2013학년도 포카칩 직전모의평가 문제지

제 2 교시

수리 영역(가형)

짝수형

5지선다형

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A-2B$의 모든 성분의 합은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2. 두 사건 A와 B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? (단, B^C는 B의 여사건이다.) [2점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

3. 일차변환 $f:\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$에 의하여 점 $(1,\,-1)$이 옮겨지는 점의 좌표는? [2점]

① $(2,\,0)$ ② $(2,\,2)$ ③ $(3,\,0)$
④ $(4,\,0)$ ⑤ $(4,\,2)$

4. 좌표평면에서 곡선 $y=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$위의 점 $(0,\,a)$에서의 접선의 기울기를 b라 할 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

5. 다섯 개의 문자 A, B, C, D, E가 하나씩 적혀 있는 공이 각각 3개씩 있다. 이 중에서 3개의 공을 뽑을 때, A가 적혀 있는 공이 1개 이상 나오는 경우의 수는? (단, 공을 뽑는 순서는 고려하지 않는다.) [3점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

6. 좌표평면에서 두 점 A$(-3, 0)$, B$(0, 3)$과 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 한 점 P를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

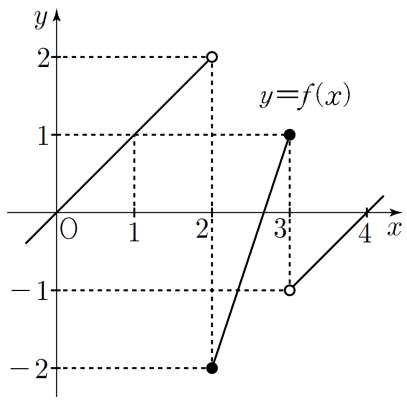
7. 보일러에 공급되는 물의 불순물을 배출하기 위해 블로우 다운 장치를 사용한다고 한다. 이 장치를 사용하기 전 불순물의 농도를 d_0, 이 장치를 t초 동안 사용한 후의 불순물의 농도를 d_t이라 할 때, 다음 관계가 성립한다.

$$d_t - 5 = a^{-3t}(d_0 - 5) \quad (\text{단, } a\text{는 양의 상수이다.})$$

불순물의 농도가 85인 물에 블로우 다운 장치를 t_1초 동안 사용한 후의 불순물의 농도가 25, 이 장치를 t_2초 더 사용한 후의 불순물의 농도를 7.5라 하자. $\frac{t_2}{t_1}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0} f(-x)=-1$

ㄴ. $\{f(x)\}^2$은 $x=2$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)f(1-x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

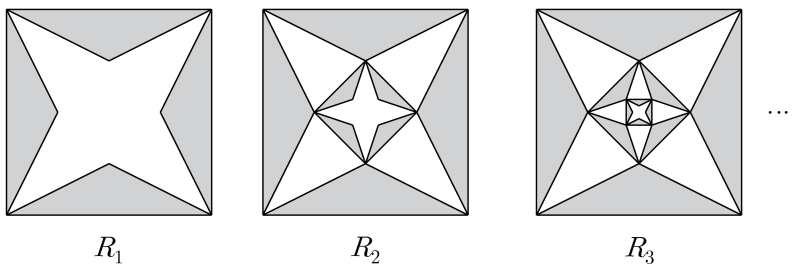
9. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형이 있다.

정사각형의 각 변을 밑변으로 하고, 높이가 밑변의 길이의 $\frac{1}{4}$인 이등변삼각형 4개를 그린다. 4개의 이등변삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1의 4개의 이등변삼각형의 꼭짓점 중 정사각형의 꼭짓점이 아닌 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그린다. 이 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 이등변삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

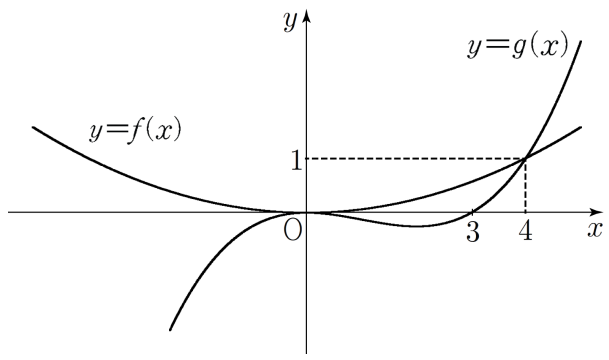
그림 R_2의 작은 4개의 이등변삼각형의 꼭짓점 중 정사각형의 꼭짓점이 아닌 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그린다. 이 정사각형 안에 그림 R_2을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 이등변삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 이등변삼각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

10. 이차함수 $y=f(x)$와 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$g(3)=0$이고, $f(4)=g(4)=1$일 때, 부등식

$$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}\le\frac{2}{f(x)g(x)}$$

를 만족시키는 자연수 x의 개수는? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

11. 철수와 영희를 포함한 5명의 학생이 영화를 관람하기 위해 그림과 같이 5자리를 예약했다.

10열	A	B	
11열	A	B	C

5명이 임의로 5장의 티켓을 나누어 가질 때, 철수와 영희가 같은 열에 서로 이웃하여 앉을 확률은? [3점]

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{20}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{7}{15}$

12. $0\le x<2\pi$일 때, 삼각방정식

$$\cos x-\cos 2x=a(1-\cos x)$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

13. 4개의 음반 회사의 시장점유율은 다음과 같다.

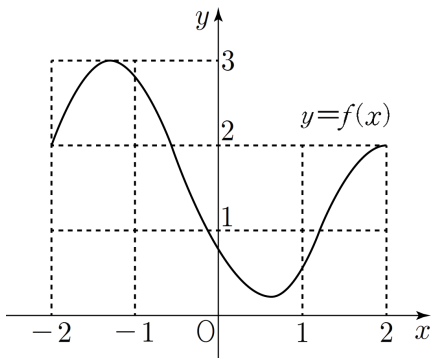
음반 회사	A	B	C	D	계
점유율(%)	20	28	10	42	100

음반을 구매한 사람 중 225명을 임의추출하여 조사할 때, 27명 이상이 C 회사의 음반을 구매한 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332

① 0.0668 ② 0.1587 ③ 0.1915
④ 0.3085 ⑤ 0.3413

14. 열린 구간 $(-2, 2)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $g(x)=xf(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)<g'(0)$
ㄴ. 함수 $g(x)$는 구간 $(-1, 0)$에서 증가한다.
ㄷ. $g'(c)=2$인 c가 적어도 2개 존재한다.

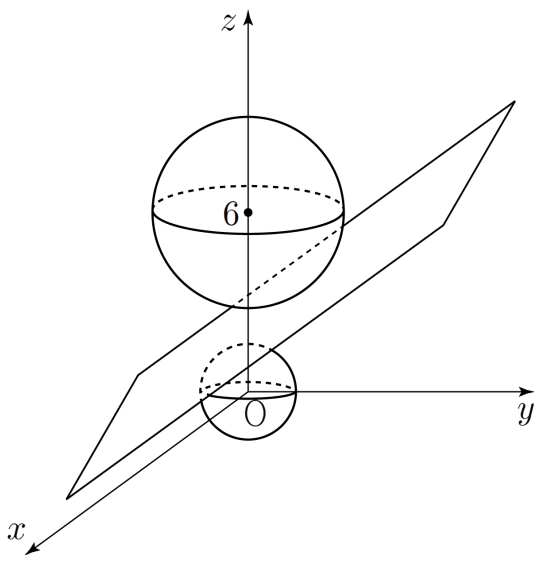
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 그림과 같이 좌표공간에서 점 $(0, 0, 2)$를 지나고 xy평면과 이루는 각의 크기가 $30°$인 평면이 두 구

$$x^2+y^2+z^2=a,\quad x^2+y^2+(z-6)^2=b$$

에 모두 접할 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21



16. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A-A^{-1}=B-B^{-1}$$

을 만족시킨다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A=E$ 이면 $B=E$ 이다.
ㄴ. $A^2+(A^{-1})^2=B^2+(B^{-1})^2$
ㄷ. $A+A^{-1}=\sqrt{2}E$ 이면 $B^4=-E$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고,

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2n(a_n)^2}{1-2na_n} \quad (n\geq 1) \text{ (단, } a_n\neq 0)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식 $a_{n+1}-a_n=\frac{2n(a_n)^2}{1-2na_n}$의 양변에 $1-2na_n$을 곱하면

$$(a_{n+1}-a_n)(1-2na_n)=2n(a_n)^2 \quad (n\geq 1)$$

이다. 이 식을 정리하면

$$a_{n+1}-a_n=\boxed{\text{(가)}}\times a_na_{n+1} \quad (n\geq 1)$$

를 얻는다. 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\boxed{\text{(가)}}$$

이다. 따라서,

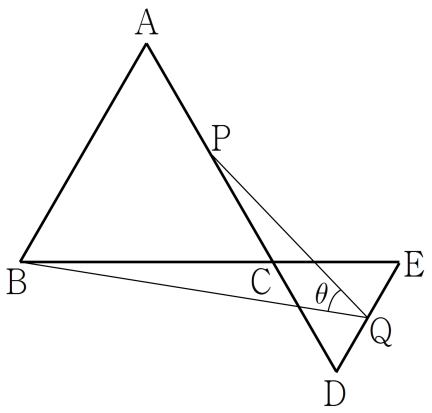
$$a_n=\boxed{\text{(나)}} \quad (n\geq 1)$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(11)\times g(8)$의 값은? [4점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

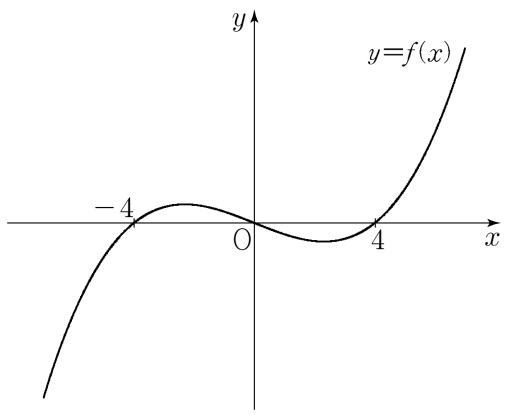
18. 그림과 같이 정삼각형 ABC에 대하여 선분 AC를 3:1로 외분하는 점을 D, 선분 BC를 3:1로 외분하는 점을 E라 하자. 선분 AC의 중점을 P, 선분 DE의 중점을 Q라 할 때, $\angle BQP=\theta$라 하자. $\tan\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{5\sqrt{3}}{16}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{7\sqrt{3}}{16}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{16}$

19. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



x에 대한 방정식 $\int_a^x f(t)\,dt=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

20. 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$$

이라 하자.

$$|b_{k+1}|<|b_k|$$

가 오직 $k=14$에서만 성립할 때, $\sum_{n=1}^{30}a_n$의 값은? [4점]

① -15 ② 0 ③ 15 ④ 30 ⑤ 45

21. 반지름의 길이가 1이고 중심이 점 O인 구에 대하여 무게중심이 점 O이고 구에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. 구 위의 점 P에 대하여

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OP}=0,\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\frac{3}{4}$$

일 때, $|\overrightarrow{AP}|^2$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

단답형

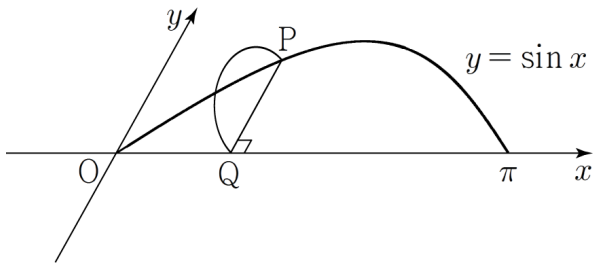
22. 좌표공간 위의 점 (3, 4, 5)에서 x축에 내린 수선의 발을 A, yz평면에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overline{AB}^2$의 값을 구하시오. [3점]

23. x에 대한 무리방정식

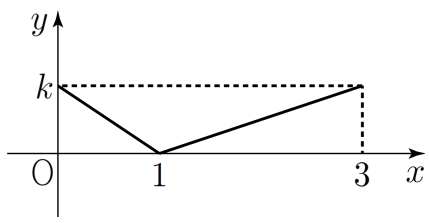
$$\sqrt{(a-5)x+(a-4)}=x$$

이 실근을 가질 때, a의 최솟값을 구하시오. [3점]

24. 곡선 $y=\sin x\ (0 \le x \le \pi)$ 위의 점 P에서 x축 위에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 선분 PQ를 지름으로 하는 반원을 xy평면에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P가 곡선 위를 원점에서 점 $(\pi, 0)$까지 움직일 때, 이 반원이 만드는 입체도형의 부피는 V이다. $\dfrac{80V}{\pi^2}$의 값을 구하시오. [3점]

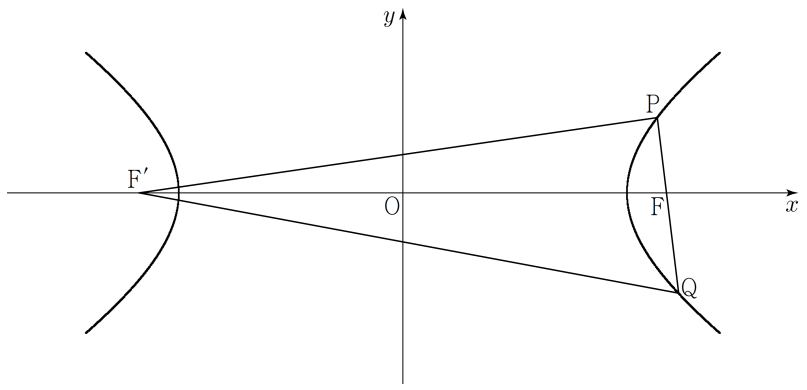


25. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 3$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.

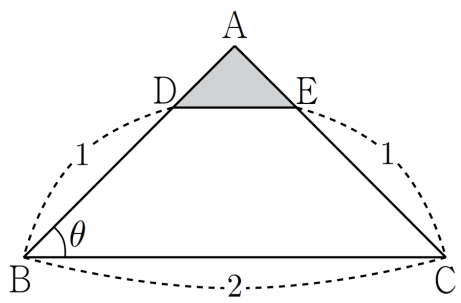


$\mathrm{E}(9X)$의 값을 구하시오. [3점]

26. 주축의 길이가 $6\sqrt{2}$이고, 두 점 $\mathrm{F}(5, 0)$, $\mathrm{F}'(-5, 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점 중 제 1사분면 위의 점을 P라 하자. 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OP}}$이고, 두 점 P, F를 지나는 직선이 점 P가 아닌 점 Q에서 쌍곡선과 만날 때, 삼각형 F′PQ의 넓이를 S라 하자. $5S$의 값을 구하시오. [4점]



27. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{BD}=\overline{CE}=1$을 만족시키는 두 점 D, E를 선분 AB와 선분 AC 위에 잡는다. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 ADE의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=a$일 때, $100a$의 값을 구하시오. [4점]



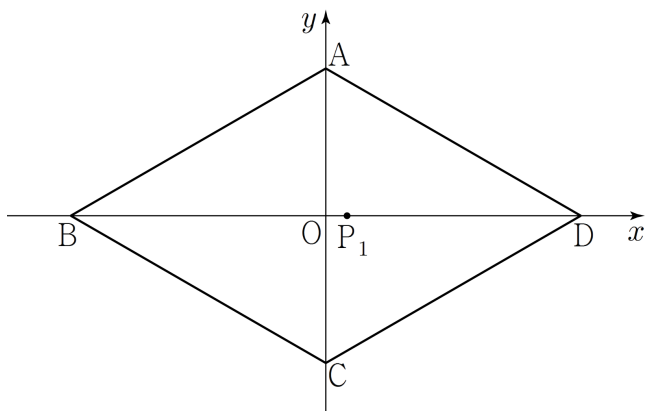
28. 좌표평면에서 마름모 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 꼭짓점 A, C는 y축 위에 있고, 두 꼭짓점 B, D는 x축 위에 있다.
(나) $\overline{AB}=\overline{AC}=8\sqrt{3}$

두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬이 각각

$$\begin{pmatrix} 2^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

일 때, 합성변환 $g\circ f$에 의하여 점 P_n이 옮겨진 점을 P_{n+1}이라 하자. 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 점 P_n이 마름모 내부에 있도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]



29. 좌표공간에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$인 직각이등변삼각형 ABC의 두 평면

$$\alpha : x=0, \quad \beta : y+z=0$$

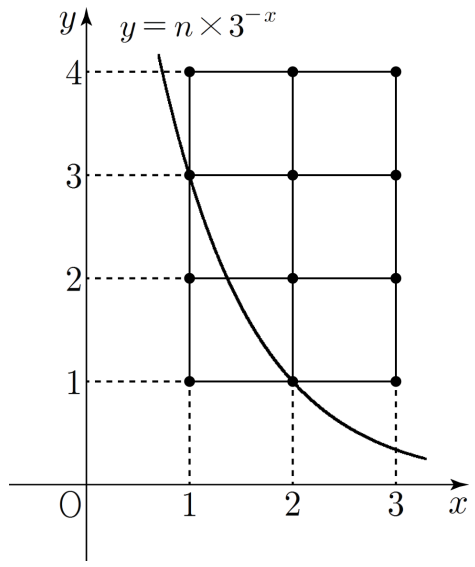
위로의 정사영이 모두 선분이 되고, 두 선분의 길이를 각각 l_1, l_2 $(l_1 > l_2)$라 할 때, $l_1+l_2=\sqrt{5}$이다. 선분 BC의 방향벡터를 $(1, a, b)$라 할 때, $10ab$의 값을 구하시오. [4점]

30. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=n\times 3^{-x}$과 다음 조건을 만족시키는 도형이 만나서 생기는 교점의 개수가 4가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

좌표평면 위에 12개의 점

(i, j) $(i=1, 2, 3, j=1, 2, 3, 4)$

중 이웃한 두 점을 이은 선분 중에서 x축 또는 y축과 평행한 선분을 그린다.



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.