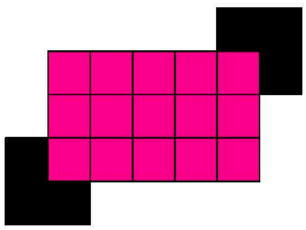
MUSIK N제

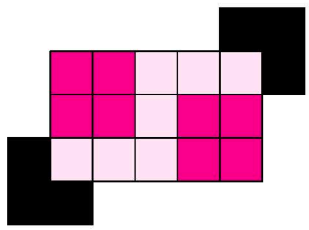
확률과 통계 (가/나 공통)

저자 김재은

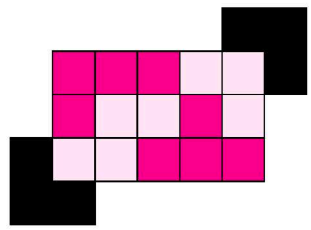
21

그림과 같이 가로 5칸, 세로 3칸의 합동인 정사각형으로 이루어져 있는 직사각형 모양의 호수가 있다. 7개의 칸에 칸을 가득 채우는 다리를 세우고 정사각형의 모서리를 통해서만 이동할 수 있을 때, 검은색으로 색칠한 두 지역이 연결될 확률이 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. 예를 들어, [예시 1]과 같이 세웠을 경우 두 지역은 연결되지만, [예시 2]와 같이 세웠을 경우 두 지역은 연결되지 않는다. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





[예시 1]



[예시 2]

22

임의의 정규분포를 따르는 확률변수 X와 X의 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 설명을 모두 고르시오. [4점]

<보 기>

ㄱ. 어떤 실수 k에 대하여 $\mathrm{P}(X=k)<f(k)$이다.

ㄴ. 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $\mathrm{P}(X \le x_1)<\mathrm{P}(X \le x_2)$이다.

ㄷ. 실수 s, t에 대하여 $\{f(t)-f(s)\}\{\mathrm{P}(X \le t)-\mathrm{P}(X \ge s)\}<0$이면 $s<t$이다.

23

0과 1로만 이루어지고 $\sum_{k=1}^{15}(a_k+a_{k+1})=10$을 만족하는 16 이하의 자연수에 대해 정의된 서로 다른 수열 $\{a_n\}$의 개수와 같은 것은? [4점]

① ${}_{14}C_4$ ② ${}_{15}C_4$ ③ ${}_{14}C_5$ ④ ${}_{15}C_5$ ⑤ ${}_{16}C_4$

24

함수 $f: X \to Y$에 대하여 $X=\{1,2,3\}$이고 $Y=\{-1,3,7\}$이다. f의 역함수가 존재하도록 하는 f의 개수를 구하시오. [3점]

51

3개의 주사위를 던져 나온 눈을 차례로 a, b, c라고 하자. $|a-b|=|b-c|$일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

52

다음 조건을 만족하는 모든 항의 계수가 음이 아닌 정수인 서로 다른 사차함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1)=8$
(나) $f(0)f(-1)=0$

53

평균이 m_1인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 평균이 m_2인 정규분포를 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=g(50-x)$이다.
(나) $\mathrm{P}(m_1 \le X \le 50)=\mathrm{P}(m_2 \le Y \le 12)>0$

$\mathrm{P}(33 \le X \le 37)=\mathrm{P}(\alpha \le Y \le \beta)$를 만족하는 순서쌍 (α, β)에 대하여 $\beta^2-\alpha^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]

54

표본공간 $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ 내의 두 사건 A, B에 대하여 $n(A\cap B)=1$이고 $\dfrac{n(A)}{n(B)}$의 값이 자연수이다. 두 사건 A, B가 독립일 때, (A, B)의 서로 다른 순서쌍의 개수와 가능한 모든 집합 $A\cup B$의 가짓수의 합을 구하시오. (단, 모든 근원사건의 확률은 같다.) [4점]

04

다음 조건을 만족하는 음이 아닌 정수로만 이루어진 서로 다른 수열 $\{a_n\}$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le a_{n+1}$이고, $k \ge 5$일 때 $a_{k+1} = a_k$이다.
(나) 3 이하의 어떤 자연수 p에 대하여 $a_p = a_{p+1} = a_{p+2}$이고, $\sum_{n=1}^{5} a_n = 10$이다.

05

$f, u, n, d, a, m, e, n, t$의 9개의 문자 중 4개를 임의로 골랐을 때, 아래의 세 단어 중 고른 문자를 이용하여 만들 수 있는 단어의 개수를 확률변수 X로 정의하자.

$$eat, \ nut, \ ant$$

예를 들어, u, e, n, t를 골랐다면 nut만 만들 수 있으므로 $X=1$이다.

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{q}{p}$일 때, $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

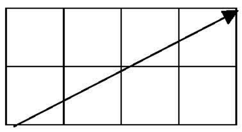
21

Point 쾨니히스베르크의 다리?

풀이 우선 다리를 세울 '칸'을 고르는 경우는 ${}_{15}\mathrm{C}_7$입니다.

이제 '두 지역을 연결하기 위해서'는 양 끝 칸을 포함하여 7개의 칸이 끊어지지 않도록 선택되어야 한다는 것을 알 수 있습니다.

그런데 호수를 최단 거리로 건너가기 위해 필요한 다리의 개수가 6개이니 결국은 아래와 같은 길을 최단 거리로 이동하는 경우의 수와 같음을 알 수 있습니다. 길의 교차점을 칸의 중심이라고 생각해 보시면 됩니다.



그러므로 해당하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{4!2!}={}_6\mathrm{C}_2$이고,

구하는 확률은

$$\frac{3\times5}{\dfrac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}}=\frac{1}{13\times11\times3}=\frac{1}{429}$$

이므로 $p+q=430$입니다.

22

Point 계산이 없으면 정의야

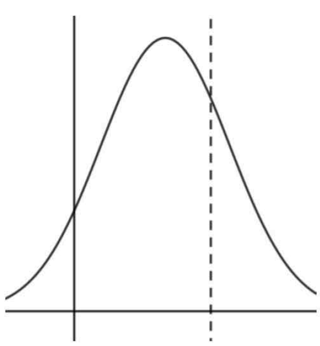
풀이 ㄱ. 정규분포의 확률밀도함수에 대하여 $\mathrm{P}(X=k)$는 항상 0입니다. (정규분포를 따르는 확률분포는 연속확률변수이기 때문이죠.) 그런데 $f(k)$는 단순히 확률밀도함수 $f(x)$에 $x=k$를 대입한 값입니다. 그러므로 $f(t)\neq0$를 만족시키는 임의의 실수 t에 대하여 보기의 진술이 성립하므로 ㄱ은 맞습니다.

ㄴ. 임의의 확률밀도함수에 대하여 $f(x)\geq0$입니다. 따라서 보기의 진술은 성립하므로 ㄴ은 맞습니다.

ㄷ. 이 문제에서 가장 어려운 부분입니다.

주어진 식을 만족하는 조건은 아래의 두 가지가 가능합니다.

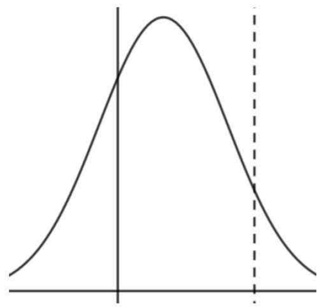
① $f(t)>f(s), \mathrm{P}(X\leq t)<\mathrm{P}(X\geq s)$



(실선이 $x=s$, 점선이 $x=t$)

문제 조건을 만족하기 위해서는 위 그림과 같이 $s<t$여야 함을 알 수 있습니다.

② $f(t)<f(s), \mathrm{P}(X\leq t)>\mathrm{P}(X\geq s)$



(실선이 $x=s$, 점선이 $x=t$)

이 경우도 역시 $s<t$이어야 문제 조건을 만족시킴을 알 수 있습니다.

그러므로 ㄷ은 맞습니다.

23

Point 1인 a_k를 고르자

풀이 우선 $\sum_{k=1}^{15}(a_k+a_{k+1})=10$에서

$(a_1+a_{16})+2\sum_{k=2}^{15}a_k=10$을 도출할 수 있습니다.

그런데 16 이하의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=0$ 또는 $a_n=1$이므로

결국

① $\sum_{k=2}^{15}a_k=5,\ a_1=a_{16}=0$ 이거나

② $\sum_{k=2}^{15}a_k=4,\ a_1=a_{16}=1$ 의 경우만 가능함을 알 수 있습니다.

①은 14개의 항 중에서 값이 1인 5개의 항을 고르는 경우의 수고 ②는 14개의 항 중에서 값이 1인 4개의 항을 고르는 경우의 수이므로 구하는 경우의 수는 ${}_{14}\mathrm{C}_5+{}_{14}\mathrm{C}_4={}_{15}\mathrm{C}_5$입니다.

따라서 정답은 ④입니다.

24

Point f는 연속함수가 아니란다

풀이 불연속함수에서 역함수가 존재한다는 것은, 결국 말하자면 '일대일 대응'이라는 것입니다. 그러므로 각 원소에 대하여 대응하는 함수값을 결정하는 경우의 수와 같고, $3!=6$입니다.

$2b=12$일 때 1가지이므로
해당하는 경우는 $2(1+3+5)=18$가지입니다.
③ 둘 다 해당하는 경우
$a=b=c$인 경우이므로 6가지입니다.

따라서 조건을 만족시키는 경우는
$36+18-6=48$이고, 전체 경우의 수는
$6^3=216$이므로 구하는 확률은 $\dfrac{48}{216}=\dfrac{2}{9}$이고,
$p+q=11$입니다.

52

풀이 조건은 정말 간단합니다.
$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$로 생각합시다.
이 때 $a\neq 0$을 고려해야 하는 것이 중요합니다.
우선, $f(1)=8$이므로 $a+b+c+d+e=8$입니다.
(나) 조건이 의미심장한데, $f(0)=0$이거나
$f(-1)=0$이면 조건을 충족시킵니다.
이 때 $f(0)=0$이고 $f(-1)=0$인 경우를 제외해야 한다는 것을 알아야 합니다.

1) $e=0$인 경우
$a+b+c+d=8$인데 $a\neq 0$이므로
구하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_7={}_{10}\mathrm{C}_3=120$.
2) $a-b+c-d+e=0$인 경우
$a+c+e=b+d=4$인데 $a\neq 0$이므로
구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_4=50$.
3) $e=0$이고 $a-b+c-d+e=0$인 경우
$a+c=b+d=4$인데 $a\neq 0$이므로
구하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_4=20$.

그러므로 구하는 경우의 수는 $120+50-20=150$.

Comment 실수하지 맙시다. 공통사건을 빼는 것도 놓치지 맙시다.

Q. 저는 $f(0)f(-1)=0$이라는 조건에서 $f(0)=0$인 경우를 $f(x)=x(px^3+qx^2+rx+s)$라고 놓고, $f(-1)=0$인 경우는 $f(x)=(x+1)(ax^3+bx^2+cx+d)$라고 놓고 풀으려 했습니다. 이 방법이 잘못된 이유는 무엇인가요?
A. 이렇게 놓고 풀게 되면 (a, b, c, d)의 순서쌍을 구할 때 정수 조건을 수정해야 합니다.
$f(-1)=0$인 경우에
$f(x)=(x+1)(ax^3+bx^2+cx+d)$라고 하면, 이를 전개했을 때
$f(x)=ax^4+(a+b)x^3+(b+c)x^2+(c+d)x+d$가 되어 c가 음의 정수여도 $c+d$나 $b+c$는 음이 아닌 정수일 수 있기 때문이죠. 복잡한 정수 조건을 부여해야 하므로, 이 풀이는 권장하지 않습니다.

53

Point 첫 번째 조건에서 두 확률변수는 표준편차가 동일한 정규분포를 따르고, 확률밀도함수의 그래프가 직선 $x=25$에 대칭임을 알 수 있습니다. 또한, 이로부터 $m_1+m_2=50$을 도출할 수 있습니다. 이제 m_1과 m_2의 대소를 기반으로 (나) 조건의 충족 여부를 살펴봅시다.

1) $m_1<m_2$
이 경우 우선 $m_1<50, m_2<12$이라는 조건이 성립합니다.
그런데, $m_1<m_2<12$이라면 두 확률변수의 표준편차가 같으므로, $50-m_1$과 $12-m_2$의 값이 같아야 하는데,
$50-m_1=12-m_2$에서 $m_1-m_2=38>0$이므로 조건에 모순입니다.

2) $m_1>m_2$
$50-m_1=12-m_2$의 조건은 m_1, m_2의 대소에 상관없이 성립하므로 $m_1-m_2=38$입니다.
따라서 $m_1+m_2=50$이라는 식과 위의 식을 연립하면
$m_1=44, m_2=6$임을 알 수 있습니다.

따라서 $\mathrm{P}(33\leq X\leq 37)=\mathrm{P}(-5\leq Y\leq -1)$
$=\mathrm{P}(13\leq Y\leq 17)$
에서 $\beta^2-\alpha^2$의 최댓값은 $17^2-13^2=120$입니다.

54

Point $n(A\cap B)=1\rightarrow \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$

풀이 $\dfrac{n(A)}{n(B)}$의 값이 자연수이므로
$\mathrm{P}(A)=k\mathrm{P}(B)$인 경우 (단, $k=1, 2, 3, 4$)가 가능합니다.

정의를 생각해 본다면,

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{n(A)}{4}$ 이고 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{n(B)}{4}$ 입니다.

이때 $n(A\cap B)=1$ 이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$ 이고,

A와 B는 독립이므로 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$ 입니다.

따라서 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$ 이라는 조건은 결국

$n(A)n(B)=4$ 이라는 의미이고, 같은 이유로

$n(A)=k\times n(B)$ $(k=1,2,3,4)$ 이므로 결국

아래의 두 가지 경우만 조건을 만족시킴을 알 수 있습니다.

① $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$

② $\mathrm{P}(A)=1, \mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}, \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$

①의 경우, 사건 (A, B)의 순서쌍의 개수를 구해 봅시다. 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 ${}_4\mathrm{C}_2$ 입니다. 6개 중 2개의 서로 다른 부분집합을 순서를 고려하여 고를 때 두 부분집합은 하나의 원소만 겹쳐야 하므로, 서로소인 부분집합을 고르는 ${}_4\mathrm{C}_2$를 제외하면 사건 (A, B)의 순서쌍의 개수는 ${}_6\mathrm{P}_2-{}_4\mathrm{C}_2=24$임을 알 수 있습니다. 또한, 이때의 가능한 $A\cup B$의 가짓수는 원소의 개수가 3개인 부분집합의 개수인 4입니다.

②의 경우, 사건 (A,B)의 순서쌍의 개수는 B의 원소를 선택하는 가짓수인 4가지이며 이 때의 가능한 $A\cup B$의 가짓수는 전체집합 S가 유일합니다.

①과 ②에서 $A\cup B$가 겹치는 경우는 존재하지 않으므로, 구하는 값은 $(24+4)+(4+1)=33$ 입니다.

55

Point 음이 아닌 정수 조건으로 만들어 주기

풀이 $a+b+c\neq 0$ 이고 $d\neq 0$ 이면 됩니다.

우선 $d\neq 0$을 만족하는 d의 가짓수는 6가지이며,

(a,b,c)로 가능한 값의 가짓수는 $7^3=343$가지인데,

이 중 $a+b+c=0$을 만족하는

가짓수는 $a'=a+2$, $b'=b+2$,

$c'=c+2$ 이라고 치환했을 때

$a'+b'+c'=6$를 만족시키는 음이 아닌 정수

a', b', c' 의 개수는

${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\times 7}{2}=28$ 입니다.

그러므로 구하는 경우의 수는

$(343-28)\times 6=1890$ 입니다.

56

Point 10개 이하면 일단 구해 보자

풀이 우선 8개의 곡의 전체 길이는 $\dfrac{8(15+22)}{2}=148$ 이므로 양 CD에 같은 재생 시간으로 분배시키려면 74분씩 할당해야 하는 것을 알 수 있습니다.

계산을 용이하게 하기 위해 8개 곡의 평균 재생 시간인 18.5분을 기준으로 하여 8 곡의 재생시간을 작은 순서대로

$-3.5/-2.5/-1.5/-0.5/0.5/1.5/2.5/3.5$ 으로 표현해 봅시다.

더욱 간단히 표시해 본다면 $-4/-3/-2/-1/1/2/3/4$로 표시해 볼 수 있겠네요. 이는 실제 편차는 아니고 생각의 편의를 위해 임의로 조정한 수치이므로 '가편차'라고 정의합시다.

① 양 CD에 분리해서 곡을 넣는 가짓수 (순서는 생각하지 않음)

8곡 중 재생시간이 '양'으로 표현된 4개 곡 중 2개의 합과 '음'으로 표현된 4개 곡 중 2개의 '가편차'의 합의 절댓값이 같아야 합니다. 이제 '양'으로 표현된 선택된 2개 곡의 가편차 값의 합에 따라 '음'으로 표현된 4개의 곡 중 2개의 곡을 고르는 경우의 수를 구해 봅시다.

1) 가편차의 합이 5인 경우

가편차의 합이 5인 경우는 1,4 또는 2,3인 곡을 골랐을 때의 경우인데, 각 경우에 대하여 가편차의 값이 음인 곡을 고르는 경우는 $-1,-4$ 또는 $-2,-3$의 2가지가 있으므로 해당 경우의 수는 $2\times 2=4$ 입니다.

2) 가편차의 합이 5가 아닌 경우

이 경우 조건을 만족시키는 곡의 순서쌍이 단 하나씩만 존재합니다.

예를 들어, 가편차가 1, 3인 곡을 골랐다면 나머지 곡의 가편차는 무조건 $-1,-3$이어야 하는 것처럼요. 따라서 2)의 경우의 가짓수는 ${}_4\mathrm{C}_2-2=4$ 입니다.

그런데 두 CD는 구별하지 않으므로 결국 곡을 넣는 가짓수는 $\dfrac{4+4}{2!}=4$가지임을 알 수 있습니다.

② 곡의 순서를 배열하는 가짓수

모든 곡이 구별되므로 각 CD에 대해 배열하는 가짓수는 $(4!)^2=576$ 입니다.

그러므로 구하는 경우의 수는

$$\sum_{z=0}^{16} z^2 f(z) = \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 19$$

이므로 결국 구하는 값은

$256 - 32 \times 4 + 19 = 147$입니다.

04

Point 결국은 3개 이상이 같기만 하면

풀이 문제에서 '어떤 자연수 p에 대하여 $a_p = a_{p+1} = a_{p+2}$'라는 조건을 주었으므로 결국 '10을 3개 이상의 같은 음이 아닌 정수를 포함하여 분할하는 가짓수'를 구하는 문제임을 알 수 있습니다.

중요한 점은 $a_p = 0$**일 수도 있다**는 것이죠.

분할로 아이디어를 이용한다면 음이 아닌 정수 a, b, c에 대하여 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 같은 값을 가지는 세 항을 a, 나머지 두 항을 각각 b, c라 하면 $3a + b + c = 10$으로 표현할 수 있습니다. 그러므로 a값에 따라 분할하는 가짓수를 구해 봅시다.

① $a = 0$인 경우

10을 2개의 음이 아닌 정수로 분할하는 가짓수이므로

$10 + 0 = 9 + 1 = 8 + 2 = \cdots = 5 + 5$에서

6가지임을 알 수 있습니다.

② $a = 1$인 경우

7을 2개 이하의 자연수로 분할하는 가짓수이므로

$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$에서 4가지임을 알 수 있습니다.

③ $a = 2$인 경우

4를 2개 이하의 자연수로 분할하는 가짓수이므로

$4 = 3 + 1 = 2 + 2$에서 3가지임을 알 수 있습니다.

④ $a = 3$인 경우

1을 분할하는 경우의 수이므로 1가지임을 알 수 있습니다.

그러므로 구하는 수열 $\{a_n\}$의 개수는 중복되는 것이 존재하지 않으므로 합의 법칙에 의해 $6 + 4 + 3 + 1 = 14$입니다.

05

Point 공통으로 들어있는 것과 그렇지 않은 것

풀이 우선 어떤 문자를 고르냐에 따라 만들 수 있는 단어와 만들 수 없는 단어가 갈리겠군요. 문제에서는 $X = 0$인 경우와 $X = 2$인 경우만 고르면 되므로 그대로 따라가 봅시다.

우선, 전체 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_4$입니다.

① $X = 0$인 경우

1) t를 포함하는 경우

$(a, e), (n, u), (a, n)$이 공통으로 들어가지 말아야 합니다.

따라서 t를 제외한 나머지 3개의 문자를 고르는 전체 경우의 수 ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$에서

a, e를 포함하는 경우인 ${}_6\mathrm{C}_1 = 6$,

n, u를 포함하는 경우인 $2 \times {}_5\mathrm{C}_1 + 1 = 11$,

a, n을 포함하는 경우인 $2 \times {}_5\mathrm{C}_1 + 1 = 11$를 모두 제외하되,

a, e, n, t나 a, n, u, t를 뽑는 4가지 경우는 두 경우에 모두 포함되므로 이를 다시 제외해 주면 1)에 해당하는 경우의 수는

$56 - (6 + 11 + 11) + 4 = 32$입니다.

2) t를 포함하지 않는 경우

어떠한 조합으로도 아무 문자도 만들 수 없으므로 2)에 해당하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_4 = 70$입니다.

따라서 ①에 해당하는 확률은 $\dfrac{32 + 70}{126} = \dfrac{51}{63}$입니다.

② $X = 2$인 경우

세 단어 중 두 단어'만' 만들 수 있어야 하므로 만들 수 있는 두 단어를 기준으로 생각해 봅시다.

1) eat, nut'만' 만들 수 있는 경우

이렇게 되면 ant도 항상 만들 수 있기에 해당하는 확률은 0입니다.

2) eat, ant'만' 만들 수 있는 경우

a, e, n, t를 고르면 되므로 해당하는 확률은 $\dfrac{2}{{}_9\mathrm{C}_4}$입니다.

3) nut, ant'만' 만들 수 있는 경우

a, n, t, u를 고르면 되므로 해당하는 확률은 $\dfrac{2}{{}_9\mathrm{C}_4}$입니다.

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{51}{63} + \dfrac{2}{63} = \dfrac{53}{63}$이고, $10p + q = 593$입니다.

다른 풀이 여사건인 $X = 1$의 경우의 수를 구하여 확률값을 쉽게 구할 수도 있습니다.

역시나 만들 수 있는 단어에 따라 경우의 수를 구해 봅시다. 이때에도 모든 문자는 다른 것으로 취급하여 계산해 주어야 합니다.