

뇌안에서 사르르 녹는 문제들과 감미로운 해설 한 잔-

고오급 30제



※ 본 문서에 대한 저작권은 [Team 나승]에 있으며, 이 문서의 전체 또는 일부에 대하여 상업적 목적의 무단 복제와 디지털 상에서의 공유 및 재배포를 금합니다. 이를 위반할 경우 법적 책임을 물을 수 있습니다.

제 2 교시

수학 영역 (가형)

가 형

성명

수험 번호

5지선다형

1. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 를 만족하는 α, β 에 대하여

$(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$ 일 때, $\frac{20(\alpha + \beta)}{\pi}$ 의 값은? [3점]

- ① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

2. 좌표평면에 두 원

$$C_1 : x^2 + y^2 = 16, \quad C_2 : (x - 8)^2 + y^2 = 4$$

가 있다. 두 원 C_1, C_2 중 한 원과는 내접하고 다른 한 원과는 외접하는 임의의 원 C_3 의 중심 P에 대하여 점 P의 자취가 나타내는 도형을 T 라고 하자. 직선 $y = m(x - 4)$ 가 T 와 만나지 않기 위한 양의 실수 m 의 최솟값은? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ 1

3. 집합 $X = \{2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ 로의 함수 중에서 임의로 선택한 한 함수를 $f(x)$ 라 할 때, $f(x_1) = nx_1$ (단, n 은 자연수)을 만족시키는 $x_1 \in X$ 인 x_1 가 적어도 1개 존재할 확률은? [4점]

- ① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{101}{125}$ ③ $\frac{103}{125}$ ④ $\frac{21}{25}$ ⑤ $\frac{22}{25}$

1. 답 : ②

[출제의도] 탄젠트함수의 덧셈정리를 활용할 수 있다.

[난이도] ★★★★★

 $(1 + \tan\alpha)(1 + \tan\beta) = 2$ 을 전개하여 정리하면

$$1 + \tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha\tan\beta = 2$$

$$\therefore \tan\alpha + \tan\beta = 1 - \tan\alpha\tan\beta$$

이때, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 의 범위에서 $\tan\alpha + \tan\beta < 0$ 이고,따라서 $(1 - \tan\alpha\tan\beta) \neq 0$ 이므로 양변을 $1 - \tan\alpha\tan\beta$ 으로 나누면

$$1 = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \tan(\alpha + \beta) = 1$$

이때, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 이므로 $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$ 이고 이범위에서 $\tan(\alpha + \beta) = 1$ 을 만족하는 $\alpha + \beta$ 의 값은 $\frac{5}{4}\pi$ 가

유일합니다.

따라서 구하고자 하는 $\frac{20(\alpha + \beta)}{\pi}$ 의 값은 25입니다.

※ 항상 삼각함수를 다루는 문제에서는 각의 범위를 확인하는 습관을 가져야 합니다.

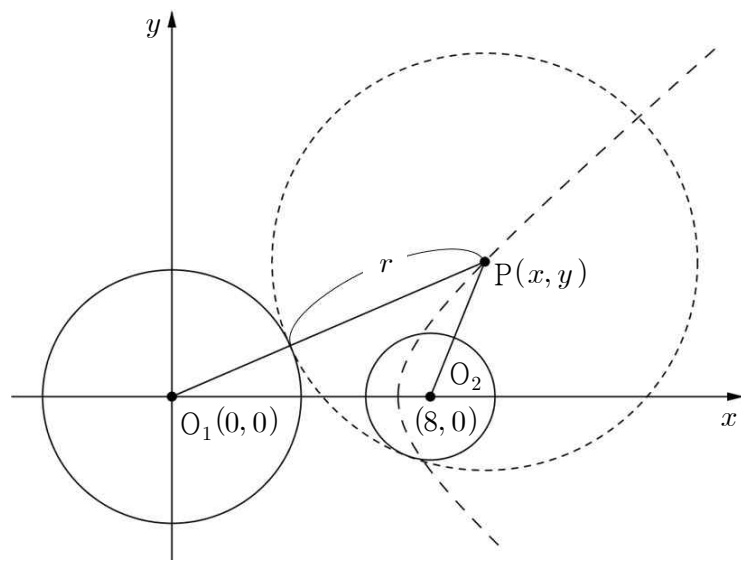
2. 답 : ③

[출제의도] 이차곡선의 정의를 활용하여 문제를 해결한다.

[난이도] ★★★★★

원 $C_1 : x^2 + y^2 = 16$ 의 중심을 $O_1(0, 0)$,원 $C_2 : (x - 8)^2 + y^2 = 4$ 의 중심을 $O_2(8, 0)$,원 C_3 의 중심 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라고 합시다.

이때 문제의 조건에 의해 다음 두 가지 경우를 생각할 수 있습니다.

i) 원 C_3 가 C_1 에 외접하고 C_2 에 내접하는 경우ii) 원 C_3 가 C_1 에 내접하고 C_2 에 외접하는 경우먼저, 원 C_3 가 C_1 에 외접하고 C_2 에 내접하는 경우를 살펴봅시다.원 C_3 의 반지름의 길이를 r 이라고 할 때, 세 원의 위치 관계는 위 그림과 같고 중심 P에 대하여

$$\overline{PO_1} = r + 4 \quad (\because \text{외접}), \quad \overline{PO_2} = r - 4 \quad (\because \text{내접})$$

마찬가지로 원 C_3 가 C_1 에 내접하고 C_2 에 외접하는 경우는

$$\overline{PO_1} = r - 4 \quad (\because \text{내접}), \quad \overline{PO_2} = r + 4 \quad (\because \text{외접})$$

따라서 세 원의 관계에서 $|\overline{PO_1} - \overline{PO_2}| = 6$ 가 항상 성립합니다.이때, 두 점 O_1, O_2 에서 점 P까지 이은 선분의 길이의 차가 6으로 일정하므로 점 P가 나타내는 자취의 방정식은 두 점 $O_1(0, 0), O_2(8, 0)$ 을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인쌍곡선입니다.

$$\therefore T: \frac{(x-4)^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

이때, 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}(x-4)$ 이고 기울기가 양수인 직선 $y = m(x-4)$ 가 T와 만나지 않기 위해선 직선의기울기가 쌍곡선의 점근선인 $y = \frac{\sqrt{7}}{3}(x-4)$ 의 기울기보다 같거나커야합니다. 따라서 양의 실수 m 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ 입니다.

3. 답 : ②

[출제의도] 여사건을 활용하여 문제를 간단히 해결한다.

[난이도] ★★★★★

여사건을 활용하여 문제를 해결하는 것이 편리합니다.

$X = \{2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ 로의 함수의 개수는

${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

또, $f(x_1) = nx_1$ (단, n 은 자연수)을 만족시키는 $x_1 \in X$ 인 x_1 가 존재하지 않기 위해서는 집합 X 의 원소들에 대하여 다음 조건을 만족해야 합니다.

i) $f(2) \neq 4, 6, 8$ 즉, $f(2) = 5$ 또는 $f(2) = 7$ (2가지)

ii) $f(3) \neq 6$

즉, $f(3) = 4$ 또는 $f(3) = 5$ 또는 $f(3) = 7$ 또는 $f(3) = 8$ (4가지)

iii) $f(4) \neq 4, 8$ 즉, $f(4) = 5$ 또는 $f(4) = 6$ 또는 $f(4) = 7$ (3가지)

따라서 $f(x_1) = nx_1$ 을 만족시키는 x_1 가 적어도 1개 존재할 확률은 전체 확률 1에서 $f(x_1) = nx_1$ 을 만족시키는 $x_1 \in X$ 가 존재하지 않을 확률을 뺀 값과 같으므로

$(f(x_1) = nx_1 \text{을 만족시키는 } x_1 \text{가 적어도 1개 존재할 확률}) = 1 - \frac{2 \times 4 \times 3}{125} = \frac{101}{125}$

* 확인 사항
○ 오타 및 오류 제보 : 오류 · 오타 제보 및 내용문의 :
판매페이지 및 이메일 문의 (team_ns15@naver.com)