2013학년도 포카칩 모의평가(나형)
정답 및 해설

2012년 포카칩 Team 소개

출제자
이덕영 (연세대학교 수학과) 외 1인

강사 검토위원
권대영 선생님 (現 목동 한림학원 강사)
박주혁 선생님 (現 메가스터디 재수정규반 강사)

학생 검토위원
가철순 (연세대학교 수학과)
곽호연 (서울대학교 수학교육과)
이상민 (서울대학교 기계항공공학부)
이청명 (서울대학교 물리천문학부)
이현기 (연세대학교 화공생명공학부)
정범진 (세명대학교 한의예과)
최소망 (중앙대학교 영어교육과)
허혁재 (연세대학교 컴퓨터과학과)

해설을 시작하면서...

벌써 3년째입니다. 처음에는 몇몇 사람들이 재미로 풀어보던 것이 어느새 많은 이들의 호응을 얻어 정식으로 출판되더니, 최상위권 학생들이 널리 풀어보는 모의고사가 되었습니다. 분에 넘치는 평가를 남겨주시는 마니아들도 생겼습니다. 시중에서 가장 좋다는 평가도 있었고, 감히 평가원 모의평가와 비교하는 분들도 있었습니다.

이 사실이 놀랍고 고마우면서도, 다른 한 편으로는 무거운 책임을 느꼈습니다. 이런 기대에 보답할 수 있는 책을 내기 위해 오랜 시간을 고심하고 노력했습니다. 포카칩 모의평가의 장점과 단점으로 지적받던 부분을 철저히 검토해 모든 면에서 더 좋은 책을 만들어내려고 했습니다.

모든 시험 준비는 나를 제대로 아는 것으로부터 시작합니다. 자신의 위치가 어느 정도인지, 점수를 올리려면 어느 부분을 더 공부해야 하는지, 내가 문제를 푸는 습관과 실수가 어떻게 연결되어 있는지, 시험만 보면 당황하는 습관을 갖고 있지는 않은지. 그런데 이런 것들은, 실전과 최대한 가까운 상황에서 시험을 치러야만 제대로 파악할 수 있습니다.

수능을 준비하면서, 평가원 모의고사를 제외하면 실전과 가까운 모의고사가 없었습니다. 시중 모의고사는 수능시험을 제대로 치러보지 않은 이들이 만들기 때문에 이런저런 문제점들을 갖고 있었습니다. 수능시험의 매뉴얼과는 동떨어졌거나, 100분 안에 도저히 풀어낼 수 없거나, 교과과정 외의 내용이 버젓이 출제되는 식이었습니다.

때문에 많은 시행착오를 거쳐야 했습니다. 수능시험에 나오지 않을 내용을 중요한 것인 양 열심히 공부하기도 했고, 수능 시험장에서 당황해서 어이없이 무너지기도 했습니다. 다른 이들도 이런 시행착오를 겪게 하고 싶지는 않았습니다. 때문에 학생들의 학습에 도움이 될 만한 모의고사를 만들겠다는 생각으로 〈포카칩 모의평가〉를 제작하였습니다.

〈포카칩 모의평가〉를 만들면서, 수험생이 시험장에서 체험하는 100분을 그대로 담아내기 위해 노력했습니다. 먼저 〈포카칩 모의평가〉는 교육과정을 시중에서 가장 완벽하게 반영한 모의고사입니다. 교사용 지도서와 수능출제 메뉴얼을 가지고 철저히 검토하였습니다. 3년간의 〈포카칩 모의평가〉에 출제했던 모든 문제들, 올해 새로 낸 문제들을 수없이 걸러냈습니다. 결국 가장 좋고, 가장 수능에 출제될 가능성이 높은 150문제만이 살아남았습니다. '마무리가 명품을 만든다'는 마음가짐으로 마무리 하나까지도 신경을 썼습니다. 평가원 표지 하나를 재현하기 위해 평가원 PDF 파일에 격자점을 세워서 1mm도 틀리지 않도록 하였습니다. 심지어는 수능 시험지로 쓰이는 종이의 종류를 알아내기 위해 감사원 자료를 뒤지기도 했습니다. 문제의 표현방식, 시험지 양식 하나하나마다 신경을 쓴 흔적이 깃들어 있습니다.

수능 문제를 보면 놀랍게도 나름의 즐거움을 느낄 수 있습니다. 출제자가 수학적 아름다움과 의미, 자신만의 세계를 담아내기 위해 노력하기 때문입니다. 우리는 문제를 내면서 문항에 이런 수학적인 아름다움을 담아내기 위해 노력했습니다. 〈포카칩 모의평가〉를 풀면 퍼즐이나 퀴즈를 푸는 것과 같은 지적인 즐거움을 느낄 수 있을 것입니다.

난이도가 수능에 비해 지나치게 어렵다는 일각의 지적을 받아들여, 난이도를 최대한 현실에 맞췄습니다. 작년 수능의 난이도보다 약간 어렵지만, 아주 어렵지는 않은 수준을 유지하기 위해 노력했습니다. 표지에서 확인할 수 있는 것처럼 여러 단계의 검토과정을 거쳐 생길 수 있는 오타나 오류를 확실하게 잡았습니다.

이런 노력을 기울였기에, 독자들이 〈포카칩 모의평가〉를 단순한 문제집으로 받아들인다면 섭섭할 것입니다. 되도록 실전과 같은 마음가짐으로 모의고사를 풀어 주었으면 좋겠습니다. 모의고사를 풀었다고 모든 일이 끝나는 것은 아닙니다. 문제를 분석하면서 자신이 무엇이 부족한지, 시험장에서는 어떻게 풀어야 할지를 끊임없이 고민하시기를 바랍니다.

수험생에게 〈포카칩 모의평가〉는 좋은 수능 대비 모의고사이겠지만, 그보다는 이 책이 이를 넘어선 나름의 특별함을 갖고 기억되기를 바랍니다. 이 책을 푸는 모든 이들이 사회의 일원이 되었을 때 〈포카칩 모의평가〉가 수학을 통해 즐거움을 느꼈던 하나의 추억으로 남았으면 합니다.

*** 정오표는 http://orbi.kr/core/market/에서 확인하실 수 있습니다.**

*** 등급컷은 포카칩 모의평가 현장 응시 행사가 끝난 뒤, http://orbi.kr/core/market/에 공개하도록 하겠습니다.**

주의 : 해설지의 풀이과정이 아주 친절한 것은 아닙니다. 따라서 해설지를 볼 때에는 문제풀이 아이디어를 얻는다고 생각하시고, 문제와 함께 본인이 능동적으로 풀어봐야 합니다.

정답 및 해설

1회 정답 및 해설

1. ③	2. ③	3. ①	4. ②	5. ②
6. ③	7. ①	8. ⑤	9. ④	10. ②
11. ⑤	12. ④	13. ③	14. ④	15. ⑤
16. ①	17. ①	18. ④	19. ②	20. ⑤
21. ②	22. 12	23. 20	24. 70	25. 19
26. 35	27. 13	28. 255	29. 24	30. 27

1. $3\times 2=6$

2. $AB=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$이므로 $AB-BA=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$이다. 따라서 모든 성분의 합은 0이다.

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+an}+n}{an}=\frac{2}{a}=1$이므로 $a=2$이다.

4. $\log_2 a=\log_4(2+a)$이다. $a^2=a+2$에서 $a=2$ 또는 $a=-1$이다. $a=-1$이면 log 안의 부호가 음수이므로, $a=2$이다.

5. $\mathrm{V}(X)=\frac{16}{9}$이므로 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{9}$이다. 따라서 표준편차는 $\frac{1}{3}$이다.

6. 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{4}{6}$이고, 사건 B가 일어날 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 두 사건 A, B는 서로 독립이므로, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이다.

7. 고선의 파장은 $2^{\frac{83}{12}}$이고, 무역의 파장은 $2^{\frac{89}{12}}$이다.
따라서 $\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1}=2^{\frac{1}{2}}$이다.

8. $\lim_{x\to\infty}f\left(2-\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to\infty}f\left(3+\frac{1}{x}\right)=2+1=3$

9. $\int_0^2\left(\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t+1\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{4}t^2+t\right]_0^2=4+1+2=7$

10. 원 O_1의 넓이는 9π이고, 마름모 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$의 넓이는 $6\sqrt{3}$이다. 한편, 원의 중심에서 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$에 수선의 발을 내리면 원 O_2의 반지름의 길이가 원 O_1의 절반이 됨을 알 수 있다.
원 O_1과 원 O_2의 길이비가 $2:1$이므로, 넓이비는 $4:1$이다.
따라서 넓이는 $(9\pi-6\sqrt{3})\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=12\pi-8\sqrt{3}$임을 알 수 있다.

11. $(a_4+a_7)a_5a_6=a_4a_5a_6+a_5a_6a_7=2$이다.
따라서 $\sum_{n=1}^{8}a_na_{n+1}a_{n+2}=8$이다.

12. $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때, $f(0)=f'(0)=0$이면 $f(x)=ax^2$이다. $\frac{f'(2)}{f(1)}=4$이다.

13. $a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k=\frac{1}{n}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

14. 곡선 $y=x^3-4x+1$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=-4x+1$이다. 곡선 $y=x^2+a$와 접하려면, $y=-4x+1$과 연립했을 때 판별식이 0이면 된다. (미분으로 풀어도 상관없다. 단순히 판별식에 의한 풀이는 $y=x^2+a$가 이차함수이기 때문에 한번 써보는 것일 뿐이다.) $x^2+a=-4x+1$에서 $x^2+4x+(a-1)=0$이다. 따라서 $a=5$이다.

15. ㄱ. A의 역행렬이 존재하면 $AB=2A$에서 $B=2E$이다.
이것을 $BA=B$에 대입하면 $A=E$임을 알 수 있다.
ㄴ. $(AB)^2=ABAB=ABB=2AB$이고,
$(BA)^2=BABA=BAB=2BA$이다. 따라서 $AB=BA$이다.
ㄷ. $(AB+BA)^2=(AB)^2+ABBA+BAAB+(BA)^2$이다.
$(AB)^2=2AB=4A$이고, $(BA)^2=2BA=2B$이다.
$ABBA=ABB=2AB=4A$이고, $BAAB=BAB=2BA=2B$이다.
따라서 $(AB+BA)^2=8A+4B$이다.

16. $H(20)=0.9772$이다. 즉, 평균이 100, 표준편차가 20일 때, $\mathrm{P}(X\ge a)=0.9772$가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하면 된다.
$\mathrm{P}(Z\ge 2)=0.4772$, $\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이므로 $a=60$이다.

17. $(2n+4)a_{n+1}-(2n+4)=(n+1)a_n-(n+1)$에서 $(2n+4)(1-a_{n+1})=(n+1)(1-a_n)$이다.
따라서 $b_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}\times\frac{1}{2}b_n$이다.
귀납적으로 나열하여 변변 곱하면, $b_n=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$임을 알 수 있다.
(가)×(나)$=\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로 $f(4)=\frac{1}{96}$이다.

18. 먼저, $f(50)-g(50)=1-\log 5=\log 2$이다.
$f(n)=0$일 때 : 전부 다 된다. 따라서 1부터 9까지 모든 자연수에 해당된다.
$f(n)=1$일 때 : $-g(n)\le\log 5$, 즉 $g(n)\ge\log 5$이면 된다.
따라서 50부터 99까지 모든 자연수이면 된다. 따라서 59개다.

19. $\mathrm{P}(X=0)={}_2\mathrm{C}_0p^0(1-p)^2=\frac{1}{9}$이므로 $1-p=\frac{1}{3}$에서 $p=\frac{2}{3}$이다. 따라서 $\mathrm{E}(X)=np=\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$이다.

정답 및 해설

20. ⅰ) 마라도나 2번, 펠레 0번 맞출 확률 : $\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{4}$

ⅱ) 마라도나 2번, 펠레 1번 맞출 확률 : $\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times2\right)=\frac{1}{4}$

ⅲ) 마라도나 1번, 펠레 0번 맞출 확률 : $\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{6}$

따라서 ⅰ)+ⅱ)+ⅲ)$=\frac{2}{3}$이다.

21. $x\geq0$일 때 $f(x)+x=2$이고, $x<0$일 때
$f(x)+x=x+2$이다. 따라서, $x\geq0$일 때 $f(x)=2-x$이고,
$x<0$일 때 $f(x)=2$이다.
ㄱ. $f(1)<f(-1)$이다. (거짓)
ㄴ. $g(x)=\int_0^x f(t)dt$이므로, $g'(x)=f(x)$이다. $f(x)=2-x$에서
$x=2$에서 $f(x)$는 0보다 큰 곳에서 0보다 작은 곳으로 가고
있으므로 극댓값을 갖는다. (참)
ㄷ. $g(1)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(2-x)dx=\frac{3}{2}$이고,
$g(-1)=\int_0^{-1}f(x)dx=-\int_{-1}^0 f(x)dx=-2$이다.
$g(1)+g(-1)<0$이다. (거짓)

22. 분모가 0으로 가므로, $a=1$이다. ($b=1$일 수도 있으나,
$a=1$이어도 일반성을 잃지 않으므로 그냥 그대로 차용하겠다.)
따라서, $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-b)}{x-1}=-10$이므로 $1-b=-10$에서
$b=11$이다. 따라서 $a+b=12$이다.

23. 두 연립방정식의 해가 모두 무수히 많아야 한다.
따라서, $-10-ab=0$이므로 $ab=-10$이고, $a+b=0$이어야 한다.
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=20$이다.

24. 평균은 $\int_0^2 x\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{3}\right)dx=\left[\frac{1}{32}x^4+\frac{1}{6}x^2\right]_0^2=\frac{7}{6}$이다.

$60m=70$이다.

25. 첫 번째 뽑았을 때 1이 나오고, 두 번째 뽑았을 때 1이 안나올
확률은 $\frac{1}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{15}$이다.
첫 번째 뽑았을 때 1이 안 나오고, 두 번째 뽑았을 때 1이 나올
확률은 $\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{15}$이다.
따라서 1이 적힌 카드가 두 장일 확률은 $\frac{4}{15}$이다. $a+b=19$이다.

26. $\frac{65-60}{\frac{\sigma}{5}}=\frac{60-x}{\sigma}$이다. 따라서 $x=35$이다.

27. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$은 $x=2$에서 만난다.
따라서, $x<2$일 때, $x=2$일 때, $x>2$일 때를 구분해서 구해야
한다.
$n=1$일 때 : $\overline{\mathrm{P_1Q_1}}=\frac{1}{2}$, $n=2$일 때 : $\overline{\mathrm{P_2Q_2}}=0$이고,
$n>2$일 때 : $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이다. 따라서,
$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$이다.
따라서 $p^2+q^2=13$이다.

28. $\frac{a}{\log_2 a}\in A$에 속하기 위해선, a가 2^k꼴이어야 하고, 그것을
대입해보면 $\frac{2^k}{k}\in A$여야 하는데, 여기서 또 속하기 위해선, $k=2^m$
꼴이어야 한다. 즉, $a=2^{2^m}$(단, a는 자연수, k, m은 0 이상의 정수)
꼴이면 된다. 이제 하나하나 해보자.
$f(3)=1$인데, 그 이유는 $a=2$일 때 속하기 때문이다.
$f(8)=2$인 이유는 $a=2$, $a=4$일 때 속하기 때문이다.
$f(m)=3$이 되는 최초의 m의 값은 m이 16일 때이다.
$f(m)=4$가 되는 최초의 m의 값은 m이 256일 때이다.
따라서 $f(m)=3$이 되게 하는 최댓값은 255이다.

29.
$\int_0^1 f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}f(x)dx+\cdots=32$이다.

한편, $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}f(x)dx$는 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로,

$a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\cdots=2a=32$이다. 따라서, $a=16$이다.

$\int_{\frac{1}{3}}^1 f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=16+8=24$이다.

30. 정답을 맞추는 데에 아주 어려운 문항은 아니다. 열심히
써보면 규칙이 보일 것이다.
$f(2^1)-f(2^0)=2$, $f(2^2)-f(2^1)=2^2+2^1$, $f(2^3)-f(2^2)=2^4+2^3$,
$f(2^4)-f(2^3)=2^6+2^5$, $f(2^5)-f(2^4)=2^8+2^7$, $\cdots$,
$f(2^8)-f(2^7)=2^{14}+2^{13}$이므로 $p+q=27$이다.
(다른 풀이)
$f(2^n)-f(2^{n-1})=2^{n-1}\times\frac{2^{n-1}}{2}+2^n\times\frac{2^{n-1}}{2}=2^{2n-3}+2^{2n-2}$이다.
따라서 $f(2^8)-f(2^7)=2^{14}+2^{13}$이므로 $p+q=27$이다.

정답 및 해설

2회 정답 및 해설

1. ③	2. ④	3. ①	4. ⑤	5. ③
6. ②	7. ①	8. ③	9. ⑤	10. ②
11. ③	12. ①	13. ③	14. ④	15. ④
16. ①	17. ⑤	18. ⑤	19. ④	20. ②
21. ②	22. 19	23. 7	24. 82	25. 22
26. 13	27. 30	28. 28	29. 63	30. 244

1. 답은 4 (생략)

2. $AX+BX=2E$이다. $(A+B)X=2E$에서 $X=\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}$이므로, $(A+B)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=E$이다. 따라서 $A+B=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$임을 알 수 있다.

3. $12p=4$이므로 $p=\dfrac{1}{3}$이다.

4. $\mathrm{P}(B\cup A^C)=\dfrac{4}{5}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\dfrac{1}{5}$이다.
$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{7}{10}$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$이다.

5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+2x-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(x+2)}{x+1}=3$이다.

6. $f(x)=x^4+x^2+2x+1$에서 $f'(x)=4x^3+2x+2$이다.
$f'(-2)=-32-4+2$이고, $f'(2)=32+4+2$이다.
따라서 $f'(-2)+f'(2)=4$이다.
*참고 : 원래 출제의도는, $f(x)=x^4+x^2+1$은 미분할 때 원점대칭함수이므로, $f'(-2)+f'(2)=0$이 반드시 성립한다. 따라서 $f(x)=2x$만 생각하면 풀리는 문항이다.

7. $\mathrm{P}_1=k\left(\dfrac{1}{10}\log\dfrac{400}{1000}+1\right)=0.96k$,
$\mathrm{P}_2=k\left(\dfrac{1}{10}\log\dfrac{500}{1000}+1\right)=0.97k$이므로 $\dfrac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1}=\dfrac{97}{96}$이다.

8. $a_{30}=1$이고, $a_{20}-a_{10}=8$에서 공차가 0.8이므로, $a_n<0$이 되는 최소의 자연수 n은 32임을 알 수 있다.

9. $\int 3x(x-4)\,dx=x^3-6x^2+C$이다. 따라서 $a+b=-5$이다.

10. $\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)+\lim\limits_{x\to1-0}f(2-x)=3+0=3$이다.

11. $\overline{\mathrm{OA}_n}=1$, $\overline{\mathrm{OB}_n}=\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}$이므로, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1$이다.
$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2}=\dfrac{1}{2}$이다.

12. $(2,\ 2)$와 $(3,\ a)$의 기울기는 $x=2$에서의 미분계수와 같다.
따라서 $3\times2^2-3=9$이다. 따라서 $\dfrac{a-2}{3-2}=9$에서 $a=11$이다.

13. ㄱ. 정규분포는 평균에 대해 대칭이므로 $\mathrm{P}(X\ge100)=0.5$이다.
ㄴ. $\mathrm{P}(X\le90)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{90-100}{\sigma_1}\right)$,
$\mathrm{P}(Y\ge105)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{105-100}{\sigma_2}\right)$이다. $\sigma_1=2\sigma_2$이면 성립한다.
ㄷ. $\mathrm{P}(X\le105)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{5}{\sigma_1}\right)$, $\mathrm{P}(Y\le105)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{5}{\sigma_2}\right)$이므로,
$\sigma_1<\sigma_2$이면 $\mathrm{P}(X\le105)>\mathrm{P}(Y\le105)$이다.

14. 4개 중 중복을 허용하여 3개 고르는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_3$이다.
그런데, 피보나치 버거 3개를 구매하게 되면 10000원이 초과하므로, 1개를 빼주어야 한다. 따라서 총 경우의 수는 19이다.

15. 지수방정식, 이차방정식의 두 실근을 각각 α, β라 할 때, 지수방정식에서 $2^\alpha\times2^\beta=a$이고, 이차방정식에서 $\alpha+\beta=3$이다.
따라서 $a=8$이다. 지수방정식을 풀면 $\alpha=1$, $\beta=2$임을 알 수 있다.
$\alpha\times\beta=2$이므로, $b=2$이다. 따라서, $a+b=10$이다.

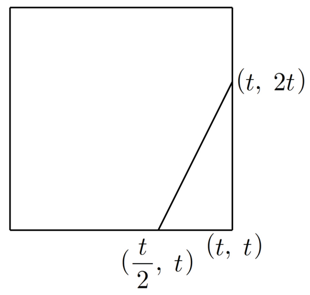
16. 선분 DQ의 길이를 a라 하면, 선분 DP의 길이는 $\dfrac{2}{3}a$이다.
따라서 선분 BQ의 길이도 $\dfrac{2}{3}a$이다. 그러므로 선분 BD의 길이는 $\dfrac{5}{3}a$이다. 한편, 정사각형의 한 변의 길이가 5이므로, 선분 BD의 길이는 $5\sqrt{2}$이기도 하다. 따라서 $a=3\sqrt{2}$이다.
선분 PQ의 길이는 $\sqrt{2}$이므로, 정사각형 PRQS의 한 변의 길이는 1이고, 선분 HG의 길이는 $3\sqrt{2}$이다. 따라서 색칠한 부분의 넓이는 $3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}-2=7$임을 알 수 있다.
한편, 선분 DG의 길이가 3이므로 선분 CG의 길이는 2이다.
따라서 두 번째 항의 정사각형의 넓이는 전체 넓이의 $\dfrac{4}{25}$배이고, 이것이 2개 있으므로, 공비는 $\dfrac{8}{25}$임을 알 수 있다.
첫째항이 7이고 공비가 $\dfrac{8}{25}$인 무한등비급수의 합은 $\dfrac{175}{17}$이다.

17. (가)는 $(n+1)!$, (나)는 $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$이다.
$f(12)-f(11)=13!-12\neq12!(13-1)=12\times12!$이고,
$g(12)-g(11)=\dfrac{1}{12!}$이다. 따라서, $pq=12$이다.

18. $\mathrm{P}(0\le X\le3)=\dfrac{11}{12}$이므로, $\mathrm{P}(3\le X\le4)=\dfrac{1}{12}$이다.
$f(x)$가 $x=2$에서 대칭이므로, $\mathrm{P}(0\le X\le1)=\dfrac{1}{12}$이다.
$\mathrm{P}(0\le X\le3)-\mathrm{P}(0\le X\le1)=\mathrm{P}(1\le X\le3)=\dfrac{5}{6}$이다.

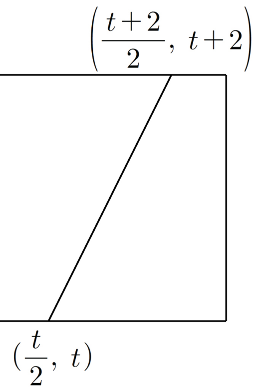
정답 및 해설

19. ⅰ) $0<t<2$일 때



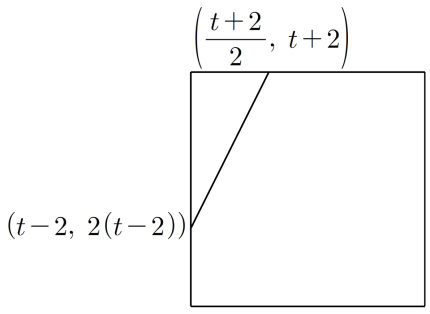
이므로, $f(t)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}t$이다.

ⅱ) $2\le t<4$일 때



이므로, $f(t)=\sqrt{5}$이다.

ⅲ) $4\le t<6$일 때



$f(t)=\sqrt{\left(\dfrac{6-t}{2}\right)^2+(6-t)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(6-t)$이다.

따라서 $t=2$, $t=4$에서만 미분가능하지 않다.

20. a_9까지는 숫자가 계속 증가하다가, a_{10}에서 각자리 수의 합이 1이므로, a_9일 때가 최댓값이다. 따라서, $a_{10}=9$가 된다.

여기서 알 수 있는 것은 $10n+9$꼴 (단, n은 0 이상의 정수)일 때 각 자리 수의 합이 최대가 된다.

$a_{11}=9$, $\cdots$, $a_{18}=9$까지였다가 a_{19}부터 10이 된다.

이와 같은 방식으로 계속하면,

$$\sum_{n=1}^{40}a_n=1+2+3+\cdots+8+9\times10+10\times10+11\times10+12+12$$
$$=36+90+100+110+24=360\text{임을 알 수 있다.}$$

21. ⅰ) $f(n)=0$일 때

$0\le\dfrac{f(60)}{g(60)}$이므로, $f(n)=0$인 모든 자연수 n이 성립한다.

ⅱ) $f(n)=1$일 때

$\dfrac{1}{g(n)}\le\dfrac{1}{g(60)}$이 성립해야 하므로, $n\ge60$인 모든 자연수 n이 성립한다. 따라서 자연수 n의 개수는 48개다.

22. $\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=2(1-a)$, $f(1)=0$이므로 $a=1$이다.

$f(-2)=3$, $f(5)=16$이므로 $f(-2)+f(5)=19$이다.

23. $f(0)=0$, $f'(0)=7$이므로 $f(0)+f'(0)=7$이다.

24. $a_1+a_2+\cdots+a_5=a_1(1+3+3^2+3^3+3^4)=121a_1=121$이다.

따라서 $a_1=1$이다. 따라서 $a_1+a_5=1+81=82$이다.

25. $A(A+3E)=E$이므로 $A^{-1}=A+3E$이다.

$A-A^{-1}=-3E$이므로 $A^2+(A^{-1})^2=11E$이다.

모든 성분의 합은 22이다.

26. 다섯 번째 던진 동전이 앞면이 나올 확률이 $\dfrac{1}{2}$이다. 이 경우 첫 번째~네 번째 동전이 어떻게 던져지든 상관없이 24원 이상을 만족한다.

다섯 번째 던진 동전이 앞면이 안나올 경우, 세 번째 및 네 번째 던진 동전이 모두 앞면이 나와야 하고, 첫 번째 및 두 번째 던진 동전은 무관하다.

따라서 이 경우 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$를 만족시키므로 $\dfrac{1}{8}$이다.

그러므로 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$이다.

27. $(A^2-3AB+B^2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$에서 $A^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=3AB\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$이므로,

$(A^2-3AB+B^2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=B^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$이다.

$B^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$에서 $B^2\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$이고, $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$이므로

$B^2\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=BA\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$이다. 따라서 $BA\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\15\end{pmatrix}$에서

$p+q=30$임을 알 수 있다.

28. $a_n=a_1(r_1)^{n-1}$, $b_n=b_1(r_2)^{n-1}$이다.

$a_{2n-1}=a_1(r_1)^{2n-2}$이므로, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{r_2}{(r_1)^2}\right)^{n-1}=14$가

되기 위해선, $\dfrac{r_2}{(r_1)^2}=1$이어야 하고, $\dfrac{b_1}{a_1}=14$이면 된다.

$b_{2n-1}=b_1(r_2)^{2n-2}$이므로,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{b_1}{a_1}}{1-\left(\frac{(r_2)^2}{r_1}\right)}=\frac{14}{1-(r_1)^3}=16$에서 $r_1=\dfrac{1}{2}$임을 알 수

있다. $r_1=\dfrac{1}{2}$이면 $r_2=\dfrac{1}{4}$이므로, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{14}{1-\frac{1}{2}}=28$이다.

정답 및 해설

29. 역함수가 존재하는 삼차함수는 일대일대응이므로 증가함수 또는 감소함수인데, 최고차항의 계수가 1이므로 증가함수임을 알 수 있다.
따라서 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $y=0$과 한 점에서 만나거나, 만나지 않아야 한다. 그런데, $f'(-1)=0$이므로, $y=f'(x)$의 그래프는 $y=0$과 오직 한 점에서 만나며, 그 점은 $x=-1$임을 알 수 있다. 따라서 $f'(x)=3(x+1)^2$이다. 한편, $f(x)-3x$의 극솟값이 0인데, $y=f'(x)-3$의 그래프는 $x=-2$ 또는 $x=0$에서 만나고, $x=0$에서 음수였다가 양수가 되기 때문에, $f(x)-3x$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 따라서 $f(0)=0$임을 알 수 있다.
$f'(x)=3x^2+6x+3$을 부정적분하면 $f(x)=x^3+3x^2+3x+C$이고, $C=0$이다. 따라서 $f(3)=27+27+9=63$이다.

30. 문제의 예시를 가지고 그래프를 그려보는 것이 문항 해결의 핵심이다. 문제의 예시를 이해하면 아래 풀이가 이해될 것이다.
i) $n<a$이면 교점은 $x>1$인 부분에서 생기며, a의 값이 커질수록 교점의 x좌표는 작아진다.
ii) $n>a$이면 교점은 $0<x<1$인 부분에서 생기며, a의 값이 커질수록 교점의 x좌표는 작아진다.
또한, ii)의 모든 값은 i)의 모든 값보다 작다.
이 두 가지 사실에 착안하면, $f(2)=20$, $f(3)=20$, $f(4)=20$, $f(5)=4$, $f(6)=5$, $f(7)=6$, $\cdots$, $f(20)=19$임을 알 수 있다.
따라서, $20\times3+(4+5+\cdots+19)=60+23\times8=244$이다.

3회 정답 및 해설

1. ④	2. ②	3. ④	4. ⑤	5. ①
6. ④	7. ①	8. ①	9. ④	10. ②
11. ③	12. ②	13. ④	14. ⑤	15. ③
16. ⑤	17. ①	18. ③	19. ③	20. ②
21. ⑤	22. 33	23. 16	24. 21	25. 11
26. 36	27. 19	28. 100	29. 150	30. 804

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$에서 $2A-4E=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$이다. 따라서 모든 성분의 합은 4이다.

2. ${}_5\mathrm{C}_3=10$이다.

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)(n+2)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{9}{n}+\frac{2}{n^2}}{1}=4$

4. $\mathrm{P}(B)$를 x라 하면, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}$이어야 한다.
$\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}$에서 $x=\frac{1}{3}$임을 알 수 있다.

5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)}=2$

6. $2^{\log x}=3^{\log 4}$에서 양변에 $\log$를 취하면
$(\log x)(\log 2)=(\log 3)(\log 4)$이다. 따라서 $x=9$이다.

7. $x=1$에서 연속이므로 $a+3=b+1$이고, 도함수도 같아야 하므로 $a=2b$여야 한다. 두 식을 연립하면 $b=-2$, $a=-4$이다.

8. $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{a+1}{6}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{2a+1}{6}$에서
세 값의 합은 1이어야 한다. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}=1$이므로 $a=1$이다.
$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$이고, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$이다.
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{7}{3}-\frac{16}{9}=\frac{5}{9}$이다.
$\therefore \mathrm{V}(3X+1)=5$

9. $\log\mathrm{P}_1=0.88-0.3=0.58$, $\log\mathrm{P}_2=0.88-0.9=-0.02$이므로,
둘을 빼면 $\log\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_2}=0.6$이다. 따라서 $\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_2}=10^{\frac{3}{5}}$이다.

10. S_1은 1이다. 밑변이 $\frac{3}{4}$배, 높이가 $\frac{1}{2}$배이므로, 넓이는 $\frac{3}{8}$배씩 줄어든다. 따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{8}{5}$이다.

11. 분모가 0에 점점 가까워지므로, 분자도 0에 점점 가까워져야 한다. 따라서 $\sqrt{2-a}-1=0$에서 $a=1$임을 알 수 있다.
$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{1}{2}$이다.
따라서, $a+b=\frac{3}{2}$이다.

12. 수리영역이 1등급인 남학생의 수를 $2k$, 여학생의 수를 k라 하면, 수리영역과 언어영역이 모두 1등급인 남학생의 수는 $0.4k$이고, 수리영역과 언어영역이 모두 1등급인 여학생의 수는 $0.3k$이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{0.3k}{0.4k+0.3k}=\frac{3}{7}$이다.

13. 눈의 수의 합이 2, 3, 5, 7, 11이면 된다.
2인 경우 : $(1,\ 1)$
3인 경우 : $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$
5인 경우 : $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$
7인 경우 : $(1,\ 6)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(5,\ 2)$, $(6,\ 1)$
11인 경우 : $(5,\ 6)$, $(6,\ 5)$
따라서, 눈의 수의 합이 소수일 확률은 $\frac{5}{12}$이다.

정답 및 해설

14. ㄱ. $A^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$에서 $ad-bc=1$이다. (참)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에서 $ad-bc=1$이고, $A+E=\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$에서

$(a+1)(d+1)-bc=(ad-bc)+(a+d)+1=1$이므로 $a+d=-1$이다.

$A+A^{-1}=\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$에서 $(a+d)^2=1$이다. (참)

ㄷ. $ad-bc=1$이고, $a+d=\sqrt{3}$에서 $A-A^{-1}=\begin{pmatrix} a-d & 2b \\ 2c & d-a \end{pmatrix}$이므로

$(a-d)(d-a)-4bc=-(a+d)^2+4(ad-bc)=1$이다. (참)

15. $\int_0^1 kx^2(1-x)dx=\left[\frac{1}{3}kx^3-\frac{1}{4}kx^4\right]_0^1=\frac{1}{12}k=1$이므로

$k=12$이다.

따라서 $\int_0^{\frac{1}{2}} 12x^2(1-x)dx=\left[4x^3-3x^4\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$이다.

16. ㄱ. $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-11)$에서

$f'(x)=(x-2)(x-3)\cdots(x-11)+(x-1)\{(x-2)(x-3)\cdots(x-1)\}'$

이므로, $f'(1)=10!$이다.

ㄴ. $f'(3)=2!8!$이므로 $\frac{f'(1)}{f'(3)}=45$이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{11}\left|\frac{f'(1)}{f'(k)}\right|=\frac{10!}{10!}+\frac{10!}{1!9!}+\frac{10!}{2!8!}+\cdots+\frac{10!}{10!}$

$={}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=1024$이다.

17. (가) $b_n=(-2)\times4^{n-1}=-2^{2n-1}$

$b_n=\frac{a_n+1}{a_n-2}=-2^{2n-1}$에서 양변에 a_n-2를 곱하면

$a_n+1=-2^{2n-1}(a_n-2)$이고, $(2^{2n-1}+1)a_n=2^{2n}-1$이므로,

(나)는 $2^{2n}-1$임을 알 수 있다.

$f(6)=-2^{11}$, $g(4)=2^8-1$이므로 $f(6)\times g(4)=2^{11}-2^{19}$이다.

18. $S_1=S_2$이므로 $S_1-S_2=0$이어야 한다.

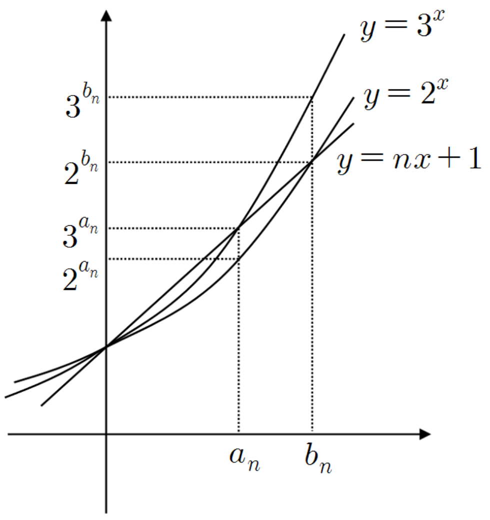
따라서, $\int_0^4\{ax(4-x)-x\}dx=\left[-\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}(4a-1)x^2\right]_0^4$

$=-\frac{64}{3}a+8(4a-1)=\frac{32}{3}a-8=0$

이면 된다. 따라서 $a=\frac{3}{4}$이다.

19. ㄱ. $y=2x+1$는 $(2,\ 5)$, $(3,\ 7)$을 지나고, $y=2^x$는 $(2,\ 4)$, $(3,\ 8)$을 지나므로 $2<b_2<3$이다. (참)

ㄴ. $a_{n+1}>a_n$이고, $3>2$이므로 $3^{a_{n+1}}-3^{a_n}>2^{a_{n+1}}-2^{a_n}$이다. (참)

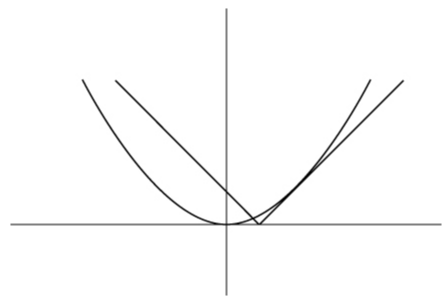


ㄷ. $n(b_n-a_n)=(nb_n+1)-(na_n+1)=2^{b_n}-3^{a_n}$이다.

좌표평면 상에 표시해보면 $2^{b_n}-3^{a_n}<2^{b_n}-2^{a_n}<3^{b_n}-3^{a_n}$임을 알 수 있다. (거짓)

20. 우리나라 20세 남자 1명을 택했을 때 그 사람이 위너일 확률은 $\mathrm{P}(Z\geq1.3)=0.1$이다. 따라서, 위너가 아닐 확률은 0.9이다. 2명 중 1명을 택했을 때 위너일 확률은 $0.1\times0.9\times2=0.18$이다.

21. 문제에서 묻고자 하는 것이 $\lim_{a\to1-0}f(a)$이므로, $a=1$일 때의 상황을 한번 살펴보자.



곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 함수 $y=|x-1|$가 만나서 생기는 교점의 개수인데,

먼저 $x<1$인 경우를 살펴보면,

$y=\frac{1}{4}x^2$과 $y=-x+1$이다. 둘을 연립하고 판별식을 써 보면 두 점에서 만남을 확인할 수 있다.

한편, $x\geq1$인 경우에는 $y=\frac{1}{4}x^2$과 $y=x-1$을 연립했을 때 근이 하나밖에 없다. 즉 접하는 경우이다.

$a\to1-0$으로 갈 경우에 위의 그래프를 참조해보면, $y=|x-a|$가 접하기 직전까지 간다. 따라서, $x<1$과 $x\geq1$인 경우 모두 두 점에서 만난다. 따라서 만나서 생기는 교점의 수는 4개다.

(이 문항이 이해가 잘 안되는 경우, 2012학년도 6평 나형 18번을 참조하면 됩니다.)

22. $a_4-a_1=3d=1$이므로 $a_{100}-a_1=99d=33$이다.

23. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA=2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서 $BA=2A$이다. A의 역행렬이 존재하므로, $B=2E$임을 알 수 있다.

$A^2B=2A^2=\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 16이다.

정답 및 해설

24. $\dfrac{\mathrm{E}(X^2)}{\mathrm{V}(X)}=\dfrac{\{\mathrm{E}(X)\}^2+\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X)}=21$

25. 접선의 방정식은 $y=x+1$이므로 $10a+b=11$이다.

26. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx=17$이므로

$\displaystyle\int_1^3 f(x)dx=34$이다. $f(x)=3x^2+ax$이므로, $26+4a=34$에서

$a=2$임을 알 수 있다.

$\displaystyle\int_0^3(3x^2+2x)dx=27+9=36$이다.

27. $f\left(\dfrac{n+1}{2}\right)<f\left(\dfrac{n}{2}\right)$이 성립하려면 $\dfrac{n}{2}$에서 $\dfrac{n+1}{2}$가 될 때 지표가 1이 커져야 한다. 따라서 $n=19$이다.

28. $\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\a_n\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\a_n-2n\end{pmatrix}$이다.

다라서 $a_n=2n+k$ 꼴이어야만 n에 값에 관계없이 항상 해가 일정할 것이다. $a_1=1$이므로 $k=-1$임을 알 수 있다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(2n-1)=100$이다.

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_{n+1}$의 뜻은 $a_2b_1=a_1b_2$이고, $a_{n+1}b_n$과 a_nb_{n+1}의 공비가 같다는 것을 의미한다.

따라서, $a_2b_1=a_1b_2$, $a_3b_2=a_2b_3$, $\cdots$, $a_{n+1}b_n=a_nb_{n+1}$을 의미한다.

이것은 $\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{b_3}{a_3}=\cdots=\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{3}{5}$을 의미한다.

따라서, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_1\times b_2\times\cdots\times b_n}{a_1\times a_2\times\cdots\times a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{3}{2}$이다.

30. $a_{12}-a_{11}$, 즉 a_{11}에서 a_{12}가 되면서 어떻게 변화하는지를 알아보면 된다. 이를 위해선, a_3에서 a_4로 변화할 때 어떻게 변화하는지를 관찰하는 것이 중요하다.

a_3에서 a_4로 변화할 때, 꼭짓점에 4라는 숫자가 써지고, 4를 중심으로 각 변에 4, 8, 12라는 숫자가 써진다. 이에 착안하여 a_{11}에서 a_{12}가 되면서, 꼭짓점이 12라는 숫자가 써지고, 12를 중심으로 각 변에 12, 24, 36, $\cdots$, 12×11이 써질 것이다.

따라서, $\displaystyle 12+\sum_{k=1}^{11}12k=12+6\times11\times12=804$이다.

4회 정답 및 해설

1. ④	2. ④	3. ②	4. ①	5. ⑤
6. ⑤	7. ③	8. ②	9. ④	10. ②
11. ⑤	12. ①	13. ①	14. ②	15. ④
16. ③	17. ④	18. ①	19. ②	20. ⑤
21. ③	22. 5	23. 55	24. 12	25. 10
26. 18	27. 11	28. 43	29. 24	30. 376

1. $\log_{\frac{1}{2}}4+\log_4\dfrac{1}{2}=-2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}$

2. $(A-B)A^{-1}=A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 1이다.

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x^2-3}=2$

4. $A=\{x\mid 3^x\le 81\}$에서 $x\le4$이고, $B=\left\{x\,\middle|\,\left(\frac{1}{2}\right)^x<8\right\}$에서 $x>-3$이다. 따라서 정수의 개수는 7개다.

5. $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{x^2+2x}{x}=2$

6. 남한 200조각, 북한 300조각이다. 남한의 12%, 즉 24조각이 도시조각이고, 북한의 4%, 즉 12조각이 도시조각이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{24+12}=\dfrac{1}{3}$이다.

7. 기지국까지의 거리가 2km인 컴퓨터 한 대가 데이터를 전송받는 속도는 7Mbps이고, 공유기에 연결된 컴퓨터가 3대이므로 컴퓨터 한 대가 전송받는 속도 v_1은 $v_1=7\log4$이다.

기지국까지의 거리가 4km인 컴퓨터 한 대가 데이터를 전송받는 속도는 6Mbps이고, 공유기에 연결된 컴퓨터가 9대이므로 컴퓨터 한 대가 전송받는 속도 v_2는 $v_2=6\log2$이다. 따라서, $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{7}{3}$이다.

8. $4x(x-2)$일 때, $x=2$에서의 미분계수는 8이고, $x^m(x-2)$일 때 $x=2$에서의 미분계수는 2^m이다. $2^m=8$이므로 $m=3$이다.

9. $\dfrac{37.8-37.5}{0.4}=\dfrac{37.8-x}{0.8}$이다. $0.6=37.8-x$이므로 $x=37.2$이다.

10. $\begin{pmatrix}2&m\\m+1&m^2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$에서 $2(m^2-3)-m(m+1)=0$이므로

$m^2-m-6=0$에서 $m=3$ 또는 $m=-2$이다.

$m=3$이면 해가 무수히 많고, $m=-2$이면 해가 없으므로 $m=-2$이다.

정답 및 해설

11. $\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$이다.

$\mathrm{P}(A)=x$라 하면, $\mathrm{P}(A\cup B)=x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{2}{3}$이므로 $x=\dfrac{1}{3}$이다.

12. $ABA=\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $BAB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ y & 2\end{pmatrix}$이면

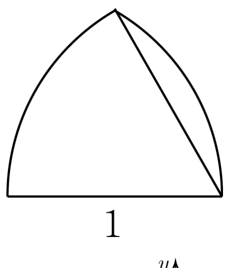
$ABABAB=\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ y & 2\end{pmatrix}$이고, $BABABA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ y & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 1\end{pmatrix}$이다.
$AB=BA$이므로 $ABABAB=BABABA$이다.
따라서 $xy=2$이다.

13. $\mathrm{P}(X=2)=45\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^8$이므로 $m-n=-6$이다.

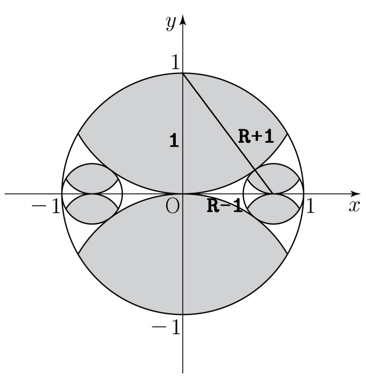
14. 평균 7.4개피, 남성은 7.8개피, 여성은 x개피 피웠다고 가정하자. 우리나라 남성 흡연자 : 여성 흡연자 $=5:1$이므로 평균은 $\dfrac{7.8\times5+x}{6}=7.4$이다. $39+x=44.4$이므로 $x=5.4$이다.
흡연자 16명을 임의추출했을 때 하루 평균 담배 소비량이 6개피 이상일 확률은 $\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{6-5.4}{\dfrac{1.6}{\sqrt{16}}}\right)=\mathrm{P}(Z\ge1.5)=0.0668$이다.

15. 문제의 그래프를 자세히 관찰해보면, $x=1$, $x=-1$에서 원점 대칭이고, 그 이외의 점에서는 y축 대칭임을 확인할 수 있다.
(이걸 어떻게 알아내!! 라고 주장하시는 분들을 위해, 2010학년도 6평 가형 10번을 참조하시기 바랍니다. 또한 이 사실을 몰라도, 약간의 노가다로 충분히 해결할 수 있습니다.)
따라서, $g(x)$는 $x\neq1$, $x\neq-1$에서 $2f(x)$이고,
$x=1$, $x=-1$에서 0이다.
ㄱ. (거짓)
ㄴ. $g(x)$가 $x=1$, $x=-1$에서 0이므로, $f(x)$의 구멍난 부분이 전부 매워진다. 따라서 참이다.
ㄷ. $x=1$, $x=-1$에서 $g(x)=0$으로 가기 때문에, $f(x)$의 불연속인 부분이 곱해지면서 전부 0으로 수렴한다. 따라서 참이다.

16. R_1에서 4개의 부채꼴의 넓이와 활꼴의 넓이의 합을 구하면 된다.



부채꼴의 넓이는 $\dfrac{\pi}{6}$, 활꼴의 넓이는 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이므로, 위의 그림의 전체의 넓이는 $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이다. 저 그림과 동일한 그림이 R_1에 4개 있으므로, $S_1=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$이다.



이제 공비를 구해야 한다.
따라서 피타고라스 정리에 의해 $(R-1)^2+1=(R+1)^2$이므로
$4R=1$이다. 따라서 $R=\dfrac{1}{4}$이다.

길이비가 $\dfrac{1}{4}$이므로 넓이비는 $\dfrac{1}{16}$이다. 그것이 2개 있으므로,
실제 넓이비는 $\dfrac{1}{8}$이다.

따라서, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)\frac{8}{7}=\frac{32}{21}\pi-\frac{8\sqrt{3}}{7}$이다.

17. (가)는 $\dfrac{1}{n(n+1)}$이다.
(나)에서 $b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$을 변변 더하면
$b_n=b_1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n(n+1)}$이다. $b_1=\dfrac{1}{2}$이므로 $b_n=1-\dfrac{1}{n(n+1)}$이다.
따라서, $a_n=n(n+1)-1$이다. 따라서 $f(9)=1-\dfrac{1}{90}=\dfrac{89}{90}$이다.

18. $\displaystyle\int_x^{x+3}f(t)\,dt=x^2+x+1$에서 $x=1$을 대입하면
$\displaystyle\int_1^4 f(x)dx=3$이고, $x=4$를 대입하면 $\displaystyle\int_4^7 f(x)dx=21$이다.
따라서 $\displaystyle\int_1^7 f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx=24$이다.

19. $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+x}{x^{n+1}+1}$에서 $x>1$이면 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,
$x=1$이면 $f(x)=1$, $0<x<1$이면 $f(x)=x$이다.
따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right)=f(2)+f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots$에서
$f(2)=\dfrac{1}{2}$, $f(1)$부터는 $f(x)=x$를 만족한다.
따라서 $\displaystyle\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{5}{2}$이다.

20. $y=x^4+3x-2$에서 $y'=4x^3+3$이다.
$4x^3+3=7$이 되려면 $x=1$일 때이다. $(1,\ 2)$를 지나기 때문에, 접선의 방정식은 $y=7x-5$이다. 따라서 y절편은 -5이다.

21. $f(x)\le f(10)$이므로 x는 100 미만의 자연수이다.
$g(x+10)\le g(x)$에서 $x+10$일 때의 지표가 x일 때의 지표보다 더 커야 한다. (그래야 가수가 확 줄어들기 때문이다.) 따라서,
i) 지표가 0일 때
$x=2$부터 $x=9$까지 된다.
ii) 지표가 1일 때
$x=90$, 91, 92, $\cdots$, 99까지 된다. 따라서, 총 18가지이다.

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}=5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=5$이다.

23. $f(x)=x^3-3x^2-9x+50$을 미분하면 $f'(x)=3x^2-6x-9$이다.
$f'(x)=0$이 되는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.
$x=-1$에서 $f'(x)$가 양수였다가 음수이므로, 극댓값을 갖는다.
따라서 $f(-1)=-1-3+9+50=55$이다.

정답 및 해설

24. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$도 등비수열이다. 따라서, $a_2a_4=3$, $a_3a_6=6$이면 $a_4a_8=12$이다.

25. $\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\frac{9}{a_3}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}=(n+1)^3$이고,

$\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\frac{9}{a_3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{a_{n-1}}=n^3$이다.

위 둘을 빼면 $\frac{n^2}{a_n}=3n^2+3n+1$이다. 따라서 $a_n=\frac{n^2}{3n^2+3n+1}$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+3n+1}=\frac{1}{3}$이다. 따라서 $30p=10$이다.

26. $pa_5=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_q$이므로, 수열 $a_n=a_1+(n-1)d$라 하면,

$p(a_1+4d)=qa_1+\frac{q(q-1)}{2}d$이다.

따라서, $p=q$이고, $4p=\frac{q(q-1)}{2}$이다.

$q^2-9q=0$이므로 $q=9$, $p=9$이다. 따라서 $p+q=18$이다.

27. $(x+1)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$의 x^{m-2}의 계수는

${}_m\mathrm{C}_0\times{}_n\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_0$이다.

(준식)$=\frac{n(n-1)}{2}+mn+\frac{m(m-1)}{2}=\frac{1}{2}(m+n)^2-\frac{1}{2}(m+n)$이다.

$(m+n)^2-(m+n)=110$이므로 $(m+n+10)(m+n-11)=0$이다.

그러므로 $m+n=11$이다.

28. i) A색 카드가 2장 뽑힐 확률 × 모두 제대로 인식할 확률

$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$

ii) A색 1장, B색 1장 뽑힐 확률 × 모두 제대로 인식할 확률

$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

iii) B색 카드가 2장 뽑힐 확률 × 모두 제대로 인식할 확률

$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{40}$

따라서, $\frac{2}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{40}=\frac{43}{120}$이다. 따라서 $120p=43$이다.

29. $g(x)=\int_0^x f(t)dt$이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면,

$g(x)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx$라 할 수 있다.

$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}bx^2\right)dx=\frac{1}{3}b=8$이므로 $b=24$이다.

$f(x)=ax^2+24x+c$에서 $f'(0)=24$이다.

30. a_1부터 해보자. 2로 나눈 몫이 1이 되려면 해당되는 공은 2, 3이다. 3으로 나눈 몫이 1이 되려면 해당되는 공은 3, 4, 5이다. 이와 같은 방식으로 모든 공을 다 지워나가면, $a_1=1$임을 알 수 있다.

a_2인 경우에, 2로 나눈 몫이 2가 되려면 해당되는 공은 4, 5이고, 3으로 나눈 몫이 2가 되려면 해당되는 공은 6, 7, 8이다. 이와 같은 방식으로 모든 공을 다 지워나가면, $a_2=3$임을 알 수 있다.

a_3인 경우에 2로 나눈 것은 6, 7이고, 3으로 나눈 것은 9, 10, 11이고, 4로 나눈 것은 12, 13, 14, 15이다. 이와 같은 방식으로 모든 공을 다 지워나가면 $a_3=8$이다.

즉, a_n은 $k(k\geq2)$으로 나누었을 때 몫이 n이 되는 것들 중 최댓값과 $k+1$로 나눈 몫이 n이 되는 것들 중 최솟값의 차이가 2만큼 나면 된다. 즉, $kn+(k-1)$과 $(k+1)n$이 2만큼 차이날 때의 $kn+k$의 값과 같다. (이해가 안되면, a_4와 a_5 등도 더 해본다.)

$(k+1)n-\{kn+(k-1)\}=n-k+1=2$이므로 $k=n-1(n\geq3)$이고, 이 값을 $kn+k$에 대입하면 $n(n-1)+n-1=n^2-1(n\geq3)$이다.

(사실, $n=2$부터 규칙이 성립하지만, 우리는 이 풀이를 그대로 따라가도록 하겠다.) 따라서,

$1+2+\sum_{n=3}^{10}(n^2-1)=1+\sum_{n=1}^{10}(n^2-1)=385-10+1=376$이다.

(나열해서 문제해결의 핵심 원리를 모른 채 규칙을 발견해도 답은 나올 수 있지만, 해설지의 연역적 풀잇법도 이해해보기 바랍니다.)

5회 정답 및 해설

1. ④	2. ⑤	3. ⑤	4. ①	5. ①
6. ②	7. ④	8. ④	9. ③	10. ①
11. ⑤	12. ③	13. ①	14. ⑤	15. ③
16. ②	17. ③	18. ②	19. ②	20. ④
21. ③	22. 27	23. 21	24. 12	25. 20
26. 126	27. 135	28. 7	29. 237	30. 29

1. $A-B=2E$, $X=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$에서

$AX-BX=(A-B)X=2X=\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}$이다. 모든 성분의 합은 12이다.

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+1}{3^{n-1}-2^n}=9$ (12쪽 안으로 나형 해설을 커팅 해야 해서 부득이하게 생략합니다. 해설이 궁금하면 친구들에게 물어보시길...)

3. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{4}$

4. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$를 미분하면, $f'(x)=x^2-4x+3$이다.

$f'(x)=0$이 되게 하는 것은 $x=1$, $x=3$이다. $x=1$에서 극댓값을 가지고, $x=3$에서 극솟값을 가진다. 따라서 $a=1$이다.

5. $5^{-2}\leq5^{x-4}\leq5^2$이므로 $5^2\leq5^x\leq5^6$이다. 따라서 20이다.

정답 및 해설

6. $\frac{a_3+a_5}{a_2+a_4}=6$이므로 $\frac{a_3+a_5}{2a_3}=6$에서 $\frac{a_3+a_5}{a_3}=12$이다.

따라서 $\frac{a_5}{a_3}=11$이다.

7. $y=\log_3 x$이 x축과 만나는 점은 $(1,\ 0)$, $y=\log_3 x-m$이 x축과 만나는 점은 $(3^m,\ 0)$이다. $3^m-1=80$이므로 $m=4$이다.

8. $(x+a)^6$에서 x^2의 계수는 ${}_6C_2\times a^4$이고, x^3의 계수는 ${}_6C_3\times a^3$이다. $p=6q$이므로 ${}_6C_2\times a^4=6\times{}_6C_3\times a^3$이다. 따라서 $15a=120$이다. 그러므로 $a=8$이다.

9. $g(m)=\lim\limits_{x\to m+0}f(x)$ 이다.

$g(1)=1$, $g(2)=1$, $g(3)=g(-1)=2$, $g(4)=g(0)=1$,
이 이후로는 주기를 띄며 반복한다.

$\sum\limits_{m=1}^{10}g(m)=(1+1+2+1)+(1+1+2+1)+(1+1)=12$이다.

10. $a=\frac{1}{2}$ 이다.

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{4}+1+\frac{3}{4}=2$이고, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{4}+2+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$ 이다.

따라서 $\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

11. $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$에서 $\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 이다.
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq 0$이면 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$여야 하는데, 모순이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이다. $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{8}{15}$ 이다.

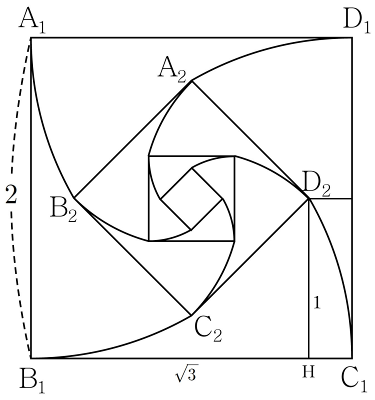
12. $\int_1^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx-\int_0^3 f(x)dx=3$

13. A^2의 $(1,\ 1)$성분은 한 꼭짓점에서 다른 꼭짓점으로 갔다가 되돌아올 수 있는 경우의 수이다. 한 꼭짓점에 연결된 경로의 수가 최대인 것은 4개다.

14. ㄱ. $(BA)^2=A$에서 $(BA)^4=A^2$이고, $A^2-B^2=E$에서 $A^2=B^2+E$이므로 $(BA)^4=B^2+E$이다.
ㄴ. $(BA)^4-B^2=E$이므로 $B((AB)^3A-B)=E$이다. 따라서 B의 역행렬이 존재한다.
ㄷ. $B((AB)^3A-B)=E$에서 곱셈 순서를 바꾸면 $((AB)^3A-B)B=E$이므로 $(AB)^4-B^2=E$이다. 따라서 $(AB)^4=B^2+E$이다.

15. 근무기간이 12개월인 직원의 성과급은 평균이 $12a+200$이다. 160만원 이하일 확률은 $\mathrm{P}\left(Z\le\frac{160-(12a+200)}{50}\right)=\mathrm{P}(Z\le-2)$이다.
따라서, $a=5$이다.
근무기간이 36개월인 직원의 성과급은 평균이 380만원이다.
따라서, $\mathrm{P}(330\le X\le 505)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2.5)=0.8351$이다.

16. 다음 그림을 참조한다.



선분 $\overline{C_1H}$의 길이는 $2-\sqrt{3}$임을 알 수 있다. 따라서
$\overline{B_2D_2}=2-2(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-2$이다.
따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는 $\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-2)^2=8-4\sqrt{3}$ 이다.
따라서 넓이비는 $2-\sqrt{3}$ 이다.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{4}{\sqrt{3}-1}=2(\sqrt{3}+1)$이다.

17. (가) $a_{m+1}=\frac{m+1}{m(m+2)}a_m=\cdots=\frac{2(m+1)}{(m+2)!}a_1$이다.

(나) $1-\frac{1}{(m+2)!}$이다. 따라서 $\frac{f(5)}{1-g(6)}=\frac{2\times 6\times 8!}{7!}=96$이다.

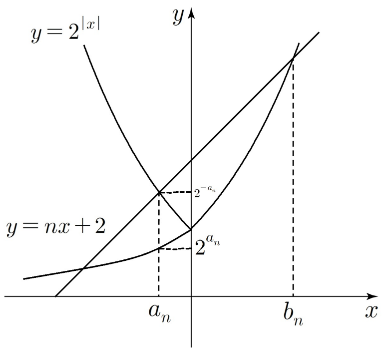
18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(0)}{2x}=3$에서 $f(0)=f(1)$이므로
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=f'(1)=6$이다. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(1)}{x}$에서
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}=f'(0)=4$이다. 따라서 $f'(0)-f'(1)=-2$이다.

19. $(b_n)^2=(a_n)^2$에서 수열 b_n의 의미는 수열 b_n의 절댓값은 등비수열을 의미한다.
$2<\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<3$이기 위해선, 일단 $b_1=8$이어야 한다. $b_1=-8$일 경우 b_2부터 차례로 $+4$, $+2$, $\cdots$이렇게 진행되어도 절대 저 범위 안에 들어갈 수 없기 때문이다. $b_2=-4$인데, 마찬가지 이유에서다. $b_3=-2$, $b_4=1$임을 알 수 있다. 따라서 $b_2+b_4=-3$이다.

20. 주사위를 한 번만 던져서 도착에 도달할 확률은 네 칸 이상만 가면 되기 때문에 $\frac{1}{2}$이다.
첫 번째 눈이 3인 경우 : 한칸 되돌아가므로, 첫 번째 눈이 2인 경우와 같다.
첫 번째 눈이 2인 경우 : 다음번에 2 이상의 눈이 나오면 되니까 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$이다.
첫 번째 눈이 1인 경우 : 다음번에 3 이상의 눈이 나오면 되니까 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}$이다.
따라서, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times 2+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$이다.

정답 및 해설

21. ㄱ. $n+1$일 때에는 더 기울어지므로, $a_n < a_{n+1}$이다. 따라서 양변을 a_n으로 나누면 부등호 방향이 바뀐다. 따라서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$이다.



ㄴ. 그림에서 알 수 있듯이, $y=nx+2$에서 $x=a_n$일 때의 점과, $y=2^x$에서 $x=a_n$일 때의 점의 크기를 비교해보면, $2^{a_n} < na_n+2$임을 알 수 있다.

ㄷ. $2^{b_n}=nb_n+2$이고, $2^{a_n} < na_n+2$이다.
따라서, 둘을 빼면 $2^{b_n}-2^{a_n} > n(b_n-a_n)$이다.

22. $-\int_0^3 4x^2(x-3)\,dx = \int_0^3 (12x^2-4x^3)\,dx = \left[4x^3-x^4\right]_0^3 = 27$

23. $\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$에서 $-4+2a=0$이므로 $a=2$이고, $-4b+4=0$이므로 $b=1$이다. 따라서 $10a+b=21$이다.

24. $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$이므로, $\sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=4$이다.
따라서, $\sigma(3X-1)=12$이다.

25. $\int_0^x tf(t)\,dt=10x^2$에서 양변을 미분하면 $xf(x)=20x$이다.
$x \neq 0$일 때, $f(x)=20$이다. $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(0)=20$이다.

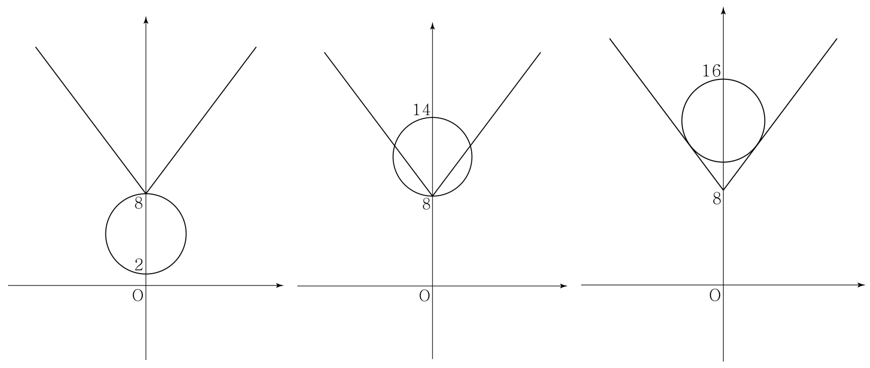
26. 두 수열 a_n, b_n이 등비수열이면 수열 a_nb_{7-n}도 등비수열이다.
$a_3b_4=8$, $a_4b_3=16$이므로 3항이 8, 4항이 16이다.
즉, $a_nb_{7-n}=2^n$이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{6} a_nb_{7-n}=126$이다.

27. $y=x^3+bx+a$의 $x=t$에서의 접선의 방정식은
$y=(3t^2+b)(x-t)+t^3+bt+a$, 이 식을 정리하면
$y=(3t^2+b)x-2t^3+a$이다. 이것이 $y=ax+b$와 같아야 하므로,
$3t^2+b=a$, $-2t^3+a=b$이다. 우리가 구해야 할 것은 $a-b$이다.
$3t^2+b=a$에서 $a-b=3t^2$이고, $-2t^3+a=b$에서 $a-b=2t^3$이다.
$3t^2=2t^3$에서 $t=\frac{3}{2}$이다. 따라서 $a-b=\frac{27}{4}$이다. $20(a-b)=135$.

28. $10^{-kRt}=\frac{0.05-Q_t}{0.05-Q_0}$에서 초기의 질소의 비율 0.01%과 1억년 뒤의 질소의 비율 0.04%를 대입하면, $10^{-kR}=\frac{1}{4}$임을 알 수 있다.
반지름이 항성 R의 절반이고, 초기의 질소의 비율이 0.21%일 때 3억년 뒤의 질소의 비율은 p%라 하면,
$10^{-\frac{3}{2}kR}=\frac{0.05-p}{-0.16}$이다. 한편, $10^{-kR}=\frac{1}{4}$이므로 $10^{-\frac{3}{2}kR}=\frac{1}{8}$이다.
따라서 $\frac{1}{8}=\frac{0.05-p}{-0.16}$에서 $p=0.07$임을 알 수 있다. $100p=7$이다.

29. $A=\left\{k\,\middle|\,k\text{는 자연수, }\left|\log\frac{k}{10}\right|\le f(n)\right\}$의 뜻을 잘 이해하는 것이 매우 중요하다. $g(12)=4$는 $\left|\log\frac{k}{10}\right|\le\log1.2$를 만족시키는 자연수 k의 개수가 4개라는 뜻인데, 이것은 $k=9$, 10, 11, 12라는 의미이다. $g(20)$을 구해보자. $\left|\log\frac{k}{10}\right|\le\log2$를 만족시켜야 하므로, $k=5$, 6, 7, $\cdots$, 20이므로 16개다. $g(21)$은 k의 최솟값은 같고, 최댓값만 1 커지므로, 17개다. 이와 같은 방식으로 최댓값만 계속 1씩 커지는데, 최솟값이 더 작아지는 시점은 $k=4$일 때, $n=25$일 때 최솟값이 하나 커진다.
따라서, $16+17+18+19+20+22+23+24+25+26+27$을 구하면 된다. $90+49\times3=237$임을 알 수 있다.

30. 원 $x^2+(y-t)^2=9$가 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$과 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 한다. 따라서, t값을 조절해가면서 함수 $y=\frac{3}{4}|x|+8$과 만나는 점의 개수를 세어보면 된다.



이 세 그림일 때 만나는 점의 개수가 바뀐다.
따라서 $t=5$일 때, $t=11$일 때, $t=13$일 때 불연속이다.