

19. 상자에 12개의 공이 들어있고 각 공에는 1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적혀있다. 상자에서 하나의 공을 뽑아 공에 적힌 숫자를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 두 번 할 때, 첫 시행에서 확인한 숫자를 a , 다음 시행에서 확인한 숫자를 b 라 하자. $a+b \leq n$ 일 때 $ab < 6$ 일 확률을 p_n 이라 할 때, 다음은 $\sum_{k=7}^{12} p_k$ 의 값을 구하는 과정이다.

$ab < 6$ 을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 합의 최댓값은

(가) 이다.

따라서 $n \geq 7$ 일 때, $ab < 6$ 를 만족시키는 a, b 는 $a+b \leq n$ 도 항상 만족시킨다.

$a+b \leq n$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 음이 아닌 정수 c 에 대하여 $a+b+c=n$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 같고, 이러한 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 (나) 이다.

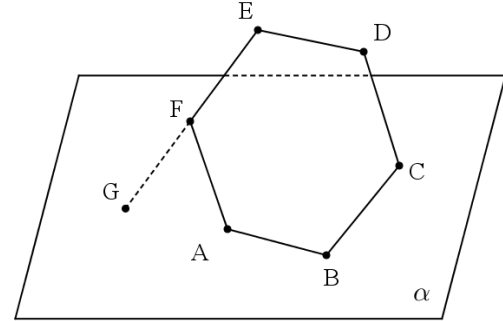
따라서 $p_n =$ (다) 이고, $\sum_{k=7}^{12} p_k = \frac{5}{3}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 숫자를 p 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $f(2p) \times g(p)$ 의 값은? [4점]

- ① 44 ② 40 ③ 36 ④ 32 ⑤ 28

20. 그림과 같이 길이가 2이고 평면 α 위에 있는 선분 AB를 한 변으로 갖는 정육각형 ABCDEF가 있다.

직선 AF와 평면 α 사이의 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이고 직선 EF가 평면 α 와 만나서 생기는 점을 G라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보기>

- ㄱ. $\overline{FG} = 2$
 ㄴ. 삼각형 AFG의 평면 α 로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{2}$ 이다.
 ㄷ. 평면 α 위의 점 P가 $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{GF} = 0$ 을 만족시킬 때, \overline{AP} 의 최솟값은 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제자의 한마디

보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.

확률문제에서 중복조합을 사용할 경우, 근원사건의 확률에 대한 고민을 한 후 사용해준다.

19. $ab < 6$ 를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b) 은
 $(5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1)$
 로 총 10개이고, $(5, 1), (1, 5)$ 일 때 $a+b$ 는 최댓값 6을
 갖는다.
 $\therefore p=6$

a, b 는 자연수이고, c 는 음이 아닌 정수이므로
 $a=a'+1, b=b'+1$ 로 두면 $a+b+c=a'+b'+c+2=n$ 에서
 $a'+b'+c=n-2$ 이다.

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c) 의 개수는
 ${}^3H_{n-2} = {}^nC_{n-2} = {}^nC_2$ 이다.

$$\therefore f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

조건부확률에 의하여

$$g(n) = \frac{10}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{20}{n(n-1)}$$

이다. (10은 $ab < 6$ 를 만족시키는

자연수 순서쌍 (a, b) 의 개수)

따라서 $f(2p) \times g(p) = 44$ 이다.

20. ㄱ. 정육각형이므로 선분 AB, CF, DE 가 모두 평행하므로
 점 F 에서 평면 α 까지의 거리는 점 E 에서 평면 α 까지의
 거리의 절반이다. 따라서 직선 EF 와 평면 α 위에 있는 점
 G 에 대하여 선분 EG 의 중점이 F 임을 알 수 있다. 즉
 $\overline{FG} = \overline{FE} = 2$.

ㄴ. $\overline{FG} = \overline{FA} = 2$ 이고 $\angle GFA = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$ 이므로 삼각형
 FGA 은 정삼각형이다. 따라서 F 에서 선분 AG 까지의 거리가
 $\sqrt{3}$ 이다. 또한 직선 AF 와 평면 α 사이의 예각의 크기가
 $\frac{\pi}{6}$ 이므로 점 F 에서 평면 α 까지의 거리는 $2\sin\frac{\pi}{6} = 1$ 이다.
 위의 결과에 따라 삼각형 AFG 와 평면 α 의 사이각을 θ 라
 하면, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

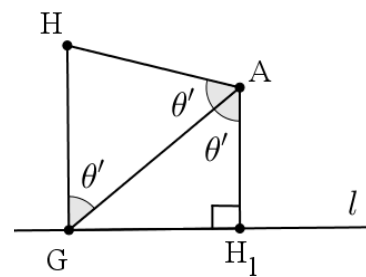
따라서 삼각형 AFG 의 평면 α 로의 정사영의 넓이는

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \right) = \sqrt{2}$$

이다.

ㄷ. $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{GF} = 0$ 에서 두 직선 GP, GF 가 수직임을 알 수
 있다. 점 F 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H 라 하면,
 삼수선의 정리에 의하여 직선 GH, GP 역시 수직이다.

ㄴ.에서 구한 정보들을 이용하면 $\overline{HG} = \overline{HA} = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ 이고,
 이를 그림으로 그리면 다음과 같다.



(직선 l 은 직선 GP 이고 \overline{AP} 의 최솟값은 $\overline{AH_1}$.)

$\overline{AG} = 2$ 이므로 이등변삼각형 HGA 에서 $\cos\theta' = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이고,

$$\text{따라서 } \overline{AH_1} = \overline{AG} \cos\theta' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

출제자의 한마디

점 G 는 직선 AB 위의 점이다.
 두 평면 위에 동시에 있는 점들은 하나의 직선을 이루는데,
 지금 이 문제에 있는 모든 점들은 정육각형을 포함하는 어느
 평면 β 위에 있다. 즉, A, B, G 는 두 평면 α, β 위에 있으므로,
 이 세 점은 한 직선(두 평면의 교선) 위에 있다.

19. 상자에 12개의 공이 들어있고 각 공에는 1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적혀있다. 상자에서 하나의 공을 뽑아 공에 적힌 숫자를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 두 번 할 때, 첫 시행에서 확인한 숫자를 a , 다음 시행에서 확인한 숫자를 b 라 하자. $a+b \leq n$ 일 때 $ab < 6$ 일 확률을 p_n 이라 할 때, 다음은 $\sum_{k=7}^{12} p_k$ 의 값을 구하는 과정이다.

$ab < 6$ 을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 합의 최댓값은

(가) 이다.

따라서 $n \geq 7$ 일 때, $ab < 6$ 를 만족시키는 a, b 는 $a+b \leq n$ 도 항상 만족시킨다.

$a+b \leq n$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 음이 아닌 정수 c 에 대하여 $a+b+c=n$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 같고, 이러한 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 (나) 이다.

따라서 $p_n =$ (다) 이고, $\sum_{k=7}^{12} p_k = \frac{5}{3}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 숫자를 p 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $f(2p) \times g(p)$ 의 값은? [4점]

- ① 44 ② 40 ③ 36 ④ 32 ⑤ 28

20. $x=a$ 에서 미분가능한 함수 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & (x < a) \\ mx + n & (x \geq a) \end{cases}$ 가

극대인 점이 존재하지 않을 때, <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $m = 3a^2 - 3$

ㄴ. $a < -1$

ㄷ. $f'(2) = 9$ 이면 $f(0) = 16$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. $ab < 6$ 를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b) 은
 $(5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1)$
 로 총 10개이고, $(5, 1), (1, 5)$ 일 때 $a+b$ 는 최댓값 6을
 갖는다.
 $\therefore p=6$

a, b 는 자연수이고, c 는 음이 아닌 정수이므로
 $a = a' + 1, b = b' + 1$ 로 두면 $a + b + c = a' + b' + c + 2 = n$ 에서
 $a' + b' + c = n - 2$ 이다.

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c) 의 개수는

$${}_3H_{n-2} = {}_n C_{n-2} = {}_n C_2 \text{이다. } \therefore f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{조건부확률에 의하여 } g(n) = \frac{10}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{20}{n(n-1)} \text{이다.}$$

(10은 $ab < 6$ 를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b) 의 개수)
 따라서 $f(2p) \times g(p) = 44$ 이다.

출제자의 한마디

보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.

확률문제에서 중복조합을 사용할 경우, 근원사건의 확률에 대한 고민을 한 후 사용해주시.

20.

ㄱ.

$x=a$ 에서 미분가능해야 하므로 $3a^2-3=m$ 임을 알 수 있다.

(참)

ㄴ.

미분가능한 함수에서 극대인 점의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호변화가 생기게 된다. x^3-3x 는 원래 $x=-1$ 에서 극대인 삼차함수이므로, $x < a$ 범위에 점 $(-1, f(-1))$ 이 포함되지 않도록 a 값을 설정해줘야 한다.

따라서 $a < -1$.

<주의>

그렇다면 $a=-1$ 일 때는?

함수 $f(x)$ 를 완성시켜보면 $a=-1$ 일 때 $m=0$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & (x < -1) \\ 2 & (x \geq -1) \end{cases}$$

(미분가능이면 연속이기 때문에 $n=2$)

이므로 상수함수 구간이 생긴다. 상수함수는 모든 점에서 극대, 극소이므로 $a \neq -1$ 이다.

* '상수함수는 모든 점에서 극대, 극소이다.' 라는 문장이 이해가 안되거나 생소하다면 지금 now 즉시 바로 미적분 I 교과서의 극대와 극소의 정의를 읽어보아야 한다.

ㄷ.

$a < -1$ 이므로 $x=2$ 는 $x \geq a$ 의 범위에 포함된다.

$$f'(2) = 9 = m = 3a^2 - 3 \text{이므로 } a = -2 (\because a < -1)$$

또한 $x=a$ 에서 연속이어야 하므로 $a^3 - 3a = ma + n$ 이고, $m = 3a^2 - 3$ 이므로 대입하여 정리하면 $n = -2a^3 = 16$ 이다.

따라서 $f(0) = n = 16$ 이다.