

# 2013학년도 포카칩 모의평가(가형) 정답 및 해설

## 2012년 포카칩 Team 소개

### 출제자

이덕영 (연세대학교 수학과) 외 1인

### 강사 검토위원

권대영 선생님 (現 목동 한림학원 강사)

박주혁 선생님 (現 메가스터디 재수정규반 강사)

### 학생 검토위원

가철순 (연세대학교 수학과)

곽호연 (서울대학교 수학교육과)

이상민 (서울대학교 기계항공공학부)

이청명 (서울대학교 물리천문학부)

이현기 (연세대학교 화공생명공학부)

정범진 (세명대학교 한의예과)

최소망 (중앙대학교 영어교육과)

허혁재 (연세대학교 컴퓨터과학과)

## 해설을 시작하면서...

벌써 3년째입니다. 처음에는 몇몇 사람들이 재미로 풀어보던 것이 어느새 많은 이들의 호응을 얻어 정식으로 출판되더니, 최상위권 학생들이 널리 풀어보는 모의고사가 되었습니다. 분에 넘치는 평가를 남겨주시는 마니아들도 생겼습니다. 시중에서 가장 좋다는 평가도 있었고, 감히 평가원 모의평가와 비교하는 분들도 있었습니다.

이 사실이 놀랍고 고마우면서도, 다른 한 편으로는 무거운 책임을 느꼈습니다. 이런 기대에 보답할 수 있는 책을 내기 위해 오랜 시간을 고심하고 노력했습니다. 포카칩 모의평가의 장점과 단점으로 지적받던 부분을 철저히 검토해 모든 면에서 더 좋은 책을 만들어내려고 했습니다.

모든 시험 준비는 나를 제대로 아는 것으로부터 시작합니다. 자신의 위치가 어느 정도인지, 점수를 올리려면 어느 부분을 더 공부해야 하는지, 내가 문제를 푸는 습관과 실수가 어떻게 연결되어 있는지, 시험만 보면 당황하는 습관을 갖고 있지는 않은지. 그런데 이런 것들은, 실전과 최대한 가까운 상황에서 시험을 치러야만 제대로 파악할 수 있습니다.

수능을 준비하면서, 평가원 모의고사를 제외하면 실전과 가까운 모의고사가 없었습니다. 시중 모의고사는 수능시험을 제대로 치러보지 않은 이들이 만들기 때문에 이런저런 문제점들을 갖고 있었습니다. 수능시험의 매뉴얼과는 동떨어졌거나, 100분 안에 도저히 풀어낼 수 없거나, 교과과정 외의 내용이 버젓이 출제되는 식이었습니다.

때문에 많은 시행착오를 거쳐야 했습니다. 수능시험에 나오지 않을 내용을 중요한 것인 양 열심히 공부하기도 했고, 수능 시험장에서 당황해서 어이없이 무너지기도 했습니다. 다른 이들도 이런 시행착오를 겪게 하고 싶지는 않았습니다. 때문에 학생들의 학습에 도움이 될 만한 모의고사를 만들겠다는 생각으로 <포카칩 모의평가>를 제작하였습니다.

<포카칩 모의평가>를 만들면서, 수험생이 시험장에서 체험하는 100분을 그대로 담아내기 위해 노력했습니다. 먼저 <포카칩 모의평가>는 교육과정을 시중에서 가장 완벽하게 반영한 모의고사입니다. 교사용 지도서와 수능출제 매뉴얼을 가지고 철저히 검토하였습니다. 3년간의 <포카칩 모의평가>에 출제했던 모든 문제들, 올해 새로 낸 문제들을 수없이 걸러냈습니다. 결국 가장 좋고, 가장 수능에 출제될 가능성이 높은 150문제만이 살아남았습니다. '마무리가 명품을 만든다'는 마음가짐으로 마무리 하나까지도 신경을 썼습니다. 평가원 표지 하나를 재현하기 위해 평가원 PDF 파일에 격자점을 세워 1mm도 틀리지 않도록 하였습니다. 심지어는 수능 시험지로 쓰이는 종이의 종류를 알아내기 위해 감사원 자료를 뒤지기도 했습니다. 문제의 표현방식, 시험지 양식 하나하나마다 신경을 쓴 흔적이 깃들어 있습니다.

수능 문제를 보면 놀랍게도 나름의 즐거움을 느낄 수 있습니다. 출제자가 수학적 아름다움과 의미, 자신만의 세계를 담아내기 위해 노력하기 때문입니다. 우리는 문제를 내면서 문항에 이런 수학적 아름다움을 담아내기 위해 노력했습니다. <포카칩 모의평가>를 풀면 퍼즐이나 퀴즈를 푸는 것과 같은 지적인 즐거움을 느낄 수 있을 것입니다.

난이도가 수능에 비해 지나치게 어렵다는 일각의 지적을 받아들여, 난이도를 최대한 현실에 맞췄습니다. 작년 수능의 난이도보다 약간 어렵지만, 아주 어렵지는 않은 수준을 유지하기 위해 노력했습니다. 표지에서 확인할 수 있는 것처럼 여러 단계의 검토과정을 거쳐 생길 수 있는 오타나 오류를 확실하게 잡았습니다.

이런 노력을 기울였기에, 독자들이 <포카칩 모의평가>를 단순한 문제집으로 받아들이다면 섭섭할 것입니다. 되도록 실전과 같은 마음가짐으로 모의고사를 풀어 주었으면 좋겠습니다. 모의고사를 풀었다고 모든 일이 끝나는 것은 아닙니다. 문제를 분석하면서 자신이 무엇이 부족한지, 시험장에서는 어떻게 풀어야 할지를 끊임없이 고민하시기를 바랍니다.

수험생에게 <포카칩 모의평가>는 좋은 수능 대비 모의고사이겠지만, 그보다는 이 책이 이를 넘어선 나름의 특별함을 갖고 기억되기를 바랍니다. 이 책을 푸는 모든 이들이 사회의 일원이 되었을 때 <포카칩 모의평가>가 수학을 통해 즐거움을 느꼈던 하나의 추억으로 남았으면 합니다.

\* 정오표는 <http://orbi.kr/core/market/>에서  
확인하실 수 있습니다.

\* 등급컷은 포카칩 모의평가 현장 응시 행사가 끝난 뒤,  
<http://orbi.kr/core/market/>에 공개하도록 하겠습니다.

주의 : 해설지의 풀이과정이 아주 친절할 것은 아닙니다. 따라서 해설지를 볼 때에는 문제풀이 아이디어를 얻는다고 생각하시고, 문제와 함께 본인이 능동적으로 풀어봐야 합니다.

# 정답 및 해설

## 1회 정답 및 해설

|       |        |         |        |        |
|-------|--------|---------|--------|--------|
| 1. ③  | 2. ④   | 3. ②    | 4. ②   | 5. ④   |
| 6. ⑤  | 7. ①   | 8. ①    | 9. ③   | 10. ②  |
| 11. ⑤ | 12. ②  | 13. ③   | 14. ②  | 15. ⑤  |
| 16. ① | 17. ①  | 18. ④   | 19. ⑤  | 20. ③  |
| 21. ④ | 22. 16 | 23. 10  | 24. 70 | 25. 19 |
| 26. 6 | 27. 20 | 28. 255 | 29. 32 | 30. 7  |

1.  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로  
 $AB - BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이다. 따라서 모든 성분의 합은 0이다.

2.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 이므로  $\overline{OP} = 5$ 이다.

3.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ 를 전개하면,  
 $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 9$ 에서  
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 6$ 이다.

4. 분모를 통분한다.

$\frac{x(x-1)+4}{x^2-1} \leq \frac{2(x+1)}{x^2-1}$ 이고, 우변을 좌변으로 이항하면

$\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \leq 0$ 이다. 따라서  $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$ 이다.

$x-1$ 을 약분할 수 있다. (단,  $x \neq 1$ )

따라서 범위는  $-1 < x \leq 2$ ,  $x \neq 1$ 이므로 2개이다.

5.  $x - \frac{\pi}{10} = t$ 로 치환하면,  $\tan 2t = -\tan t$ 이다.

좌변을 탄젠트의 덧셈정리로 풀면,  $\frac{2\tan t}{1-\tan^2 t} = -\tan t$ 이다.

(i)  $\tan t = 0$ 인 경우 :  $x - \frac{\pi}{10} = 0$ 이므로  $x = \frac{\pi}{10}$ 이다.

(ii)  $\tan t \neq 0$ 인 경우

$\frac{2}{1-\tan^2 t} = -1$ 에서  $\tan^2 t = 3$ 이다.

따라서  $t = \frac{\pi}{3}$ 이다.  $x - \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{3}$ 이므로  $x = \frac{13}{30}\pi$ 이다.

$\frac{13}{30}\pi + \frac{1}{10}\pi = \frac{8}{15}\pi$ 이다.

6. 사건 A가 일어날 확률은  $\frac{4}{6}$ 이고, 사건 B가 일어날 확률은

$\frac{1}{4}$ 이다. 두 사건 A, B는 서로 독립이므로,  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ 이다.

$P(A \cap B^c) = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ 이다.

7. 고선의 파장은  $2^{\frac{83}{12}}$ 이고, 무역의 파장은  $2^{\frac{89}{12}}$ 이다.  $\frac{P_2}{P_1} = 2^{\frac{1}{2}}$ 이다.

8.  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \lim_{x \rightarrow 1+0} f\left(3 - \frac{1}{x}\right) = f(3+0) - f(2+0) = -3$

9.  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이므로  $\tan^2 x + \cos^2 x = t$ 로 치환하면

$\tan^2 x - \sin^2 x = t - 1$ 이다. 따라서  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$ 이다.

10. 원  $O_1$ 의 넓이는  $9\pi$ 이고, 마름모  $A_1B_1C_1D_1$ 의 넓이는  $6\sqrt{3}$ 이다. 한편, 원의 중심에서 선분  $A_1B_1$ 에 수선의 발을 내리면 원  $O_2$ 의 반지름의 길이가 원  $O_1$ 의 절반이 됨을 알 수 있다.

원  $O_1$ 과 원  $O_2$ 의 길이비가 2:1이므로, 넓이비는 4:1이다.

따라서 넓이는  $(9\pi - 6\sqrt{3}) \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 12\pi - 8\sqrt{3}$ 임을 알 수 있다.

11.  $(a_4 + a_7)a_5a_6 = a_4a_5a_6 + a_5a_6a_7 = 20$ 이다.

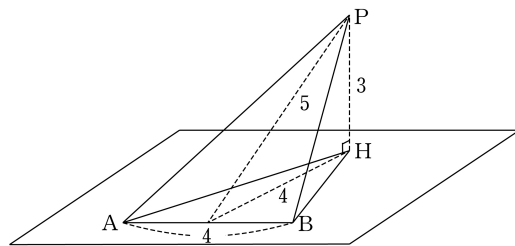
따라서 등차수열의 합에 의해  $\sum_{n=1}^8 a_n a_{n+1} a_{n+2} = 8$ 이다.

12. 변환  $f$ 는 2배짜리 닮음변환이고, 변환  $g$ 는 회전변환이다.

변환  $g$ 는 길이에 영향을 끼치지 않고, 변환  $f$ 는 길이를 2배로 한다.

따라서,  $\overline{P'Q'} = 4$ 이면  $\overline{PQ} = 2$ 이다.

13.



선분 AB의 중점을 M이라 하면,  $\overline{PM} = 5$ 이므로

삼각형 PAB의 넓이는  $\angle PMB = \theta$ 라 하면  $\frac{1}{2} \times 4 \times 5 \sin \theta$ 이다.

따라서 넓이의 최댓값은  $\theta = 90^\circ$ 일 때 10이다.

14. 이 그래프는  $f(x) = -f(-x)$  (원점 대칭)을 만족시킨다.

따라서  $f(-x) = -f(x)$ 를 대입하면  $\sqrt{2f(x)+5} = f(x)+1$ 이다.

양변을 제곱하여 정리하면  $\{f(x)\}^2 = 4$ 이므로,  $f(x) = 2$ 이다.

모든 실근의 합은  $-2$ 이다.

15.  $\neg$ . A의 역행렬이 존재하면  $AB = 2A$ 에서  $B = 2E$ 이다.

이것을  $BA = B$ 에 대입하면  $A = E$ 임을 알 수 있다.

$\perp$ .  $(AB)^2 = ABAB = ABB = 2AB$ 이고,

$(BA)^2 = BABA = BAB = 2BA$ 이다. 따라서  $AB = BA$ 이다.

$\sqsubset$ .  $(AB+BA)^2 = (AB)^2 + ABBA + BAAB + (BA)^2$ 이다.

$(AB)^2 = 2AB = 4A$ 이고,  $(BA)^2 = 2BA = 2B$ 이다.

$ABBA = ABB = 2AB = 4A$ 이고,  $BAAB = BAB = 2BA = 2B$ 이다.

따라서  $(AB+BA)^2 = 8A + 4B$ 이다.

# 정답 및 해설

16.  $H(20) = 0.9772$ 이다. 즉, 평균이 100, 표준편차가 20일 때,  $P(X \geq a) = 0.9772$ 가 되도록 하는 상수  $a$ 의 값을 구하면 된다.  $P(-2 \leq Z \leq 0) = 0.4772$ ,  $P(Z \geq 0) = 0.5$ 이므로  $a = 60$ 이다.

17.  $(2n+4)a_{n+1} - (2n+4) = (n+1)a_n - (n+1)$ 에서  $(2n+4)(1-a_{n+1}) = (n+1)(1-a_n)$ 이다.

따라서  $b_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{2} b_n$ 이다.

귀납적으로 나열하여 변변 곱하면,  $b_n = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 임을 알 수 있다.

(가)  $\times$  (나)  $= \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로  $f(4) = \frac{1}{96}$ 이다.

18. 짝수개, 홀수개만큼 뽑을 그릇을 2개씩 선택하는 경우의 수는  ${}_4C_2 = 6$ 이다.

홀수에서 1을 빼면 짝수가 된다. 그러므로 홀수개만큼 뽑을 그릇 두 종류를 먼저 하나씩 뽑아둔다면, 네 종류의 그릇을 짝수개만큼 선택해 총 8개를 뽑는 경우의 수와 동일하다. 즉 네 종류의 그릇을 중복을 허락해 4개만큼 뽑는 경우의 수와 같다.

${}_4H_4 = {}_7C_4 = 35$ 이므로,  $6 \times 35 = 210$ 이 구하는 경우의 수가 된다.

19. ㄱ.  $xe^x$ 를 미분하면  $(x+1)e^x$ 이고,  $xe^{-x}$ 를 미분하면  $(1-x)e^{-x}$ 이다.  $x > 0$ 일 때  $(x+1)e^x > 0$ 이고,  $x \leq 0$ 일 때  $(1-x)e^{-x} > 0$ 이므로  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다. ㄴ.  $(x+1)e^x$ 을 미분하면  $(x+2)e^x$ 이고,  $(1-x)e^{-x}$ 을 미분하면  $(x-2)e^{-x}$ 이다.  $(x+2)e^x$ 에 0을 대입하면 양수이고,  $(x-2)e^{-x}$ 에 0을 대입하면 음수이므로 두 번 미분한 함수의 부호는  $x=0$ 에서 바뀐다. 따라서 변곡점의 좌표는  $(0, 0)$ 이다.

ㄷ.  $g(x) = f(x) - \sin x$ 라 하자.  $x > 0$ 이면  $g(x) > 0$ 이므로  $|g(x)| = xe^x - \sin x$ 이고,  $x \leq 0$ 이면  $g(x) < 0$ 이므로  $|g(x)| = \sin x - xe^{-x}$ 이다.  $x > 0$ 이면  $|g'(0)| = 0$ 이고,  $x \leq 0$ 이여도  $|g'(0)| = 0$ 이므로 참이다. (그래프 개형을 정확히 그려 해석하여도 좋다.)

20. 선분 OP의 길이는 1이고, 선분 OQ가 각  $\theta$ 를 이등분하므로, 선분 PQ의 길이는  $\tan \frac{\theta}{2}$ 이다.  $\angle POQ = \angle PQR = \frac{\theta}{2}$ 이므로, 선분 PR의 길이는  $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ 이다. 따라서  $f(\theta) = \tan^4 \frac{\theta}{2} \pi$ 이다.

한편, 선분 AQ의 길이는  $\tan \frac{\theta}{2}$ 이다.  $\angle AOQ = \angle AQS = \frac{\theta}{2}$ 이므로, 선분 AS의 길이는  $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ 이다.

따라서  $g(\theta) = \frac{1}{2} \tan^3 \frac{\theta}{2}$ 이다. 그러므로,  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = \pi$ 이다.

21.

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)g(x)dx = \left[ f(x) \left( \int g(x)dx \right) \right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} f'(x) \left( \int g(x)dx \right) dx$$

이다. 한편,  $\int g(x)dx = x \sin x$ 이다. ( $g(x)$ 를 부분적분)

따라서  $\left[ f(x) \left( \int g(x)dx \right) \right]_{\pi}^{2\pi} = \left[ f(x) \times x \sin x \right]_{\pi}^{2\pi} = 0$ 이다.

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)g(x)dx = - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x f'(x)dx$$

에서  $f'(x) = -\frac{\sin x}{x}$ 이므로,

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)g(x)dx = \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}$$

22.  $f(4x) = f(2-x)$ 에서 양변을 미분하면

$4f'(4x) = -f'(2-x)$ 이고, 또 미분하면  $16f''(4x) = f''(2-x)$ 이다.

$x=0$ 을 대입하면  $16f''(0) = f''(2)$ 이다.  $f''(0) = 1$ 이므로

$f''(2) = 16$ 이다.

$$23. \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x) dx = \left[ \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

따라서  $20a = 10$ 이다.

$$24. \int_0^2 \left( kx^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[ \frac{1}{3} kx^3 + \frac{1}{3} x \right]_0^2 = \frac{8}{3} k + \frac{2}{3} = 10$$

이므로  $k = \frac{1}{8}$ 이다.

$$\text{따라서 평균은 } \int_0^2 x \left( \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[ \frac{1}{32} x^4 + \frac{1}{6} x^2 \right]_0^2 = \frac{7}{6}$$

이다.  $60m = 70$ 이다.

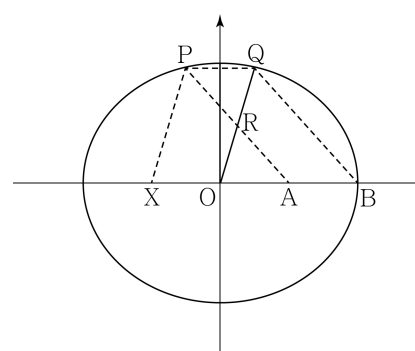
25. 첫 번째 뽑았을 때 1이 나오고, 두 번째 뽑았을 때 1이 안나올 확률은  $\frac{1}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{15}$ 이다.

첫 번째 뽑았을 때 1이 안 나오고, 두 번째 뽑았을 때 1이 나올

확률은  $\frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$ 이다.

따라서 1이 적힌 카드가 두 장일 확률은  $\frac{4}{15}$ 이다.  $a+b=19$ 이다.

26.



사각형 POAQ는 평행사변형이고, 평행사변형의 두 대각선은 서로 이등분하므로 점 R은 선분 OQ의 중점이자, 선분 AP의 중점이기도 하다. 따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이는

$$\overline{PQ} + \frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{OQ})$$

임을 알 수 있다. 한편, 타원의 두 초점을 A, X라 할 때, 선분 PX와 선분 OQ는 평행하므로  $\overline{OQ} = \overline{PX}$ 일 것이다. 따라서

$$\overline{PQ} + \frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{OQ}) = \overline{PQ} + \frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{XP}) = 2 + 4 = 6$$

임을 알 수 있다.

## 정답 및 해설

**27.** 문제의 상황에 맞게 그림을 직접 그려보면, 원이 포물선과 만나는 점의  $x$ 좌표가 같음을 확인할 수 있다. 그러므로, 포물선

위의 점 P에서의 접선의 기울기는  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 임을 알 수 있다.

(P의  $y$ 좌표가 Q의  $y$ 좌표보다 크다고 가정해도 일반성을 잃지 않는다.) 따라서 두 점 P, R을 지나는 접선의 방정식은

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + p\sqrt{3}$  이다. 이 접선이 포물선  $y^2 = 4px$ 와 만나는 점은

$(3p, 2\sqrt{3}p)$ 이다. 이것을 원  $x^2 + y^2 = 14$ 에 대입하면

$9p^2 + 12p^2 = 140$ 이다. 따라서  $p^2 = \frac{2}{3}$ 이다. 따라서  $30p^2 = 20$ 이다.

**28.**  $\frac{a}{\log_2 a} \in A$ 에 속하기 위해선,  $a$ 가  $2^k$ 꼴이어야 하고, 그것을

대입해보면  $\frac{2^k}{k} \in A$ 여야 하는데, 여기서 또 속하기 위해선,  $k = 2^m$

꼴이어야 한다. 즉,  $a = 2^{2^m}$  (단,  $a$ 는 자연수,  $k, m$ 은 0 이상의 정수)  
 꼴이면 된다. 이제 하나하나 해보자.

$f(3) = 1$ 인데, 그 이유는  $a = 2$ 일 때 속하기 때문이다.

$f(8)=2$ 인 이유는  $a=2$ ,  $a=4$ 일 때 속하기 때문이다.

$f(m) = 30$ 이 되는 최초의  $m$ 의 값은  $m$ 이 16일 때이다.

$f(m) = 4$ 가 되는 최초의  $m$ 의 값은  $m$ 이 256일 때이다.

따라서  $f(m) = 30$ 이 되게 하는 최댓값은 255이다.

**29.**  $\angle CFG$ 가  $30^\circ$ 이고, 선분  $FG$ 와 평면  $\alpha$ 가 이루는 각도  $30^\circ$ , 즉 서로 엇각 관계이므로 선분  $FG$ 는 평면  $\alpha$ 와 평행하다. 한편, 점  $A$ 에서 선분  $CF$ 에 내린 수선의 발을  $H'$ 이라 할 때, 선분  $AH'$ 를 평면  $\alpha$ 에 정사영하면 선분  $AB$ 와 길이가 같아지게 된다.

따라서 정사영의 넓이는  $16 \times 4 \times \frac{1}{2} = 32$ 이다.

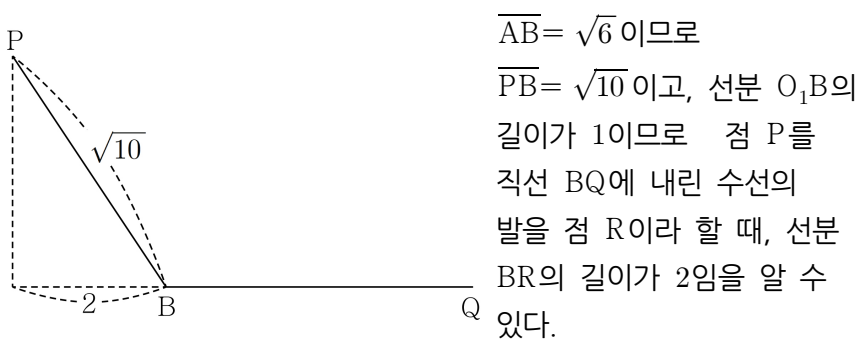
**30.**  $\angle ABP = \angle ABQ = 90^\circ$ 이다. (구의 중심을 지나는 지름을 빗변으로 하는 삼각형은 전부 직각삼각형이다. 또한 선분 AB에 수직인 직선을 그었으므로 각 ABQ도 직각일 수 밖에 없다.)

따라서 두 평면이 이루는 각은 각 PBQ의 크기와 같다.

두 구  $T_1$ 과  $T_2$ 가 만나서 생기는 평면과 점  $O_1$  사이의 거리는

1이다. 따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 반지름은  $\sqrt{3}$ 이다.

한편, 선분 AB의 길이가  $\sqrt{6}$  이므로 두 구가 만나서 생기는 원의 중심을 C라 할 때,  $\angle ACB = 90^\circ$ 이다.



따라서  $\cos \angle PBQ = -\frac{2}{\sqrt{10}}$  이므로  $\cos^2 \theta = \frac{2}{5}$  이다.

그러므로,  $p+q=70$ 이다.

## 2회 정답 및 해설

|        |        |        |         |         |
|--------|--------|--------|---------|---------|
| 1. ③   | 2. ②   | 3. ④   | 4. ⑤    | 5. ④    |
| 6. ⑤   | 7. ①   | 8. ③   | 9. ①    | 10. ②   |
| 11. ③  | 12. ②  | 13. ②  | 14. ④   | 15. ⑤   |
| 16. ①  | 17. ⑤  | 18. ③  | 19. ③   | 20. ④   |
| 21. ①  | 22. 6  | 23. 36 | 24. 11  | 25. 22  |
| 26. 13 | 27. 16 | 28. 28 | 29. 160 | 30. 244 |

$$\mathbf{1.} \quad 4^{-\frac{3}{8}} \times 2^{\frac{11}{4}} = 2^{-\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{11}{4}} = 4$$

**2.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{4x} = \frac{\ln 4}{4} = \frac{1}{2} \ln 2$

**3.** 두 초점의 좌표는  $(4, 0)$ ,  $(-4, 0)$ 이므로 삼각형의 넓이는 40이다.

4.  $P(B \cup A^c) = \frac{4}{5}$  이므로  $P(A \cap B^c) = \frac{1}{5}$  이다.

$$P(A \cup B) = \frac{7}{10} \text{ 이므로 } P(A \cup B) - P(A \cap B^C) = P(B) = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

5. 점 C를 (2, 0)이라 할 때,  $\tan \angle OBC = \frac{2}{3}$ ,

$\tan \angle ABC = \frac{1}{2}$ 이다. 따라서  $\tan \theta = \tan(\angle OBC - \angle ABC)$ 이다.

$$\tan \theta = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{8} \text{이다.}$$

6.  $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 \\ 3a+1 \end{pmatrix}$ 이다. 원의 중심을  $(0, 1)$ , 점  $P(1, 3)$ 을

지나는 직선의 기울기가 2이므로, 점  $(a+3, 3a+1)$ 과 점 P의 기울기도 2여야 한다. 따라서  $a=6$ 이다.

**7.**  $P_1 = k \left( \frac{1}{10} \log \frac{400}{1000} + 1 \right) = 0.96k,$

$$P_2 = k \left( \frac{1}{10} \log \frac{500}{1000} + 1 \right) = 0.97k \text{오}| \text{므로}, \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{97}{96} \text{오}| \text{다.}$$

8.  $a_{30} = 10$ 이고,  $a_{20} - a_{10} = 8$ 에서 공차가 0.80이므로,  $a_n < 0$ 이 되는 최소의 자연수  $n$ 은 32임을 알 수 있다.

9. 직선 AB에 수직이고, 점 C를 지나는 직선이 점 P의 자취이다.

따라서  $|\overrightarrow{AP}|$ 가 최소가 되려면, 점 C를 지나는 직선 중 직선 AB

위의 점이 점 P일 때이다. 따라서  $\frac{9}{5}$ 이다.

# 정답 및 해설

10.  $f(x) - g(x) = 1 - \frac{f(x)}{g(x)}$ 에서

$f(x) - g(x) = -\frac{f(x) - g(x)}{g(x)}$ 이므로  $f(x) - g(x) = 0$ 이거나,

$g(x) = -1$ 일 때이다.

$g(x)$ 의 그래프를 좌표평면 위에 그려보자.  $f(x) = g(x)$ 가 되려면  $x = 1$ 이어야 하는데, 이 때에는  $f(x) = g(x) = 0$ 이므로 무연근이다.

$g(x) = -1$ 일 때에는  $y = g(x)$ 와  $y = -1$ 이 서로 다른 두 점에서 만난다. 따라서 근은 2개다.

11.  $y = e^{ax^2}$ 을 미분하면,  $y = 2ax e^{x^2}$ 이고, 이것을 한번 더 미분하면

$y = 2ae^{x^2} + 4a^2 x^2 e^{x^2}$ 이다. 두 번 미분한 값이 0이 되기 위해선,

$2ae^{x^2} = -4a^2 x^2 e^{x^2}$ 에서  $x^2 = -\frac{1}{2a}$ 이다. 이것을 원래 함수값에

대입하면, 변곡점은  $\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 이다.  $x, y$ 좌표가 서로 같아야

하므로,  $-\frac{1}{2a} = e^{-1}$ 에서  $a = -\frac{e}{2}$ 임을 알 수 있다.

12.  $P(X=0) = {}_2C_0 p^0 (1-p)^2 = \frac{1}{9}$ 이므로  $1-p = \frac{1}{3}$ 에서

$p = \frac{2}{3}$ 이다. 따라서  $E(X) = np = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$ 이다.

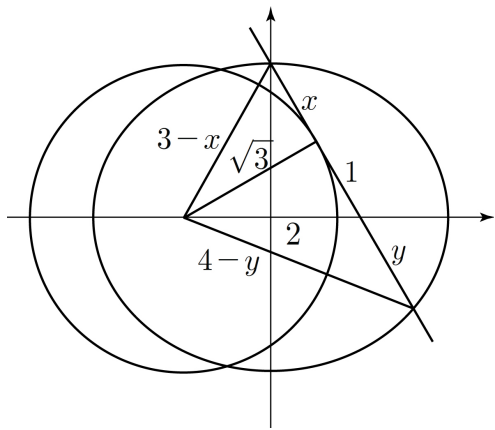
13.  $P_1$ 은  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 이다.  $P_2$ 는  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다.

$P_3$ 는  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이다. 따라서  $a_1 = a_3 > a_2$ 이다.

14. 4개 중 중복을 허용하여 3개 고르는 경우의 수는  ${}_4H_3$ 이다.

그런데, 유일하게 피보나치 버거 3개를 구매하게 되면 10000원이 초과하므로, 1개를 빼주어야 한다. 따라서 총 경우의 수는 19이다.

15.



피타고라스의 정리를 사용하면 답을 구할 수 있다.

$x^2 + 3 = (3-x)^2$ ,  $(y+1)^2 + 4 = (4-y)^2$ 을 구하면 된다.

첫 번째 식에서  $6x = 6$ 이므로  $x = 1$ 이고, 두 번째 식에서

$2y + 4 = -8y + 16$ 이므로  $10y = 12$ 에서  $y = \frac{6}{5}$ 이다.

따라서 선분 PQ의 길이는  $1 + 1 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}$ 이다.

16. 선분 DQ의 길이를  $a$ 라 하면, 선분 DP의 길이는  $\frac{2}{3}a$ 이다.

따라서 선분 BQ의 길이도  $\frac{2}{3}a$ 이다. 그러므로 선분 BD의 길이는

$\frac{5}{3}a$ 이다. 한편, 정사각형의 한 변의 길이가 5이므로, 선분 BD의

길이는  $5\sqrt{2}$ 이기도 하다. 따라서  $a = 3\sqrt{2}$ 이다.

선분 PQ의 길이는  $\sqrt{2}$ 이므로, 정사각형 PRQS의 한 변의 길이는 1이고, 선분 HG의 길이는  $3\sqrt{2}$ 이다. 따라서 색칠한 부분의 넓이는

$3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2} - 2 = 7$ 임을 알 수 있다.

한편, 선분 DG의 길이가 3이므로 선분 CG의 길이는 2이다.

따라서 두 번째 항의 정사각형의 넓이는 전체 넓이의  $\frac{4}{25}$ 배이고,

이것이 2개 있으므로, 공비는  $\frac{8}{25}$ 임을 알 수 있다.

첫째항이 7이고 공비가  $\frac{8}{25}$ 인 무한등비급수의 합은  $\frac{175}{17}$ 이다.

17. (가)는  $(n+1)!$ , (나)는  $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ 이다.

$f(12) - f(11) = 13! - 12 \neq 12!(13-1) = 12 \times 12!$ 이고,

$g(12) - g(11) = \frac{1}{12!}$ 이다. 따라서,  $pq = 12$ 이다.

18.  $f'(x) = \frac{\sin x}{g(x)}$ ,  $(f'(x)g(x) = \sin x)$ 이고,  $f(0) = f(\pi) = 0$ 이므로

$\int_0^\pi f(x)g'(x)dx = \left[ f(x)g(x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)g(x)dx = -20$ 이다.

$g''(x) = f(x)$ ,  $g'(\pi) = 0$ ,  $g'(2\pi) = 20$ 이므로

$\int_\pi^{2\pi} f(x)g'(x)dx = \int_\pi^{2\pi} g''(x)g'(x)dx = \left[ \frac{1}{2} \{g'(x)\}^2 \right]_\pi^{2\pi} = 20$ 이다.

따라서 둘을 합하면 0이다.

19. 사차함수를 미분하면  $f'(x) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$ 임을 알 수 있다. 그래프를 그려보면,  $f(1) = f(3) = -9$ ,  $f(2) = -8$ 이다.

$f(x)$ 가 0부터 1까지는 감소하므로  $f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) < 0$ 이다.

따라서  $\sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| = f(0) - f(1)$ 이다.

$f(x)$ 가 1부터 2까지는 증가하므로  $f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) > 0$ 이다.

따라서  $\sum_{k=n+1}^{2n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| = f(2) - f(1)$ 이다.

$f(x)$ 가 2부터 3까지는 감소하므로  $f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) < 0$ 이다.

따라서  $\sum_{k=2n+1}^{3n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| = f(2) - f(3)$ 이다.

$f(x)$ 가 3부터 4까지는 증가하므로  $f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) > 0$ 이다.

따라서  $\sum_{k=3n+1}^{4n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| = f(4) - f(3)$ 이다. 따라서

# 정답 및 해설

네 식을 모두 더하면  $f(0) - 2f(1) + 2f(2) - 2f(3) + f(4) = 20$ 이다.  
따라서  $\frac{20}{n} < 3$ 인  $n$ 의 최솟값을 구하면 되므로,  $n = 7$ 이다.

**20.** ㄱ.  $\overrightarrow{AB} = (0, -3, 3)$ 이므로  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ 이다.  
ㄴ. 평면  $\alpha$ 의 법선벡터는  $(1, 1, -1)$ 이다. 직선 AB의 방향벡터는  $\overrightarrow{AB} = (0, -3, 3)$ 이다. 따라서 법선벡터와 방향벡터가 이루는 각을

$t$ 라 하면, 평면  $\alpha$ 와 직선 AB가 이루는 각은  $\frac{\pi}{2} - t$ 가 된다.

$(0, -3, 3) \cdot (1, 1, -1) = -6$ 이고, 내적의 공식

$3\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \cos t = -6$ 에서  $\cos t = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

따라서,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

ㄷ. 선분 AB의 길이가  $3\sqrt{2}$ 이므로, 선분 A'B'의 길이는

$3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}$ 이다. 한편, 선분 CD의 길이는  $2\sqrt{2}$ 이므로

마름모의 넓이는  $\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$ 이다.

**21.**  $f(x)$ 는  $a$ 값에 관계없이 원점을 지난다.

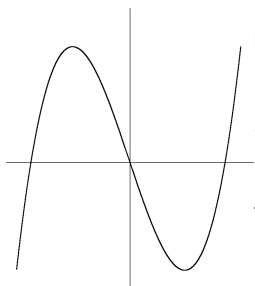
$f'(x) = e^x + e^{-x} + a$ 이다.  $f'(x)$ 의 그래프를 곧바로 그릴 수 있으면  
그리고, 만약 곧바로 그릴 수 없다면 다시 한번 더 미분한다.

이 그래프는 다시 미분하면  $f''(x) = e^x - e^{-x}$ 이다. 이계도함수가  
 $x=0$ 에서 교점을 가지므로,  $f'(x)$ 는  $x=0$ 에서 극솟값을 가진다.  
즉,  $f'(x)$ 의 그래프는 대략 이차함수 그래프의 개형과 유사하므로,  
이차함수의 그래프를 위 아래로 움직이면서 비교하면 된다.

i)  $a > -2$ 이면  $f'(x) > 0$ 이므로  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서  
증가한다. 따라서  $|f(x)| = k$ 의 실근의 개수는 4개일 수는 없다.

ii)  $a = -2$ 이면  $f'(x) \geq 0$ 이므로 마찬가지로  $|f(x)| = k$ 의 실근의  
개수가 4개일 수는 없다.

iii)  $a < -2$ 이면  $f(x)$ 의 개형은 왼쪽 그림과 같다.



따라서  $|f(x)| = f\left(\ln \frac{1}{2}\right)$ 가 서로 다른 네 실근을

갖기 위해선  $x = \ln \frac{1}{2}$ 에서 극댓값을 가져야

한다.  $f'\left(\ln \frac{1}{2}\right) = 0$ 이므로  $a = -\frac{5}{2}$ 이다.

**22.**  $\sqrt{2x^2 - 14x + 21} = x - 3$ 에서 양변을 제곱하면

$2x^2 - 14x + 21 = x^2 - 6x + 9$ 에서  $x^2 - 8x + 12 = 0$ 이므로  $x = 2$  또는  
 $x = 6$ 이다.  $x = 2$ 는 무연근이므로 해는  $x = 6$ 이다.

**23.**  $xy$ 평면과 평면  $x - 2y + 2z = 6$ 가 이루는 각의 크기는

$(0, 0, k) \cdot (1, -2, 2) = 2k$ 에서  $\cos \theta = \frac{2}{3}$ 이다. 반지름의 길이가

6인 원의 넓이가  $36\pi$ 이므로  $36\pi \times \frac{2}{3} = 24\pi$ 이다.

$yz$ 평면과 평면  $x - 2y + 2z = 6$ 가 이루는 각의 크기는

$(k, 0, 0) \cdot (1, -2, 2) = k$ 에서  $\cos \theta = \frac{1}{3}$ 이다. 반지름의 길이가

6인 원의 넓이가  $36\pi$ 이므로  $36\pi \times \frac{1}{3} = 12\pi$ 이다. 따라서  $k = 36$ 이다.

**24.**  $2(\sin x - \sin 2x) = \sqrt{3}(1 - 2\cos x)$ 에서 좌변의  $\sin 2x$ 를  
 $2\sin x \cos x$ 로 바꾸고,  $\sin x$ 로 묶으면

$2\sin x(1 - 2\cos x) = \sqrt{3}(1 - 2\cos x)$ 이다.

i)  $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때 :  $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5}{3}\pi$ 이다.

ii)  $\cos x \neq \frac{1}{2}$ 일 때  $2\sin x = \sqrt{3}$ 이다.

따라서  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로  $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2}{3}\pi$ 이다.

따라서 서로 다른 모든 실근의 합은  $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$ 이다.

그러므로  $p + q = 11$ 이다.

**25.**  $A(A + 3E) = E$ 이므로  $A^{-1} = A + 3E$ 이다.

따라서  $A - A^{-1} = -3E$ 이므로  $A^2 + (A^{-1})^2 = 11E$ 이다.

그러므로 모든 성분의 합은 22이다.

**26.** 다섯 번째 던진 동전이 앞면이 나올 확률이  $\frac{1}{2}$ 이다. 이 경우

첫 번째~네 번째 동전이 어떻게 던져지든 상관없이 24원 이상을  
만족한다.

다섯 번째 던진 동전이 앞면이 안나올 경우, 세 번째 및 네 번째  
던진 동전이 모두 앞면이 나와야 하고, 첫 번째 및 두 번째 던진  
동전은 무관하다.

따라서 이 경우  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ 를 만족시키므로  $\frac{1}{8}$ 이다.

그러므로  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ 이다.

**27.**  $\angle OBA = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이고,  $\angle ACB = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이다.

따라서 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. 점 A에서 선분 BC에  
내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이는  $4\sin \theta$ 이다.

삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 선분 OH의 길이를  $r$ 이라

할 때, 선분 OA의 길이는  $\frac{r}{\sin \theta}$ 이다. 따라서

$4\sin \theta = r\left(1 + \frac{1}{\sin \theta}\right)$ 이다. 그러므로,  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(\theta)}{\pi \times \theta^4} = 16$ 이다.

**28.**  $a_n = a_1(r_1)^{n-1}, b_n = b_1(r_2)^{n-1}$ 이다.

$a_{2n-1} = a_1(r_1)^{2n-2}$ 이므로,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_1}{a_1}\right) \left(\frac{r_2}{(r_1)^2}\right)^{n-1} = 14$ 가

되기 위해선,  $\frac{r_2}{(r_1)^2} = 1$ 이어야 하고,  $\frac{b_1}{a_1} = 14$ 이면 된다.

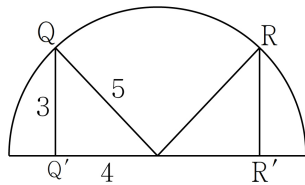
$b_{2n-1} = b_1(r_2)^{2n-2}$ 이므로,

# 정답 및 해설

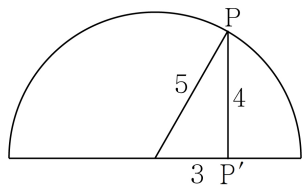
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{b_1}{a_1}}{1 - \left(\frac{(r_2)^2}{r_1}\right)} = \frac{14}{1 - (r_1)^3} = 16 \text{에서 } r_1 = \frac{1}{2} \text{임을}$$

알 수 있다.  $r_1 = \frac{1}{2}$ 이면  $r_2 = \frac{1}{4}$  이므로,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{14}{1 - \frac{1}{2}} = 28$ 이다.

**29.** 지름의 길이가 10이고,  $\overline{AB} = 8$ 이므로,  $\overline{AD} = 6$ 이다.  
문제에 있는 그림을 정면에서 바라보면,



이고, 오른쪽 면에서 바라보면,



이다. QR의 중점을 T라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이는 선분 QR을 밑변으로 하고, 선분 TP를 높이로 하여 구할 수 있다.

선분 TP의 길이는  $\sqrt{10}$  이므로, 삼각형 PQR의 넓이는  $4\sqrt{10}$  이다.  
 $S^2 = 160$ 이다.

**30.** 문제의 예시를 가지고 그래프를 그려보는 것이 문항 해결의 핵심이다. 문제의 예시를 이해하면 아래 풀이가 이해될 것이다.

- i)  $n < a$ 이면 교점은  $x > 1$ 인 부분에서 생기며,  $n$ 의 값이 정해졌을 때,  $a$ 의 값이 커질수록 교점의  $x$ 좌표는 작아진다.  
ii)  $n > a$ 이면 교점은  $0 < x < 1$ 인 부분에서 생기며,  $n$ 의 값이 정해졌을 때,  $a$ 의 값이 커질수록 교점의  $x$ 좌표는 작아진다.  
또한, ii)의 모든 값은 i)의 모든 값보다 작다.  
이 두 가지 사실에 착안하면,  $f(2) = 20$ ,  $f(3) = 20$ ,  $f(4) = 20$ ,  
 $f(5) = 4$ ,  $f(6) = 5$ ,  $f(7) = 6$ , ...,  $f(20) = 19$ 임을 알 수 있다.  
따라서,  $20 \times 3 + (4 + 5 + \dots + 19) = 60 + 23 \times 8 = 244$ 이다.

## 3회 정답 및 해설

|         |         |        |        |         |
|---------|---------|--------|--------|---------|
| 1. ④    | 2. ③    | 3. ②   | 4. ⑤   | 5. ③    |
| 6. ④    | 7. ①    | 8. ①   | 9. ④   | 10. ②   |
| 11. ④   | 12. ②   | 13. ①  | 14. ⑤  | 15. ③   |
| 16. ⑤   | 17. ①   | 18. ②  | 19. ③  | 20. ⑤   |
| 21. ⑤   | 22. 100 | 23. 20 | 24. 28 | 25. 16  |
| 26. 190 | 27. 17  | 28. 21 | 29. 24 | 30. 804 |

**1.**  $2A - 4E = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로 모든 성분의 합은 4이다.

**2.**  $(x+2)^5$ 의 전개식에서  $x^3$ 의 계수는  $2^2 \times {}_5C_3 = 40$ 이다.

**3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1 - e^x}{2(e^x + 1)} \right)$ 이므로  $-\frac{1}{4}$ 이다.

**4.**  $P(A^C) = \frac{1}{2}$ 이므로  $P(A) = \frac{1}{2}$ 이다.  $P(B)$ 를  $x$ 라 하면,

$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}$ 이어야 한다. 따라서,  $x = \frac{1}{3}$ .

**5.**  $\cos x - \sin x = \cos 2x$ 에서  $\cos x - \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$ 이다.

i)  $\cos x - \sin x = 0$ 인 경우

$\cos x = \sin x$ 의 근을 구하면 된다.  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{5}{4}\pi$ 이다.

ii)  $\cos x - \sin x \neq 0$ 인 경우

약분하면  $\cos x + \sin x = 1$ 이다.  $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ 의 해를 구하면

된다. 따라서  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ 이다. 따라서 모든 실근의 합은  $2\pi$ 이다.

**6.**  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에서  $x = 5x' - 3y'$ ,  $y = -3x' + 2y'$ 이다.

$2x' - y' = 1$ 이  $(2, a)$ 를 지난다. 따라서  $a = 3$ 이다.

**7.**  $f(x) = x^m \ln x$ 를 미분하면,  $f'(x) = mx^{m-1} \ln x + x^{m-1}$ 이다.

극값을 가지려면,  $f'(x) = 0$ 이므로,  $x^{m-1}(m \ln x + 1) = 0$ 에서

$\ln x = -\frac{1}{m}$ 이다.  $x = e^{-\frac{1}{m}}$ 에서  $f\left(e^{-\frac{1}{m}}\right) = -\frac{1}{me} = -\frac{2}{e}$ 이다.

따라서,  $m = \frac{1}{2}$ 이다.

**8.**  $P(X=0) = \frac{1}{6}$ ,  $P(X=1) = \frac{a+1}{6}$ ,  $P(X=2) = \frac{2a+1}{6}$ 에서

세 값의 합은 1이어야 한다.  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = 1$ 이므로  $a = 1$ 이다.

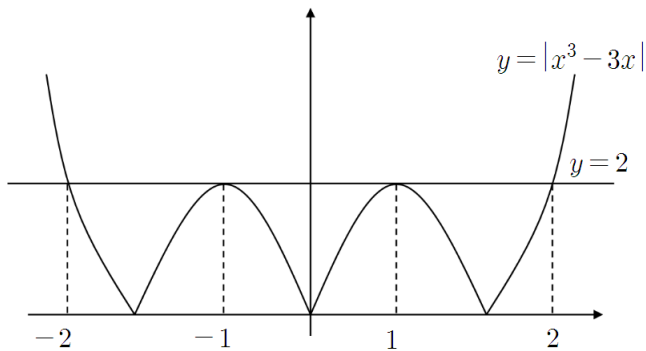
$E(X) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ 이고,  $E(X^2) = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ 이다.

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{7}{3} - \frac{16}{9} = \frac{5}{9}$ 이다.  $\therefore V(3X+1) = 5$

– 8 –

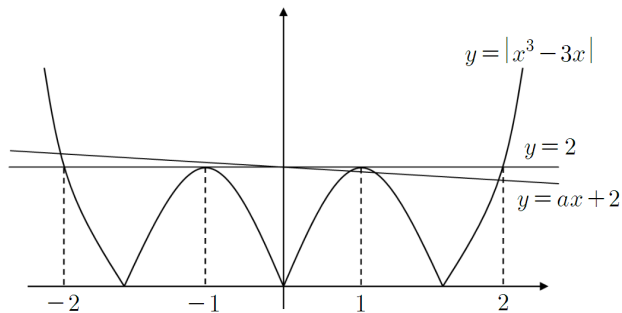
# 정답 및 해설

20. 함수  $y = x^3 - 3x$ 를 미분하면  $x = -1$ 일 때 극댓값 2,  $x = 1$ 일 때 극솟값 -2를 갖는 것을 알 수 있다. 그러므로 함수  $y = |x^3 - 3x|$ 의 그래프는 다음과 같이 그려진다.

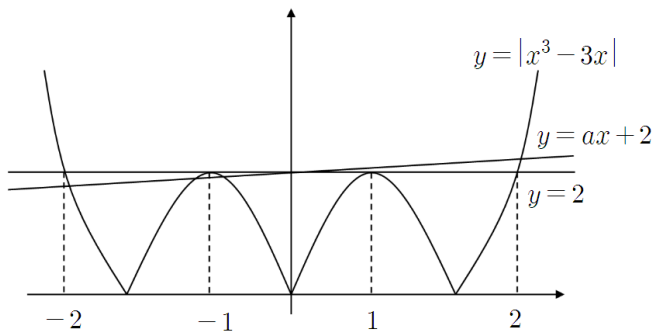


그러므로  $a = 0$ 일 때 직선  $y = 2$ 와 함수  $y = |x^3 - 3x|$ 는 다음과 같이  $x = -2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ 에서 만나게 된다.

( $y = \pm(x^3 - 3x)$ 와 직선  $y = 2$ 를 연립시키면  $x = -2$ 와  $x = 2$ 에서 만난다는 사실을 알 수 있지만, 풀이의 완결성을 위해 표기했을 뿐 문제 풀이에는 전혀 필요하지 않다.)



$a < 0$ 일 때 직선  $y = 2$ 와 함수  $y = |x^3 - 3x|$ 는 다음과 같이 그려진다.  $a$ 를 무한히 0에 가깝게 보내면  $y = 2$ 와 함수  $y = |x^3 - 3x|$ 는 그림과 같이  $x = 1$  주위에서 두 개의 교점을 갖게 된다. 그러므로  $\lim_{a \rightarrow -0} f(a) = (-2) + 1 + 1 + 2 = 2$ 이다.



$a > 0$ 일 때 직선  $y = 2$ 와 함수  $y = |x^3 - 3x|$ 는 다음과 같이 그려진다.  $a$ 를 무한히 0에 가깝게 보내면  $y = 2$ 와 함수  $y = |x^3 - 3x|$ 는 그림과 같이  $x = -1$  주위에서 두 개의 교점을 갖게 된다. 그러므로  $\lim_{a \rightarrow +0} f(a) = (-2) + (-1) + (-1) + 2 = -2$ 이다.

그러므로  $\lim_{a \rightarrow -0} f(a) - \lim_{a \rightarrow +0} f(a) = 4$ 이다.

21. ㄱ. 전개도를 접었을 때, 선분 AB의 길이는  $3\sqrt{2}$ 이고, 선분 BQ의 길이는  $\sqrt{6}$ , 선분 AQ의 길이는  $2\sqrt{3}$ 이다. 삼각형 ABQ가 피타고라스의 정리가 성립하므로, 수직이다.

ㄴ.  $\overline{BQ} = \overline{PQ} = \sqrt{6}$ 이고 선분 BP =  $2\sqrt{3}$ 이다. 직각삼각형이므로 넓이는 3이다.

ㄷ. 선분 AQ와 선분 BQ가 수직이고, 선분 PQ와 선분 BQ가 수직이므로, 평면 APQ와 선분 BQ는 수직이다. 따라서 선분 AP와 선분 BQ는 수직이다. 이면각의 정의에 의해 참이다.

22.  $x(x-n)(x-3n) < 0$ 이면  $x < 0$  또는  $n < x < 3n$ 이다.

따라서 자연수  $n$ 의 개수는  $2n-1$ 개다.  $\sum_{n=1}^{10} f(n) = 100$ 이다.

23. 타원에서 초점거리의 제곱의 값은  $a^2 - 7$ 이고, 쌍곡선에서 초점거리의 제곱의 값은  $13 + b^2$ 이다. 따라서  $a^2 - b^2 = 20$ 이다.

24.  $f(2A) = f\left(\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)$ 이다. 한편,

$f(B) + f(C) = f(B+C) = f\left(\frac{8}{8}\right) = \left(\frac{20}{8}\right)$ 이므로 모든 성분의 합은 28이다.

25. 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면, 선분 AH의 길이는 5이다. 한편, BD의 중점을 I라 할 때, 선분 AH와 선분 BC는 수직이고, 선분 BD와 선분 AI도 수직이므로, 삼수선의 정리에 의하여 선분 HI와 선분 BC는 수직이다. 따라서 선분 HI의 길이는 3이다. 따라서 선분 AI의 길이는 4임을 알 수 있다. 따라서 사면체의 부피는 16이다.

26. 사과 주스, 토마토 주스, 오렌지 주스를 나열하는 경우의 수는  $\frac{8!}{4!3!} = 280$ 이다.

여기서 양 끝에 사과주스가 오는 경우의 수

$\frac{6!}{2!3!} = 60$ , 양 끝에 토마토 주스가 오는 경우의 수  $\frac{6!}{4!} = 30$ 이므로,  $280 - (60 + 30) = 190$ 이다.

27.  $\overline{PQ} = \sin \theta$ 이고,  $\overline{PH} = \sin^2 \theta$ ,  $\overline{HQ} = \sin \theta \cos \theta$ 이다.

따라서,  $f(\theta) = \frac{1}{2} \sin^3 \theta \cos \theta$ 임을 알 수 있다.

한편,  $\angle HPS = \theta$ 이므로  $\overline{PS} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$ 이고,  $\overline{RS} = \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$ 이다.

$\angle STR = \theta$ 이므로  $\overline{OT} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$ 이고,  $\overline{RT} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} - \sin \theta$ 이다.

따라서,  $g(\theta) = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) \left( \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{\cos^2 2\theta}{2 \sin \theta \cos \theta}$ 이다.

따라서,  $f(\theta) \times g(\theta) = \frac{1}{4} \sin^2 \theta \cos^2 2\theta$ 이다.

$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(\theta) \times g(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{4}$ 이다. 따라서  $p^2 + q^2 = 17$ 이다.

28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} f\left(\frac{3k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{9k}{n^2} e^{\frac{3k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{9k}{n} e^{\frac{3k}{n}} dx$   
 $= \int_0^1 9x e^{3x} dx$   
 $= 2e^3 + 1$

이므로,  $10a + b = 21$ 이다.

(별해) 식변형을 하면,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} f\left(\frac{3k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} f\left(\frac{3k}{n}\right) = \int_0^1 9x e^{3x} dx$

# 정답 및 해설

29. 점 A가  $x$ 축 위에 있으므로, A의 좌표는  $(-\sqrt{10}, 0, 0)$ 이다. 따라서 선분 OA의 길이는  $\sqrt{10}$ 이다. 점 O에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면,  $\overline{AP}:\overline{AQ}=5:3$ 이므로  $\overline{AH}:\overline{AQ}=1:4$ 이다.  $\overline{AH}=k$ 라 하면,  $\overline{HQ}=4k$ 이다. 따라서  $\overline{OH}^2=5^2-(4k)^2=(\sqrt{10})^2-k^2$ 이다. 따라서  $15k^2=15$ 이므로  $k=1$ 이다.  $\overline{PQ}=8$ 임을 알 수 있다. 삼각형 PQR은 직각삼각형이므로, 선분 PR의 길이는 6임을 알 수 있다. (선분 RQ는 지름이므로) 따라서 삼각형 PQR의 넓이는  $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ 이다.

30.  $a_{12}-a_{11}$ , 즉  $a_{11}$ 에서  $a_{12}$ 가 되면서 어떻게 변화하는지를 알아보면 된다. 이를 위해선,  $a_3$ 에서  $a_4$ 로 변화할 때 어떻게 변화하는지를 관찰하는 것이 중요하다.  $a_3$ 에서  $a_4$ 로 변화할 때, 꼭짓점에 4라는 숫자가 써지고, 4를 중심으로 각 변에 4, 8, 12라는 숫자가 써진다. 이에 착안하여  $a_{11}$ 에서  $a_{12}$ 가 되면서, 꼭짓점이 12라는 숫자가 써지고, 12를 중심으로 각 변에 12, 24, 36, ...,  $12 \times 11$ 이 써질 것이다. 따라서,  $12 + \sum_{k=1}^{11} 12k = 12 + 6 \times 11 \times 12 = 804$ 이다.

## 4회 정답 및 해설

|        |         |        |        |         |
|--------|---------|--------|--------|---------|
| 1. ④   | 2. ④    | 3. ①   | 4. ②   | 5. ⑤    |
| 6. ⑤   | 7. ③    | 8. ⑤   | 9. ①   | 10. ②   |
| 11. ③  | 12. ①   | 13. ③  | 14. ②  | 15. ④   |
| 16. ③  | 17. ④   | 18. ①  | 19. ⑤  | 20. ⑤   |
| 21. ②  | 22. 32  | 23. 15 | 24. 11 | 25. 12  |
| 26. 16 | 27. 100 | 28. 61 | 29. 40 | 30. 376 |

1.  $\log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_4 \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

2.  $(A-B)A^{-1}=A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 이므로 모든 성분의 합은 1이다.

3.  $y=0$ 을 대입하면  $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=5$ 에서  $(x-1)^2+z^2=1$ 이 된다. 따라서 원의 넓이는  $\pi$ 이다.

4.  $f(2A-B)=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ 이므로  $f(4A-2B)=\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ 이다.

$f(A+2B)=\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ 이므로 두 식을 더하면  $f(5A)=\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ 이다.

따라서  $f(A)=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 이고,  $f(B)=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 이다. 따라서  $f(A+B)=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ 이다.

5.  $x^4-7x^3+17x^2-17x+6=(x-1)^2(x-2)(x-3) \leq 0$ 이다. 따라서,  $x=1, 2 \leq x \leq 3$ 이므로 합은 6이다.

6. 남한 200조각, 북한 300조각이다. 남한의 12%, 즉 24조각이 도시조각이고, 북한의 4%, 즉 12조각이 도시조각이다.

따라서 구하는 확률은  $\frac{12}{24+12}=\frac{1}{3}$ 이다.

7. 기지국까지의 거리가 2km인 컴퓨터 한 대가 데이터를 전송받는 속도는 7Mbps이고, 공유기에 연결된 컴퓨터가 3대이므로 컴퓨터 한 대가 전송받는 속도  $v_1$ 은  $v_1=7\log 4$ 이다.

기지국까지의 거리가 4km인 컴퓨터 한 대가 데이터를 전송받는 속도는 6Mbps이고, 공유기에 연결된 컴퓨터가 9대이므로 컴퓨터 한 대가 전송받는 속도  $v_2$ 는  $v_2=6\log 2$ 이다. 따라서,  $\frac{v_1}{v_2}=\frac{7}{3}$ 이다.

8.  $P(A \cup B) - P(A \cap B^C) = P(B) = \frac{1}{2}$ 이다.

$P(A)=x$ 라 하면,  $P(A \cup B)=x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}$ 이므로  $x=\frac{1}{3}$ 이다.

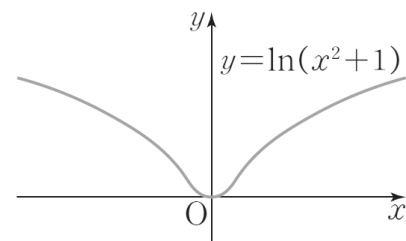
9.  $\int_1^7 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx$ 이다.

$\int_a^{a+3} f(t)dt = 2^a + \log_2 a$ 에서  $a=1$ 이면 우변이 2이고,

$a=4$ 이면 우변이 18이다. 따라서  $\int_1^7 f(x)dx = 20$ 이다.

10.  $f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g$ 를 좌표평면에 차례대로 표현해보면,  $f \circ g \circ f \circ g$ 를 하면 결국 제자리로 돌아온다는 것을 알 수 있다. 점  $(\sqrt{3}, 1)$ 이 일차변환  $g$ 에 의해 옮겨진 점의 좌표는  $(1, \sqrt{3})$ 이고, 점  $(1, \sqrt{3})$ 이 일차변환  $f$ 에 의해 옮겨진 점의 좌표는  $(-1, \sqrt{3})$ 이다. 따라서  $\sqrt{3}p+q=0$ 이다.

11.  $g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$y=f(x)$ 의 그래프는  $x=0$ 에서 극댓값을 갖고,  $y=g(x)$ 의 그래프와  $x=-1, x=1$ 에서 만난다. 따라서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는  $\int_{-1}^1 \{g(x)-f(x)\}dx$ 이다.

12.  $ABA=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, BAB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ y & 2 \end{pmatrix}$ 이면

$ABABAB=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ y & 2 \end{pmatrix}$ 이고,  $BABABA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ y & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

$AB=BA$ 이므로  $ABABAB=BABABA$ 이다. 따라서  $xy=2$ 이다.

13. 의장, 부의장을 뽑는 경우의 수 :  ${}_6P_2$

의장의 자리를 하나 정하고, 부의장이 이웃하지 않을 경우의 수 : 3  
따라서, 구하는 경우의 수는  ${}_6P_2 \times 3 \times 4! = 2160$ 이다.

# 정답 및 해설

14. 남성의 흡연율이 38%이고 우리나라의 흡연율이 30%이다.

남성과 여성의 비율이 5:4이므로  $\frac{5 \times 38 + 4 \times x}{5 + 4} = 30$ 이다.

$190 + 4x = 270$ 이므로  $x = 20$ 이다. 따라서 여성 흡연율은 20%이다.

모비율의 공식은  $Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ 이다.  $Z = \frac{0.26 - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{100}}} = 1.5$ 이다.

따라서 26% 이상일 확률은 0.0668이다.

15. 문제의 그래프를 자세히 관찰해보면,  $x = 1$ ,  $x = -1$ 에서 원점 대칭이고, 그 이외의 점에서는  $y$ 축 대칭임을 확인할 수 있다.

(이걸 어떻게 알아내!! 라고 주장하시는 분들을 위해, 2010학년도 6평 가형 10번을 참조하시기 바랍니다. 또한 이 사실을 몰라도, 약간의 노가다로 충분히 해결할 수 있습니다.)

따라서,  $g(x)$ 는  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ 에서  $2f(x)$ 이고,

$x = 1$ ,  $x = -1$ 에서 0이다.

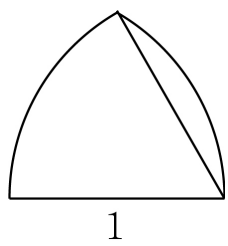
반면,  $h(x)$ 는  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ 에서 0이고,  $x = 1$ ,  $x = -1$ 에서  $2f(x)$ 이다.

ㄱ.  $h(1) = 2$ 이고,  $h(x)$ 에서  $x$ 가 1+0이나 1-0으로 갈 때 함숫값이 모두 0이므로 거짓이다.

ㄴ.  $g(x)$ 가  $x = 1$ ,  $x = -1$ 에서 0이므로,  $f(x)$ 의 구멍난 부분이 전부 매워진다. 따라서 참이다.

ㄷ.  $g(x)h(x) = 0$ 이므로, 실수 전체의 집합에서 연속이다.

16.  $R_1$ 에서 4개의 부채꼴의 넓이와 활꼴의 넓이의 합을 구하면 된다.

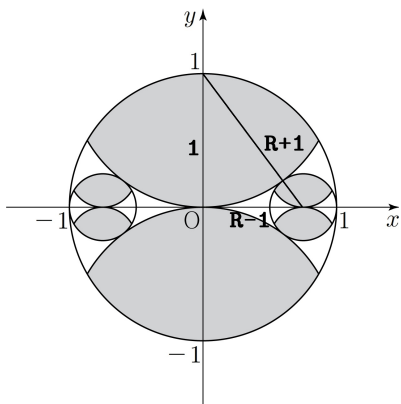


부채꼴의 넓이는  $\frac{\pi}{6}$ , 활꼴의 넓이는

$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로, 위의 그림의 전체의 넓이는

$\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이다. 저 그림과 동일한 그림이  $R_1$ 에

4개 있으므로,  $S_1 = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ 이다. 이제 공비를 구해야 한다.



따라서 피타고라스 정리에 의해  $(R-1)^2 + 1 = (R+1)^2$ 이므로

$4R = 1$ 이다. 따라서  $R = \frac{1}{4}$ 이다. 길이비가  $\frac{1}{4}$ 이므로 넓이비는

$\frac{1}{16}$ 이다. 그것이 2개 있으므로, 실제 넓이비는  $\frac{1}{8}$ 이다.

따라서,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) \frac{8}{7} = \frac{32}{21}\pi - \frac{8\sqrt{3}}{7}$ 이다.

17. (가)는  $\frac{1}{n(n+1)}$ 이다.

(나)에서  $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 을 변변 더하면

$b_n = b_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}$ 이다.  $b_1 = \frac{1}{2}$ 이므로  $b_n = 1 - \frac{1}{n(n+1)}$ 이다.

따라서,  $a_n = n(n+1) - 1$ 이다. 따라서  $f(9) = 1 - \frac{1}{90} = \frac{89}{90}$ 이다.

18.  $\frac{\pi}{2} - x = t$ 로 치환하면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)g(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)g(\cos x)dx$ 이 된다.

$g(\cos x) = f'(\sin x)\cos x$ 이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)f'(\sin x)\cos xdx$ 이다.

$\frac{d}{dx}f(\sin x) = f'(\sin x)\cos x$ 이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)f'(\sin x)\cos xdx = \left[ \frac{1}{2} \{f(\sin x)\}^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 16$ 이다.

19. 이 문항은 해결하는 방법이 2가지이다. 그래프를 그려보면,  $n = 1$ 일 때에만 두 점에서 만나고,  $n > 1$ 일 때에는 한 점에서 만나는 것에 착안하여 구할 수도 있고, 직접 연산을 통해 확인할 수도 있다.

(풀이 1 - 그래프로 확인한 경우)

$n = 1$ 이면  $x - \sqrt{x-1} = 1$ 에서  $x = 1$  또는  $x = 2$ 이다. 따라서  $f(1) = 3$ 이다.

$n > 1$ 이면  $x - \sqrt{x-n} = n^2$ 에서  $x - n^2 = \sqrt{x-n}$ 에서

$x^2 - 2n^2x + n^4 = x - n$ 이므로  $x^2 - (2n^2 + 1)x + n(n^3 + 1) = 0$ 이다.

따라서  $(x - n(n+1))(x - (n^2 - n + 1)) = 0$ 이다.  $x = n^2 - n + 1$ 은 무연근이므로,  $x = n(n+1)$ 이 근이다.

따라서,  $\frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{5}{6}$ 이다.

(풀이 2 - 직접 연산으로 확인)

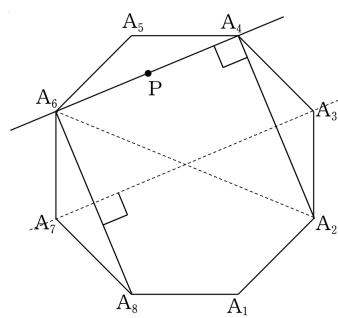
$x - \sqrt{x-n} = n^2$ 에서  $x - n^2 = \sqrt{x-n}$ 에서

$x^2 - 2n^2x + n^4 = x - n$ 이므로  $x^2 - (2n^2 + 1)x + n(n^3 + 1) = 0$ 이다.

따라서  $(x - n(n+1))(x - (n^2 - n + 1)) = 0$ 이다.  $x = n^2 - n + 1$ 을 대입하면,  $n = 1$ 이 나온다. 즉,  $n = 1$ 일 때에만 두 실근을 갖는다.

따라서  $n = 1$ 일 때  $x = 1$ ,  $x = 2$ 이고,  $n > 1$ 일 때  $x = n(n+1)$ 만

근이다. 따라서,  $\frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{5}{6}$ 이다.



20. ㄱ. 삼각형  $A_2A_4A_6$ 이

$\overline{A_2A_4} = \overline{A_4A_6} = 4$ 인

직각이등변삼각형이므로,

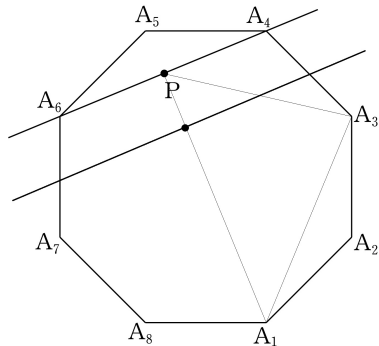
$\overline{A_2A_4} = 2\sqrt{2}$ 이다. 그러므로  $|\overrightarrow{A_2P}|$ 의

최솟값은  $2\sqrt{2}$ 이다. (참)

# 정답 및 해설

ㄷ. 선분  $A_1A_5$ 와 선분  $A_4A_6$ 이 서로 수직이므로  $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{A_1A_5}$ 의 값은 일정하다. (참)

ㄴ.  $|\overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{A_7A_5}| = |\overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{A_1A_3}|$ 이다. 두 벡터의 합은 점  $A_3$ 와 점  $P$ 의 중점을 지난다. 그 중점의 자취는 다음과 같다.



즉, 점  $P$ 를 지나는 직선과 평행하면서, 점  $A_3$ 와 점  $P$ 의 중점을 지나도록 하는 직선이다. 따라서 최소가 되려면, 직선  $A_1A_5$  위에 두 벡터의 합의 중점이 놓이는 경우이다.

따라서 점  $P$ 가 아닌 바로 아래쪽에 점찍은 부분을 점  $Q$ 라 하면,  $|\overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{A_7A_5}|$ 의 최솟값은

$$2|\overrightarrow{A_1Q}| = |\overrightarrow{A_1A_5}| + \frac{1}{2}|\overrightarrow{A_2A_4}| = 4 + \sqrt{2} \text{ 이다. (참)}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 1}{x - 2} = 1 \text{에서 } g'(2) = 1 \text{이고, } g(2) = 1 \text{이므로,}$$

$$f'(1) = 1 \text{이다. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - f(x)}{x} = 3 \text{에서 분자가 } 0 \text{으로 간다.}$$

따라서,  $f(0)g(0) = f(0)$ 이다.

i)  $g(0) = 1$ 인 경우

$g(2) = 1$ 이므로 역함수가 존재하기 위한 조건인 일대일 대응을 만족시키지 못한다.

ii)  $f(0) = 0$ 인 경우

$g(0) = 0$ 이다. 따라서,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x)}{x} = -f'(0) = 3 \text{이다.}$$

따라서,  $f'(0) = -3$ 이다. 그러므로,  $f'(0) + f'(1) = -2$ 이다.

$$22. \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{7}{25} \text{ 이다. 따라서 } p + q = 32 \text{이다.}$$

$$23. \frac{1}{x} = t \text{로 치환한다. } \lim_{x \rightarrow -\infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{\sin t}{t} = 1 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2} \text{이다. } 10(p + q) = 15 \text{이다.}$$

$$24. \text{타원 } \frac{x^2}{3 - b^2} + y^2 = 1 \text{이므로, } b \text{의 범위는 } -\sqrt{3} \leq b \leq \sqrt{3} \text{ 이다.}$$

기울기가 1인 접선의 방정식은  $y = x \pm \sqrt{4 - b^2}$ 이다. 따라서

$a = \pm \sqrt{4 - b^2}$ 이므로 양변 제곱 후 이항하면,  $a^2 + b^2 = 4$ 이다.

즉, 원  $a^2 + b^2 = 4$ 에서  $b$ 의 범위가  $-\sqrt{3} \leq b \leq \sqrt{3}$ 가 되도록 하는 도형의 길이를 뜻한다. 따라서 중심각의 크기가  $240^\circ$ 인 부채꼴의

호의 길이와 같다.  $4\pi \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\pi$ 이다.

25. 선분  $PQ$ 의 길이는 8이다. 따라서 선분  $RF$ 의 길이도 8이다.

준선이  $x = -1$ 이므로, 점  $R$ 을 직선  $x = 4$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하면, 선분  $HF$ 의 길이는 3이다. 따라서 삼각형  $PQR$ 의

넓이는  $8 \times 3 \times \frac{1}{2} = 12$ 이다.

26. 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로, 먼저 미분 불가능한 지점의 후보인 함수가 바뀌는 구간, 즉  $f(x) = f'(x)$ 를 만족시키는  $x$ 를 찾는다. 함수가  $f(x)$ 에서  $f'(x)$ 로 바뀌는 지점이 미분가능하려면 두 함수의 도함수, 즉  $f'(x)$ 와  $f''(x)$ 가 같아야 한다.

$$(1) f(x) = f'(x)$$

$$x^3 + 6x^2 + 15x + a = 3x^2 + 12x + 15 \text{ 일 때이므로,}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + (a - 15) = 0 \text{ 이다.}$$

$$(2) f'(x) = f''(x)$$

$$3x^2 + 12x + 15 = 6x + 12 \text{ 일 때이므로, } 3x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \text{ 이다.}$$

(2)에서 나온  $x$ 의 값을 (1)에 대입하면 된다.

따라서  $-1 + 3 - 3 + (a - 15) = 0$ 이므로  $a = 16$ 이다.

27. 삼각형  $O_1AD$ 와 삼각형  $ACD$ 가 닮음이므로,

$\angle CAD = \angle AO_1D = \theta$ 이다. 따라서 선분  $AD$ 의 길이는

$$2\sin \frac{\theta}{2} \text{ 이다. 사각형 } ACBD \text{는 마름모이므로, 두 대각선의 길이를}$$

$$\text{구하면 된다. 선분 } AB \text{의 길이는 } 4\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \text{ 이고, 선분 } CD \text{의}$$

$$\text{길이는 } 4\sin^2 \frac{\theta}{2} \text{ 이다. 따라서 } f(\theta) = 8\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(\theta)}{\theta^3} = 1 \text{ 이다.}$$

28. 직선을 포함하는 평면과 구의 중심사이의 거리는 직선과 구의 중심사이의 거리와 같거나 짧다. 따라서, 직선을 포함하는 평면이 원의 중심을 지나면 구와 만나는 넓이가 최대가 된다. 이때에는 구의 반지름의 길이가  $\sqrt{6}$ 이므로 넓이는  $6\pi$ 이다.

$$\text{한편, 구의 중심과 직선 사이의 거리는 } x - 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{2} = t \text{에서}$$

$$x = t + 1, y = 2t + 1, z = 2t \text{ 이고, } (0, 0, 0) \text{ 사이의 거리는}$$

$$(t + 1)^2 + (2t + 1)^2 + (2t)^2 = 9t^2 + 6t + 2 = (3t + 1)^2 + 1 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } t = -\frac{1}{3} \text{ 일 때 거리 1이다.}$$

따라서, 이 때 직선을 포함하는 평면과 구가 만나는 원의 넓이는  $(6 - 1^2)\pi = 5\pi$ 이다. 따라서  $p^2 + q^2 = 61$ 이다.

29. 점  $C$ 와 점  $D$ 를 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 각각  $C'$ ,  $D'$ 이라 하자.  $\overline{BC'} = \overline{BD'}$ 이다. (삼각형  $ABC$ 와 삼각형  $ABD$ 가 합동이므로)

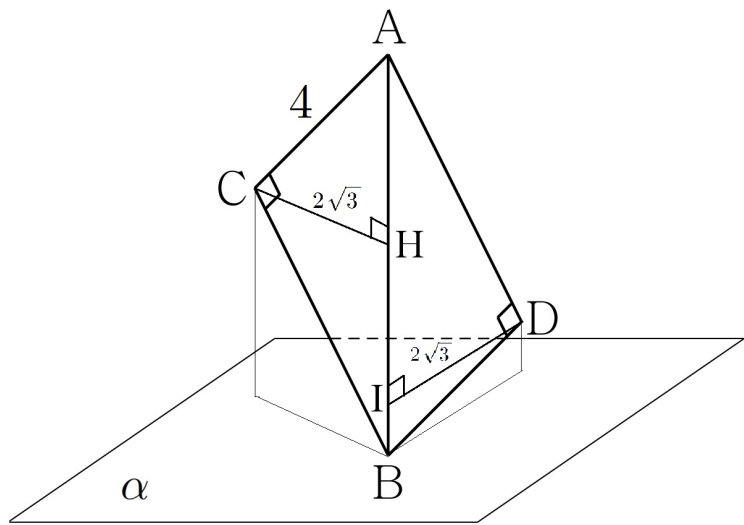
따라서  $\angle B'CD' = 90^\circ$ 이고,  $\overline{BC'} = \overline{BD'} = 2\sqrt{3}$ 이다.

그림에 따르면, 직각삼각형들끼리 전부 닮음이므로,

$$\overline{AH} = \overline{BI} = 2 \text{ 이다.}$$

$$\overline{HI} = 4 \text{ 이므로 } \overline{CD}^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 4^2 = 40 \text{ 이다.}$$

# 정답 및 해설



30.  $a_1$ 부터 해보자. 2로 나눈 몫이 1이 되려면 해당되는 공은 2, 3이다. 3으로 나눈 몫이 1이 되려면 해당되는 공은 3, 4, 5이다. 이와 같은 방식으로 모든 공을 다 지워나가면,  $a_1 = 1$ 임을 알 수 있다.

$a_2$ 인 경우에, 2로 나눈 몫이 2가 되려면 해당되는 공은 4, 5이고, 3으로 나눈 몫이 2가 되려면 해당되는 공은 6, 7, 8이다. 이와 같은 방식으로 모든 공을 다 지워나가면,  $a_2 = 3$ 임을 알 수 있다.

$a_3$ 인 경우에 2로 나눈 것은 6, 7이고, 3으로 나눈 것은 9, 10, 11이고, 4로 나눈 것은 12, 13, 14, 15이다. 이와 같은 방식으로 모든 공을 다 지워나가면  $a_3 = 8$ 이다.

즉,  $a_n$ 은  $k(k \geq 2)$ 으로 나누었을 때 몫이  $n$ 이 되는 것들 중 최댓값과  $k+1$ 로 나눈 몫이  $n$ 이 되는 것들 중 최솟값의 차이가 2만큼 나면 된다. 즉,  $kn + (k-1)$ 과  $(k+1)n$ 이 2만큼 차이날 때의  $kn+k$ 의 값과 같다. (이 문장이 이해가 안되면,  $a_4$ 와  $a_5$  등도 더 해본다.)

$(k+1)n - \{kn + (k-1)\} = n - k + 1 = 2$ 이므로  $k = n-1 (n \geq 3)$ 이고, 이 값을  $kn+k$ 에 대입하면  $n(n-1) + n-1 = n^2 - 1 (n \geq 3)$ 이다. (사실,  $n=2$ 부터 규칙이 성립하지만, 우리는 이 풀이를 그대로 따라가도록 하겠다.)

따라서,

$$1 + 2 + \sum_{n=3}^{10} (n^2 - 1) = 1 + \sum_{n=1}^{10} (n^2 - 1) = 385 - 10 + 1 = 376 \text{이다.}$$

(나열해서 문제의 핵심 원리를 모른 채 규칙을 발견해도 답은 나올 수 있지만 해설지의 연역적 풀잇법도 이해해보기 바랍니다.)

## 5회 정답 및 해설

|         |        |        |        |         |
|---------|--------|--------|--------|---------|
| 1. ④    | 2. ⑤   | 3. ②   | 4. ①   | 5. ⑤    |
| 6. ①    | 7. ④   | 8. ①   | 9. ③   | 10. ①   |
| 11. ④   | 12. ②  | 13. ③  | 14. ⑤  | 15. ②   |
| 16. ②   | 17. ③  | 18. ②  | 19. ③  | 20. ④   |
| 21. ⑤   | 22. 12 | 23. 15 | 24. 20 | 25. 7   |
| 26. 126 | 27. 17 | 28. 10 | 29. 64 | 30. 152 |

1.  $A - B = 2E$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 에서  $AX - BX = (A - B)X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 이다.  
모든 성분의 합은 12이다.

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{5x} - 1) \sin x}{x^2} = 50$ 이므로  $a = 50$ 이다.

3.  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{5}$ 에서  $x=40$ 이므로  $y=40$ 이고,  $z=80$ 이다.

4.  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ 에서  $f(x) = \ln x - \ln(x+1)$ 이므로

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ 이다. 따라서  $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) = 1$ 이다.

5.  $P(A|B) = P(B|A)$ 에서  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 이다.

$P(A \cap B) \neq 0$ 이면  $P(A) = P(B)$ 여야 하는데, 모순이므로

$P(A \cap B) = 0$ 이다.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{8}{15}$ 이다.

6.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 과  $x=3$ 으로 둘러싸인 부분을  $x$ 축의 둘레로

회전시켰으므로,  $\pi \int_1^3 \{f(x)\}^2 dx = \pi \int_1^3 (3x^2 - 3) dx = 20\pi$ 이다.

7.  $y = \log_3 x$ 이  $x$ 축과 만나는 점은  $(1, 0)$ ,  $y = \log_3 x - m$ 이  $x$ 축과 만나는 점은  $(3^m, 0)$ 이다.  $3^m - 1 = 80$ 이므로  $m = 4$ 이다.

8.  $\cos \theta \sin 2\theta = 2\cos^2 \theta \sin \theta$ 이고,  $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{7}{9}$ 이다.

따라서  $\cos^2 \theta = \frac{8}{9}$ 이다. 따라서  $\sin \theta = \frac{1}{3}$ 임을 알 수 있다.

$\cos \theta \sin 2\theta = 2\cos^2 \theta \sin \theta = \frac{16}{27}$ 이다.

9. 원  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 중심  $(1, 1)$ 가 일차변환  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 에

의해 점  $(k, k)$ 로 옮겨진다. 원 위의 점 점  $(0, 1)$ 와 점  $(1, 0)$ 도

각각  $(0, k)$ ,  $(k, 0)$ 으로 옮겨진다. 이에 착안하면, 원은 일차변환에

의해  $(x-k)^2 + (y-k)^2 = k^2$ 으로 옮겨진다. 이 도형이 중심  $(1, 1)$ 을

지나게 하려면,  $2(1-k)^2 = k^2$ 이 됨을 알 수 있다.

따라서  $k^2 - 4k + 2 = 0$ 이므로 모든  $k$ 의 값의 합은 4이다.

– 14 –

# 정답 및 해설

20. 주사위를 한 번만 던져서 도박에 도달할 확률은 네 칸 이상만 가면 되기 때문에  $\frac{1}{2}$ 이다.

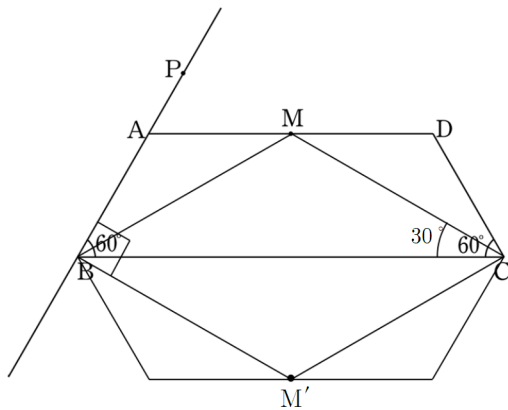
첫 번째 눈이 3인 경우 : 한칸 되돌아가므로, 첫 번째 눈이 2인 경우와 같다.

첫 번째 눈이 2인 경우 : 다음번에 2 이상의 눈이 나오면 되니까 확률은  $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$ 이다.

첫 번째 눈이 1인 경우 : 다음번에 3 이상의 눈이 나오면 되니까 확률은  $\frac{1}{6} \times \frac{2}{3}$ 이다.

따라서,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ 이다.

21.



ㄱ. 점 A와 B를 지나는 직선에 수선의 발 H를 내리면  $\overline{CH} = 2\sqrt{3}$ 이므로  $|\overline{CP}|$ 의 최솟값은  $2\sqrt{3}$ 이다. (거짓)  
 ㄴ. 점 M에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H'이라 할 때,  $\overline{CH} = 3$ ,  $\overline{MH} = \sqrt{3}$ ,  $\overline{MC} = 2\sqrt{3}$ 이므로  $\angle BCM = 30^\circ$ 이다. 선분 CM과 선분 AB가 수직이므로  $\overline{CM} \cdot \overline{CP}$ 의 값은 일정하다. (참)  
 (별해) 선분 AB와 CD를 연장해 큰 정삼각형을 그리면 점 M은 큰 정삼각형의 무게중심이면서 외심, 내심임을 알 수 있다. 꼭지점에서 내심에 그은 선분은 각을 이등분하므로  $\angle BCM = 30^\circ$ 가 성립한다.  
 ㄷ. 점 M을 선분 BC에 대해 대칭시킨 점을 M'이라 하자.  $\overline{M'C} = \overline{BM}$ 이므로 벡터  $\overline{BM}$ 의 중점 M을 점 C로 옮기면  $\overline{M'C} + \overline{CP} = \overline{M'P}$ 이므로  $|\overline{M'P}|$ 의 최솟값을 구하면 된다.  $\angle CBM' = 30^\circ$ 이므로 선분 M'C와 선분 AB가 수직이고,  $\overline{MC} = \overline{M'C} = 2\sqrt{3}$ 이므로  $|\overline{BM} + \overline{CP}|$ 의 최솟값은  $2\sqrt{3}$ 이다. (참)

22.  $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ 이므로,  $\sigma(X) = \sqrt{100 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}} = 4$ 이다.

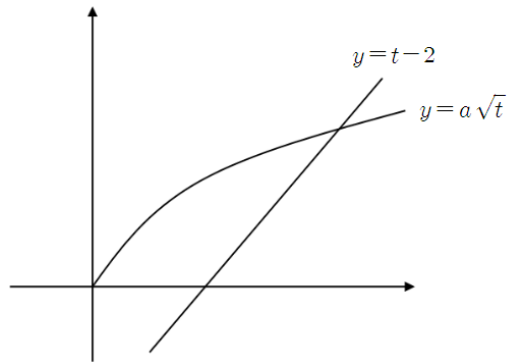
따라서,  $\sigma(3X-1) = 12$ 이다.

23.  $y^2 = 3x$ 의 점 (0, 0)에서의 접선은  $x=0$ 이고, 점 (3, 3)에서의 접선은  $3y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ 이므로  $x=0$ 과의 교점의 y좌표는  $y = \frac{3}{2}$ 이다.

24. (풀이 1)  $x^2 + 4x + 7 = t$ 로 치환하면,  $t-2 = m\sqrt{t}$ 이다. 이 방정식은 무연근 하나, 실근 하나 이런 꼴로 나올 것이다. 따라서  $x^2 + 4x + 7 = t$ 가 완전제곱식이 되어야 실근이 단 하나만 나올 것이다. 그러므로  $t=3$ 이다. 이것을  $t-2 = m\sqrt{t}$ 에 대입하면  $m = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서  $60m^2 = 20$ 이다.

(풀이 2)  $x^2 + 4x + 7 = t$ 로 치환하면  $t$ 의 최솟값은 3이고,  $t-2 = a\sqrt{3}$ 이고,  $y = t-2$ 와  $y = m\sqrt{t}$ 의 그래프를 좌표평면상에 나타내면 다음과 같다.

1)  $y = t-2$ 와  $y = m\sqrt{t}$ 가  $t < 3$ 에서 만나면 실근이 존재하지 않는다.  
 2)  $y = t-2$ 와  $y = m\sqrt{t}$ 가  $t > 3$ 에서 만나면 실근이 2개 존재한다.  
 3)  $y = t-2$ 와  $y = m\sqrt{t}$ 가  $t = 3$ 에서 만나면 실근이 오로지



하나 존재한다.

그러므로  $y = t-2$ 와  $y = m\sqrt{t}$ 는 점 (1, 1)에서 만나고, 대입해

계산하면  $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로  $60m^2 = 20$ 이다.

25.  $10^{-kRt} = \frac{0.05 - Q_t}{0.05 - Q_0}$ 에서 초기의 질소의 비율 0.01%와 1억년

뒤의 질소의 비율 0.04%를 대입하면,  $10^{-kR} = \frac{1}{4}$ 임을 알 수 있다.

반지름이 항성 R의 절반이고, 초기의 질소의 비율이 0.21%일 때 3억년 뒤의 질소의 비율은 p%라 하면,

$10^{-\frac{3}{2}kR} = \frac{0.05-p}{-0.16}$ 이다. 한편,  $10^{-kR} = \frac{1}{4}$ 이므로  $10^{-\frac{3}{2}kR} = \frac{1}{8}$ 이다.

따라서  $\frac{1}{8} = \frac{0.05-p}{-0.16}$ 에서  $p = 0.07$ 임을 알 수 있다.  $100p = 7$ 이다.

26. 두 수열  $a_n, b_n$ 이 등비수열이면 수열  $a_nb_{7-n}$ 도 등비수열이다.

$a_3b_4 = 8$ ,  $a_4b_3 = 16$ 이므로 3항이 8, 4항이 16이다. 즉

$a_nb_{7-n} = 2^n$ 이다. 따라서  $\sum_{n=1}^6 a_nb_{7-n} = 126$ 이다.

27.  $\overline{BP} = \sin \theta$ ,  $\overline{PQ} = \sin \theta \cos \theta$ ,  $\overline{BQ} = \sin^2 \theta$ 이다. 따라서 내접원의

반지름의 길이는  $r = \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta + \sin \theta)}$ 이다.

(밀변을 a, 높이를 b, 빗변을 c라 할 때,  $\frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}ab$  사용)

즉,  $r = \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta}$ 이므로  $f(\theta) = \frac{\sin^4 \theta \cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta + \sin \theta)^2} \pi$ 이다.

$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{f(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}$ 에서  $\frac{\pi}{2}-\theta = t$ 로 치환하면,  $\theta = \frac{\pi}{2}-t$ 이다. 이것을

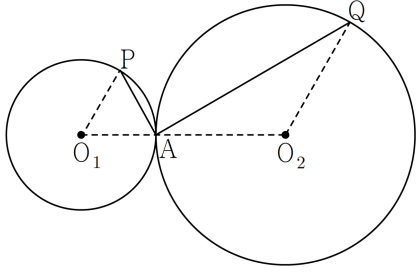
$f(\theta)$ 에 그대로 대입하면,  $f(\theta) = \frac{\cos^4 t \sin^2 t}{(1 + \sin t + \cos t)^2} \pi$ 이다.

$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{f(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{t^2} = \pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\cos^4 t \sin^2 t}{t^2 (1 + \sin t + \cos t)^2} = \frac{1}{4} \pi$

이다. 따라서,  $p^2 + q^2 = 17$ 이다.

## 정답 및 해설

28. 이 문제에 해당하는 그림은 다음과 같다.



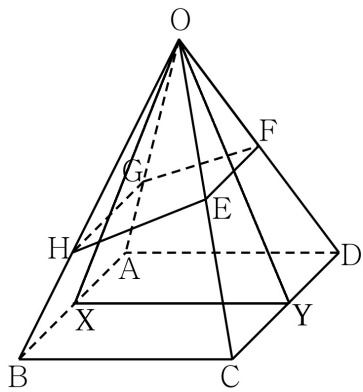
$\angle AO_1P = \theta$ 라 하면,  $\overline{AP} = 2\sin\frac{\theta}{2}$ 이고,  $\overline{AQ} = 2\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}$ 이다.

$\overline{AP} + \overline{AQ} = 2\sin\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} = 4\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 이다.

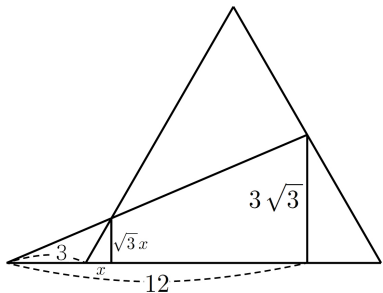
$\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 가 되어야 최대가 되므로,  $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 최대이다.

따라서 최대가 될 때,  $\overline{AP} = 1$ ,  $\overline{AQ} = 3$ 이다. 따라서  $\overline{PQ}^2 = 10$ 이다.

29.



점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 X, 선분 CD의 중점에 내린 수선의 발을 Y라 하면,  $\overline{OX} = \overline{OY} = \overline{XY} = 12$ 이다. 즉, 삼각형 OXY는 정삼각형이다.

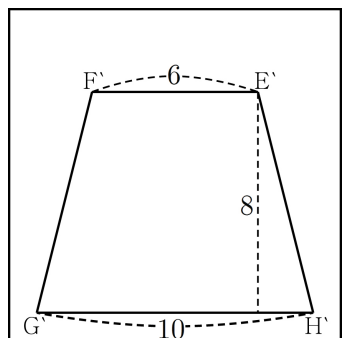


정면에서 바라본 그림은 위의 그림과 같다.

따라서,  $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}x}{3+x} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 여야 한다. 따라서  $x = 1$ 이다.

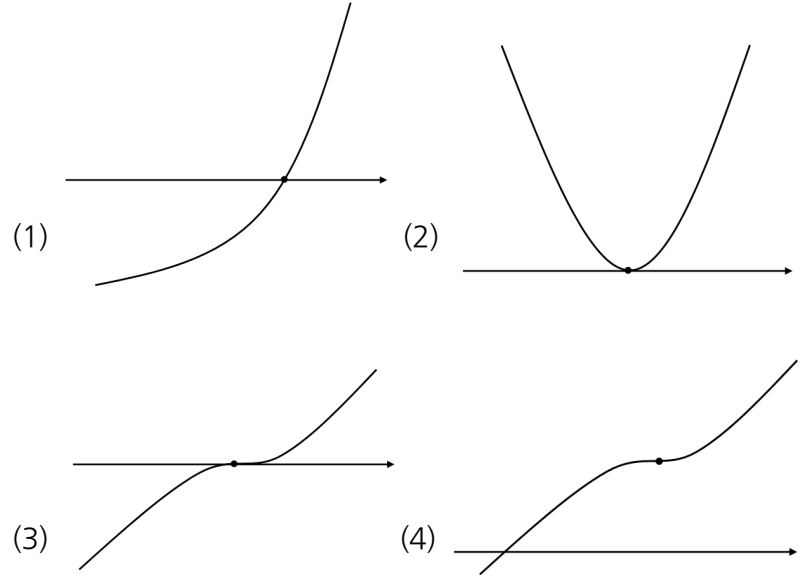
이제, 이 공간도형을 위에서 바라보자. (즉 정사영시킨다.)

사각형 EFGH의 정사영을 E'F'G'H'이라 하면, 다음과 같이 정사영된다.



따라서, 구하고자 하는 넓이는  $(10+6) \times 8 \div 2 = 64$ 이다.

30. 그래프를 그려가며 생각하면 함수  $g(x)h(x)$ 가  $x=a$ 에서 불연속이 되기 위해서는  $f(a)=0$ 이거나  $f'(a)=0$ 이어야 한다는 것을 발견할 수 있을 것이다.

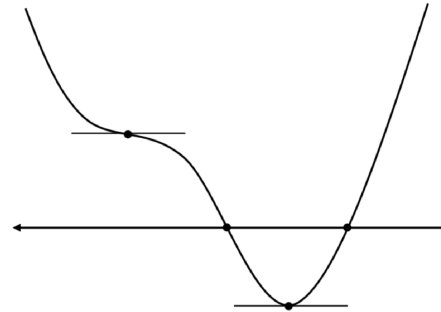


다음과 같이 그래프를 그려가며 함수  $g(x)h(x)$ 가  $x=a$ 에서 불연속이지만  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하는 상황을 생각해보자.

그래프를 그려가며 생각하다 보면 네 번째 그래프와 같이  $f(a) \neq 0$ ,  $f'(a)=0$ 이지만 함수의 증감은 바뀌지 않는 상황일 때만 좌우 극한값이 동일하다는 것을 알 수 있다.

그렇다면  $f'(x)$ 를 이용해 생각하면 가능한 도함수는

$f'(x) = 4x^2(x-a)$ 꼴뿐이라는 것을 알 수 있다.  $f'(a)=0$ 일 때 함수  $g(x)h(x)$ 가  $x=a$ 에서 불연속이고, 함수  $g(x)h(x)$ 는  $x=3$ 에서 불연속이므로 반드시  $a=3$ 이어야 한다는 것을 알 수 있다.



결국  $f(x) = x^4 - 4x^3 + k$ 로 나타낼 수 있다. 그런데 그림과 같이 방정식  $f(x)=0$ 의 근이 둘 이상일 경우 함수  $g(x)h(x)$ 는 반드시 세 점 이상에서 불연속이 된다. 결국, 방정식  $f(x)=0$ 의 근은 오로지 하나만 존재하며,  $x=3$ 일 때 함수  $f(x)$ 의 값이 최소이므로  $f(3)=0$ 이다. 그러므로  $k=27$ 이고,  $f(5)=152$ 이다.