념은 모두 출제 범위이므로 반드시 해당 단원의 교과서의 개념을 공부하고 문제도 모두 풀어보도록 하자.
그 후 Critical Point를 공부하면 총 정리가 될 것이다.

② 미적분1의 개념을 공부했는가?

미적분1의 범위에 해당하는 사이값/평균값의 정리나 다항함수, 연속성, 미분가능성 등등은 모두 미적분2에 함께 출제가 될 수 있음을 명심하자.
이 단원을 공부할 때,

'미적분1 교과서의 미분법' **'미적분2 교과서의 미분법'**

을 먼저 공부한 후에 Critical Point를 공부하면 된다.

③ 다음 페이지부터 나올 기출문제에 대한 공부 방법

먼저 해설지를 보지 말고 스스로 문제를 모두 풀어보도록 하자.

첫 번째, 맞은 문제라도 조금은 부정확했거나, 약간의 논리적 비약이라도 있는 풀이가 있다면 해설을 참조하여 본인의 풀이를 완성하도록 하자.[2]

두 번째, 틀린 문제들의 경우 다시 한 번 고민해서 모두 풀어보자.
그 이후
'미적분1 교과서의 미분법' **'미적분2 교과서의 미분법'** **'Critical Point'**
를 완전히 복습한 후에 다시 한 번 틀린 문제들을 고민해서 풀어보자.

세 번째, 그래도 안 풀리는 문제들이 만약 반을 넘어간다면 해설을 보고 모든 문제의 풀이를 이해하고 그 풀이에 어떤 개념이 사용되었는지 하나씩 확인하고 해설까지 완벽하게 공부하도록 하자.
틀린 문제가 많지 않다면 틀린 그대로 두고 다음 페이지로 넘어가서 공부를 계속 진행하면 된다. 나중에 전 단원 공부를 끝낸 후 다시 미분법을 공부할 때 풀어보면 된다.[3]

네 번째, 위의 방법을 3~4번 반복하고도 안 풀리는 문제는 해설을 보고 모든 문제의 풀이를 이해하고 그 풀이에 어떤 개념이 사용되었는지 하나씩 확인하고 해설까지 완벽하게 공부하도록 하자.

1) 거의 대부분의 문제는 CP에서 출제가 되겠지만 교과서 전체의 흐름의 중요성과 조금은 지엽적인 개념 또한 출제될 가능성을 생각할 때, 반드시 공부해야 한다.

2) 해설의 [스피드 해법]은 [특강]을 공부한 후에 봐도 충분하다. 그 이후로 미뤄두자.

3) 다른 단원을 공부하면서도 계속해서 수학 실력이 향상되기 때문에 분명히 풀리는 문제 숫자가 늘어날 것이다.

Annotation

④ 기출문제 이후에 나올 [수능특강]에 대한 공부 방법

수능특강의 경우 일반화된 정리들이 많이 나오는데 **절대로 이 공식을 외우는 방향으로 공부해서는 안 된다.**[1] 그 정리들을 Critical Point 및 **교과서**의 개념으로 설명해나가는 과정 자체가 공부가 되는 것이라고 생각하면 된다.
즉, 그렇게 복습해나가면서 만약 그 결과과 외워지면 활용하면 되는 것이고,
안 외워지면 그걸 설명해본 자체가 훌륭한 공부가 된 것이다.[2]

1) 가끔 공식 다 외웠는데 적용이 안 된다고 질문하는 분들이 있는데... 제발 그러지 맙시다.

2) 한마디로 말하면
억지로 외울 필요 없음!

⑤ [심화특강] 및 [논술문제] 대한 공부 방법

① ~ ④ 까지만 수능 공부라고 생각하면 된다. ④까지 3회독 이상하여 완벽하게 마스터한 것이 아니라면 심화특강과 논술문제는

처다보지도 말라!

단, 논술시험이 가까워졌다면 우겨서라도 논술기출을 봐야하는데, 결국 ① ~ ④에서 쌓은 기본 실력이 없다면 공부가 쉽지 않을 것이다. 따라서 현재 일차적 목표는
① ~ ④ 마스터임을 명심하자.

물론 나중에 심화특강을 공부하게 되면 수능특강과 마찬가지로 공식을 외우는 방향이 아닌 정리를 설명해나가는 방식으로 공부를 해야 한다. 결국 수리논술은 결과가 아닌 풀이과정을 채점하는 시험임을 명심하자.

⑥ 극대의 정의

극대의 정의

$x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다 하고, 그때 $f(a)$를 극댓값이라 한다.

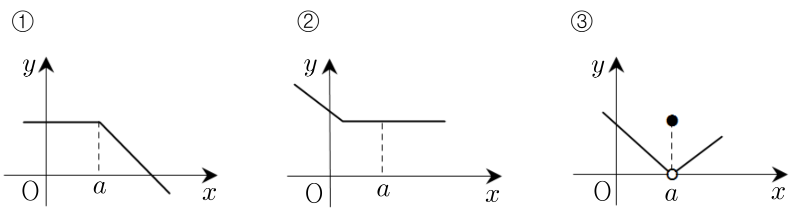
교육과정이 개정되면서 위와 같이 극대의 정의가 바뀌었다.[3] 하지만 극대를 판정할 때에는 다음과 같은 명제를 활용하는 경우가 대부분일 것이다.

3) 개정전 정의는 몰라도 된다.

극대의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

주의해야할 상황 정리: 다음 그림과 같은 함수들도 $x=a$에서 극대가 된다.[4]



4) ②의 경우 극대와 극소 모두 된다. 또한 다음 함수도 보자.
④ 상수함수의 경우 모든 점에서 극대, 극소가 된다.
② 함수 $[x]$ 또한 정의를 잘 생각해보면 모든 점에서 극값을 갖는다.

기출예제 & 기출문제

예제 01 초월함수의 개형

함수 $f(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(f\circ f)(x)$$

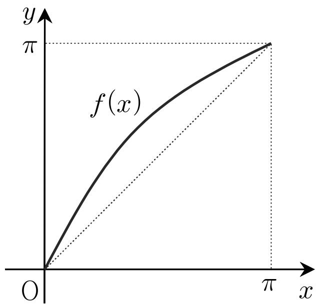
로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2008]

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 개구간 $(0,\pi)$에서 위로 볼록하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(0,\pi)$에서 증가한다.
ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 x가 개구간 $(0,\pi)$에 존재한다.

[수능적 해법]

$f(x)=(x)+(\sin x)$이므로 x의 그래프와 $\sin x$의 그래프를 더한다고 생각해서 대략적인 그래프를 그리고 시작하자.
구간 $[0,\pi]$에서 기울기가 2에서 0까지 감소하는 형태임을 쉽게 알 수 있다.[1)]

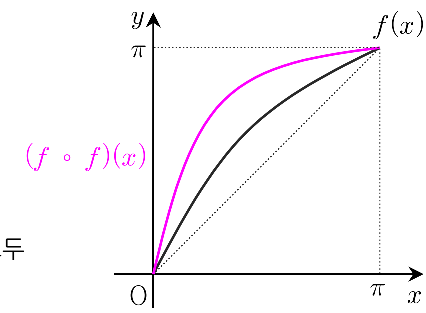


ㄱ. 위로 볼록을 묻기 때문에 주어진 함수를 미분하면 $f'(x)=1+\cos x$가 된다. 여기서 $f'(x)$가 감소함수면 위로 볼록이 된다.[2)]
구간 $(0,\pi)$에서 $f'(x)$는 감소한다. 따라서 위로 볼록이 된다. (참)
ㄴ. 구간 $(0,\pi)$에서 $f(x)$는 양수, $f'(x)$또한 양수이다. 또한 $(0,\pi)$에서 $f(x)$의 치역 또한 $(0,\pi)$이므로 $f'(f(x))$도 양수이다. 따라서 $g'(x)=f'(f(x))f'(x)>0$이므로 $g(x)$는 구간 $(0,\pi)$에서 증가한다. (참)
ㄷ. $f(0)=0$, $f(\pi)=\pi$임을 그래프에서 쉽게 알 수 있는데, 마찬가지로 $g(0)=f(f(0))=f(0)=0$, $g(\pi)=f(f(\pi))=f(\pi)=\pi$이므로 평균값의 정리에 의해서 참이다. (참)

[정답] ㄱ,ㄴ,ㄷ

[스피드 해법]

① $(+)$함수 그리기로 $f(x)=x+\sin x$의 그래프를 그린다.
② 합성함수에서 접선의 기울기 곱의 원리에 따라 합성함수의 그래프는 위의 그림과 같이 된다.
이렇게 그래프만 완성하고 나면 ㄱ,ㄴ,ㄷ 모두 참임을 알 수 있다.



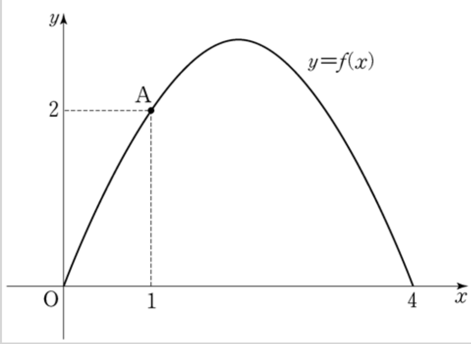
1) 함수를 더할 때 접선의 기울기도 같이 더해진다.
매우 간단한 그래프이므로 더하기 함수 그리기로 일단 그래프를 그려두고 시작하는 것이 좋다.

2) 수능에서 아래로 볼록, 위로 볼록을 판정할 때 이계도함수를 구하는 방법도 있지만 대부분 도함수의 증가, 감소를 판정하면 된다.

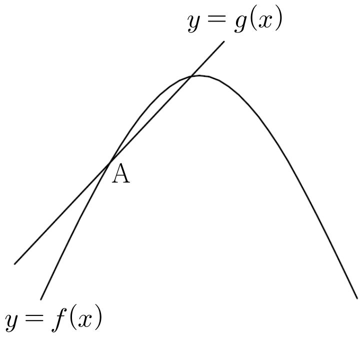
3) 스피드 해법의 경우 수능특강 및 심화특강까지 공부한 후에 이해할 수 있는 풀이라 생각하면 된다. 즉, 지금은 그냥 넘어가도록 하자.

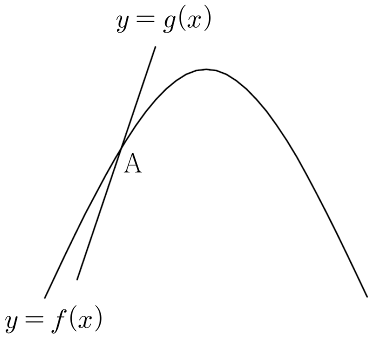
예제 02 접선의 방정식

닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$의 그래프가 그림과 같고, 직선 $y=g(x)$가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(1, 2)$를 지난다. 일차함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0, 4]$에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은? [2016.6]

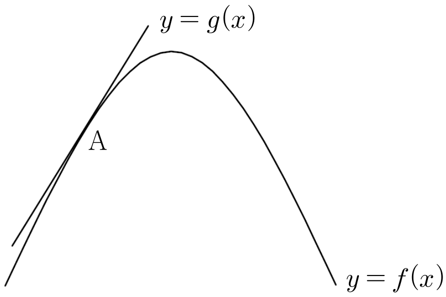


[수능적 해법1]





위의 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(1, 2)$를 지나는 직선 $y=g(x)$의 기울기를 바꾸어 가면서 그려보자. 그러면 위의 그림과 같이 접선이 아닐 때에는 반드시 $f(x)>g(x)$인 구간이 생기는 것을 알 수 있다. 따라서 곡선 $y=g(x)$는 점 A를 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 되어야 부등식 $f(x)\le g(x)$을 만족시킨다.[1)]



접선의 방정식은 $g(x)=f'(1)(x-1)+2$이므로 $f'(1)$을 구하자.

$f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4}x$에서 $f'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로

$g(x)=\frac{\pi}{2}(x-1)+2=\frac{\pi}{2}x+2-\frac{\pi}{2}$이다. $g(3)=\pi+2$

[정답] $\pi+2$

1) 이런 판단은 그래프를 통해 판단한 직관이라 할 수 있다.

Annotation

[수능적 해법2]

주어진 부등식을 $f(x)-g(x)\le 0$라 하면 함수 $f(x)-g(x)$의 최댓값이 0보다 작거나 같으면 되는 것을 알 수 있다. $g(x)=m(x-1)+2=mx-m+2$이므로

$h(x)=f(x)-g(x)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x-mx+m-2$에서 $h(x)$의 최댓값은

양 끝점과 극대인 점 중 제일 큰 값이 되는 것을 알 수 있다.

그런데 $h(1)=0$이므로 $x=1$에서 극댓값을 가져야하는 것을 알 수 있다.[1)]

즉, $h'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4}x-m$에서 $h'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4}-m=0$에서

$m=\frac{\pi}{2}$임을 알 수 있다. 이제 [수능적 해법1]과 마찬가지로 계산하면

$g(x)=\frac{\pi}{2}(x-1)+2=\frac{\pi}{2}x+2-\frac{\pi}{2}$에서 $g(3)=\pi+2$이다.

[수능적 해법1]은 충분히 그래프로 추론할 수 있는 풀이이고,

[수능적 해법2]는 논리적으로 비약이 없는 풀이라 할 수 있다.

두 풀이 모두 공부해두도록 하고 **[수능적 해법1]**에서 추론하여 **[수능적 해법2]**의 논리로 마무리 짓는 풀이도 훌륭하다.[2)]

다음과 같은 명제도 스스로 증명해보고 넘어가자.[3)4)]

① 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록일 때, 한 접선 $g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$에 대하여 $f(x)\le g(x)$이다.

② 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록일 때, 한 접선 $g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이다.

1) 양 끝점인 0, 4가 아닌 1에서 최댓값을 가졌으므로 1에서 극대가 되는 것을 알 수 있다.

2) 어려운 문제의 경우 직관으로 시작해서 논리로 마무리 짓는 형태의 문제가 많다. 수능에서는 답만 내면 되지만 공부할 때에는 직관으로 답을 냈더라도 논리적으로 마무리하는 습관을 들여야 근본적인 수학실력이 향상될 것이다.

3) ①에서 위로 볼록이므로
$f''(x)\le 0$, $g''(x)=0$이다.
즉,
$h(x)=f(x)-g(x)$, $h(t)=0$
$h'(x)=f'(x)-g'(x)$, $h'(t)=0$
$h''(x)=f''(x)-g''(x)$
$=f''(x)\le 0$
임을 활용하면 증명할 수 있다.

4) **[수능적 해법1]**의 경우 결국 이 명제를 직관적으로 추론해서 풀었다고 생각하면 된다. 하지만 공부할 때에는 논리적인 풀이까지 모두 해보려고 노력해야 한다.

01 양수 a에 대하여 폐구간 $[-a,\ a]$에서 함수

$$f(x)=\frac{x-5}{(x-5)^2+36}$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m=0$이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하시오. [2006]

02 실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? [2012]

01

초월함수의 그래프를 그릴 때 사칙연산과 미분을 모두 활용해서 그려주면 된다. 사칙연산을 통해 대략적인 개형을 그리고 미분을 통해 엄밀하게 완성해야 한다.

02

접선으로 푸는 풀이와 m을 제외한 모든 항을 우변으로 옮긴 후 푸는 풀이를 모두 해보도록 하자.