

제2교시

2019학년도 Orbis Optimus 모의고사 1회 문제지

수학 영역 (나형)

홀수형

성명		수험번호	—
----	--	------	-------	-------	-------	---	-------	-------	-------

- 자신이 선택한 유형 ('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.
 - 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
 - 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 점자로 기재하시오.

풀 아래 웃음 짓는 샘물같이 내 마음 고요히 고운 별길 위에

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
 - 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
 - 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
 - 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

17. 수직선 위를 움직이는 기대의 시각 t ($t \geq 0$) 일 때의 속도가 $v(t) = at^3 + (b-a)t^2 - bt + a-b$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

<보기>

- ㄱ. $a=0, b \neq 0$ 이면 기대는 운동방향을 한 번만 바꾼다.
- ㄴ. $b=0, a \neq 0$ 이면 기대는 운동방향을 두 번만 바꾼다.
- ㄷ. 명제 '기대가 운동방향을 바꾸지 않으면 $\frac{ab}{a^2+b^2} \neq 0$ 이다.'는 항상 참이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 두 이산화률변수 X 와 Y 가 가질 수 있는 값이 각각 1부터 5 까지의 자연수이고

$$P(Y=6-k) = \frac{k}{3} \times P(X=k) \quad (k=1, 2, 3, 4, 5)$$

이다. $E(Y)=2$ 일 때, $V(X)$ 의 값은? [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

19. 주사위를 n 번 던질 때, k 번째 나온 눈의 수를 a_k 라 하자.
다음은 부등식

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$$

을 만족시키는 경우의 수를 서로 다른 두 가지 방법으로 구하여 어떤 등식이 성립함을 보이는 과정이다. (단, $n \geq 6$)

① 첫 번째 방법

부등식 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ 이 성립하는 경우의 수는 주사위의 각 면에 적힌 6 개의 숫자에서 중복을 허락하여 n 개의 숫자를 선택하는 경우의 수인 (가) 와 같다.

② 두 번째 방법

부등식 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ 이 성립할 때, 자연수 r ($1 \leq r \leq n-1$) 에 대하여 부등식 $a_r < a_{r+1}$ 을 만족시키는 서로 다른 자연수 r 의 개수를 X 라 하자. X 가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값을 M 이라 하면 $M =$ (나) 이고, 가장 작은 값은 0이다.

$X = i$ (단, i 는 M 이하의 음이 아닌 정수) 일 때
부등식 $a_r < a_{r+1}$ 을 만족시키는 자연수 r 의 값을 택하는 경우의 수는 ${}_{n-1}C_i$ 이고, 주사위의 각 면에 적힌 6 개의 숫자 중에서 부등식 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ 에 들어갈 숫자의 종류를 결정하는 경우의 수는 (다) 이다.

①, ②에 의하여 다음의 등식이 성립한다.

$$\sum_{i=0}^M {}_{n-1}C_i \times (다) = (가)$$

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 $f(n)$, $g(i)$ 라 하고 (나)에 알맞은 수를 a 라 할 때, $a \times \frac{f(6)}{g(3)}$ 의 값은? [4점]

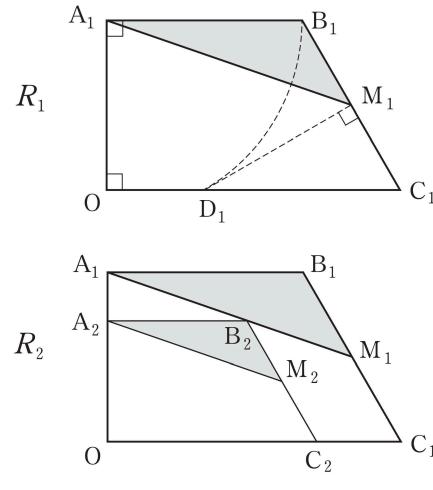
- ① 178 ② 172 ③ 166 ④ 160 ⑤ 154

20. 그림과 같이 $\angle O = \angle A_1 = 90^\circ$, $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = 2$, $\overline{OC_1} = 3$ 인 사다리꼴 $OA_1B_1C_1$ 이 있다.

점 A_1 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$ 인 원이 선분 OC_1 와 만나는 점을 D_1 라 하자. 점 D_1 에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 M_1 이라 할 때, 삼각형 $A_1B_1M_1$ 의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 A_1M_1 위의 점 B_2 를 선분 OB_1 위에 있도록 잡고, 선분 OA_1 위의 점 A_2 를 선분 A_1B_1 과 선분 A_2B_2 가 평행하도록, 선분 OC_1 위의 점 C_2 를 선분 B_1C_1 과 선분 B_2C_2 가 평행하도록 잡는다.

그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 삼각형 $A_2B_2M_2$ 을 그리고 삼각형 $A_2B_2M_2$ 의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 이라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 얻은 n 번째 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분들의 둘레의 합을 l_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{5\sqrt{7}+15}{2}$ ② $\frac{10\sqrt{2}+15}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{7}+24}{3}$
 ④ $\frac{7\sqrt{7}+21}{2}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{2}+12}{3}$

제 2 교 시

2019학년도 Orbis Optimus 모의고사 3회 문제지

수학 영역 (나형)

홀수형

성명		수험번호	—
----	--	------	-------	-------	-------	---	-------	-------	-------

- 자신이 선택한 유형 ('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.
 - 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
 - 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

웃음을 터뜨리며 밤을 밝히리라
 - 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
 - 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
 - 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
 - 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

* 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

17. 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 10^2)$ 을 따르고, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(20, 10^2)$ 을 따른다. 확률변수 X 와 Y 의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 할 때 상수 a 가

$$f(a-9) = g(a-1), \quad m+20 = 2a$$

를 만족시킨다. $P(a-m \leq X \leq m)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
0.6	0.2257
0.7	0.2580
0.8	0.2881
0.9	0.3159

- ① 0.1915 ② 0.2257 ③ 0.2580
 ④ 0.2881 ⑤ 0.3159

18. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

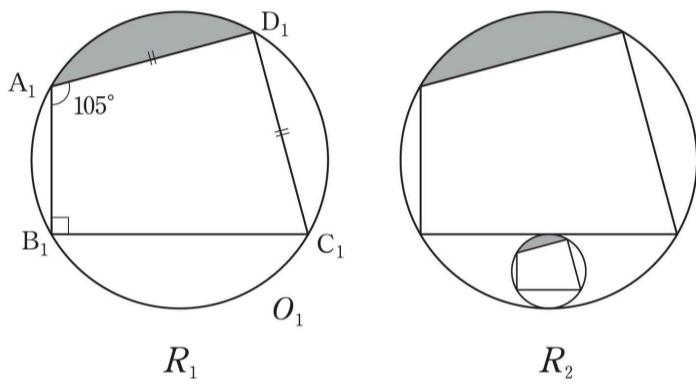
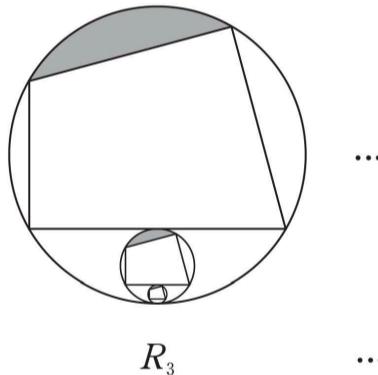
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+2} = (-1)^n a_{n+1} + a_n \quad (\text{단}, n \geq 1)$$

일 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은? [4점]

- ① 3 ② 1 ③ -1 ④ -3 ⑤ -5

19. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1 에 $\angle A_1 = 105^\circ$, $\angle B_1 = 90^\circ$, $\overline{A_1D_1} = \overline{C_1D_1}$ 인 사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 내접하고 있다. 선분 A_1D_1 와 호 A_1D_1 로 둘러싸인 부분인 弓形 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 B_1C_1 의 중점과 호 B_1C_1 의 중점을 양 끝점으로 하는 원 O_2 를 그리고 $\angle A_2 = 105^\circ$, $\angle B_2 = 90^\circ$, $\overline{A_2D_2} = \overline{C_2D_2}$ 인 사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 을 원 O_2 에 내접하도록 그린다. 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 弓形 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]

 R_1 R_2  R_3

...

- ① $\frac{2}{15}(\pi - 1)$ ② $\frac{4}{15}(\pi - 2)$ ③ $\frac{7}{30}(\pi - 2)$
 ④ $\frac{1}{5}(\pi - 2)$ ⑤ $\frac{1}{6}(\pi - 1)$

20. $p+q=11$ 인 임의의 두 자연수 p, q 와 모든 항이 양수인 임의의 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

$$\begin{aligned} \neg. \quad & \sum_{k=1}^{10} a_k = 5(a_p + a_q) \\ \vdash. \quad & (a_p + a_q) \times \left(\frac{1}{a_p} + \frac{1}{a_q} \right) \geq 4 \\ \therefore. \quad & \left(\sum_{k=1}^{10} a_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} \right) \geq 100 \end{aligned}$$

- ① \neg ② \sqsubset ③ \neg, \vdash
 ④ \vdash, \sqsubset ⑤ \neg, \vdash, \sqsubset

따라서 $m+8=20^\circ$ 이므로 $m=12^\circ$ 이고, 이를 $m+20=2a^\circ$ 대입하면 $a=16^\circ$ 이다.

따라서

$$P(a-m \leq X \leq m) = P(4 \leq X \leq 12) = P(-0.8 \leq Z \leq 0) = 0.2881$$

이다.

18. 수열의 귀납적 정의에 관련된 문제이다.

$a_{n+2} = (-1)^n a_{n+1} + a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)을 대입하면서 a_3, a_4, a_5 등등을 차례대로 구해주면 되는데,

이 수열을 빠르게 계산하는 Tip은 다음과 같다.

$a_{n+2} = (-1)^n a_{n+1} + a_n$ 식에 자연수를 차근차근 대입하다 보면, n 이 짝수일 때와 홀수일 때 a_{n+1} 의 계수가 1 혹은 -1 둘로 갈림을 발견할 수 있다.

따라서 숫자 사이의 부호를 $-$, $+$, $-$, $+$, $-$, $+$ 식으로 교차해서 위에 적고, 다음 항이 몇일지를 계산해주면 된다.

가령, 이런 식이다.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} - & + & - & + & - & + & - & + & - & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & \dots \end{array}$$

이렇게 계산해보면

$1, 0, 1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, -1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$ 과 같아
12칸 간격으로 같은 수열이 반복된다.

$$(1, 0, 1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, -1)$$

또, 이 12 개의 수열의 합은 0° 이므로,

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{24} a_k - (a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24}) = 0 - ((-1) + (-1) + 0 + (-1)) = 3$$

임을 알 수 있다.

19. $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ 이므로, 원주각의 성질에 의하여 선분 A_1C_1 이 원의 지름이 되고,

이 선분의 중점 M 이 원의 중심이 된다.

따라서 $\angle A_1D_1C_1$ 역시 지름의 원주각인 90° 가 된다.

또한 삼각형 $A_1C_1D_1$ 은 이등변삼각형이므로, $\angle A_1D_1C_1$ 를 제외한 두 각이 모두 45° 임을 알 수 있다.

따라서 $\angle A_1MD_1$ 은 $\angle A_1C_1D_1$ 의 두 배인 90° 이다.

그림 R_1 에서 색칠되어있는 부분의 넓이는

부채꼴 A_1MD_1 의 넓이인 $\frac{\pi}{4}$ 에서 삼각형 A_1MD_1 의 넓이인 $\frac{1}{2}$ 를 빼면 구할 수 있다.

그림 R_2 에서 공비를 구해보자.

작은 원의 반지름을 r 이라 하면, 두 원의 접점으로부터 선분 B_1C_1 까지 이르는 거리는 $2r$ 이다.

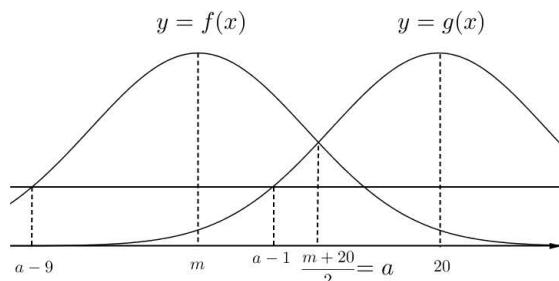
또한 큰 원의 중심인 M 에서 선분 B_1C_1 까지 이르는 거리는 선분

A_1B_1 의 길이인 1의 절반인 $\frac{1}{2}$ 이다.

17. 두 확률변수 X, Y 의 표준편차가 10으로 같으므로, $f(x)$ 의 그래프를 x 축 방향으로 평행이동시키면 $g(x)$ 의 그래프와 겹치게 만들 수 있는 사실을 인지하자.

따라서 두 그래프의 교점의 x 좌표는 두 확률변수의 평균의 평균인 $\frac{20+m}{2}$ 과 같고, 두 그래프를 그려놓으면 $x=\frac{20+m}{2}=a$ 에 대칭인 모양이 나오게 된다.

$a-9$ 와 $a-1$ 은 모두 a 보다 작으므로, $f(a-9)=g(a-1)$ 이라면 $f(x)$ 의 그래프를 x 축의 양의 방향으로 8만큼 평행이동시키면 $g(x)$ 의 그래프와 일치해야 한다. (아래 그림 참고)



(cf. $m \geq 20$ 인 경우 $g(x)$ 의 그래프가 $f(x)$ 의 그래프보다 왼쪽에 있는 그림이 그려지고, $g(a-1) > f(a-9)$ 임을 쉽게 알 수 있으므로 $m < 20$ 이어야 한다.)

(\because 직각삼각형 $A_1B_1C_1$ 은 세 각이 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 이고 M은 선분 A_1C_1 의 중점이므로)

따라서 $1 = \frac{1}{2} + 2r$ 로부터 $r = \frac{1}{4}$ 이고, 넓이 비는 이것의 제곱인

$$\frac{1}{16} \text{으로 정답은 } \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{4}{15}(\pi - 2) \text{이다.}$$

20.

□.

등차수열의 성질에 의해

$a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$, 즉 두 항에 있는 첨자와 두 숫자의 합이 11일 때 위와 같은 등식이 성립하므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 5(a_p + a_q) \quad (\text{참})$$

└.

$$\frac{(a_p + a_q)^2}{a_p a_q} = \frac{a_q}{a_p} + \frac{a_p}{a_q} + 2 \text{인 때}$$

절대부등식 (산술기하평균 부등식)에 의해

$$\frac{a_q}{a_p} + \frac{a_p}{a_q} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{a_q}{a_p} \cdot \frac{a_p}{a_q}} + 2 = 4. \quad (\text{참})$$

참고로, $\frac{(a_p + a_q)^2}{a_p a_q} = \frac{a_q}{a_p} + \frac{a_p}{a_q} + 2 = 4$ 인 경우는 부등식의 등호조건

에 의해 $\frac{a_q}{a_p} = \frac{a_p}{a_q}$. 즉 $a_p = a_q$ 일 때인데 이 경우는 공차가 0인 등 차수열 일 때이다.

□.

ㄱ.에 의해 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5(a_1 + a_{10})$ 으로

(사실 $p = 1, q = 10$ 일 필요는 없다. $p+q=11$ 을 만족시키는 임의의 자연수 순서쌍을 넣어도 상관없다.)

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{10} a_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} \right) \\ &= 5(a_1 + a_{10}) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{10}} \right) \\ &= 5 \times \left\{ (a_1 + a_{10}) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{10}} \right) + \cdots + (a_1 + a_{10}) \times \left(\frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} \right) \right\} \text{이다.} \end{aligned}$$

한편, 보기 ㄱ.의 해설에서 언급했듯이

$a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$ 으로

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_{10}) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{10}} \right) \\ &= (a_1 + a_{10}) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{10}} \right) + \cdots + (a_1 + a_{10}) \times \left(\frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} \right) \\ &= (a_1 + a_{10}) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{10}} \right) + (a_2 + a_9) \times \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_9} \right) + \\ & \quad (a_3 + a_8) \times \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_8} \right) + (a_4 + a_7) \times \left(\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_7} \right) + (a_5 + a_6) \times \left(\frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} \right) \\ &\geq 4 \times 5 = 20 \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 $\left(\sum_{k=1}^{10} a_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} \right) \geq 5 \times 20 = 100$ 이다. (참)