2013학년도 포카칩 직전모의평가 문제지

제 2 교시

수리 영역(나형)

짝수형

5지선다형

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A-2B$의 모든 성분의 합은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}=8$일 때, $\frac{a_4}{a_2}$의 값은? [2점]

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 40

3. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

4. 두 함수

$$f(x)=x+5,\quad g(x)=x^2-5$$

에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 그래프 G를 나타내는 행렬 M이 다음과 같다.

그래프 G의 한 꼭짓점에 연결된 변의 개수가 2인 꼭짓점의 개수는? [3점]

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. $\int_0^2 (x^3-3x^2+3x)\,dx$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

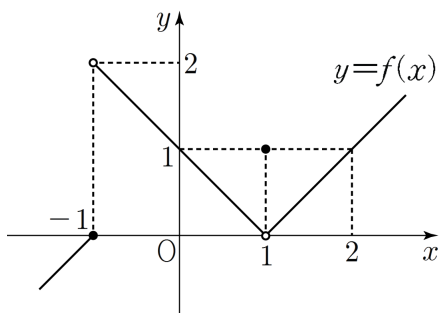
7. 보일러에 공급되는 물의 불순물을 배출하기 위해 블로우 다운 장치를 사용한다고 한다. 이 장치를 사용하기 전 불순물의 농도를 d_0, 이 장치를 t초 동안 사용한 후의 불순물의 농도를 d_t이라 할 때, 다음 관계가 성립한다.

$$d_t-5=a^{-3t}(d_0-5) \quad (\text{단, } a\text{는 양의 상수이다.})$$

불순물의 농도가 85인 물에 블로우 다운 장치를 t_1초 동안 사용한 후의 불순물의 농도가 25, 이 장치를 t_2초 더 사용한 후의 불순물의 농도를 7.5라 하자. $\frac{t_2}{t_1}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

8. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1+0} f(x)+\lim_{x\to 1} f(x)$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

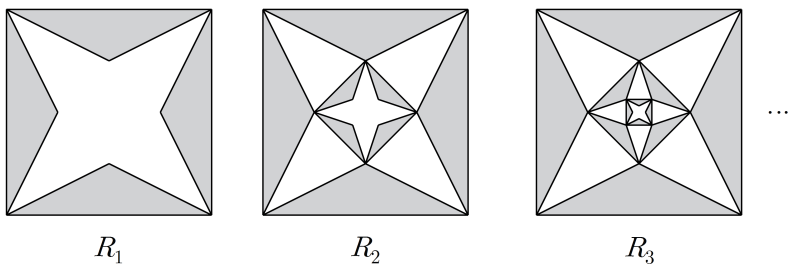
9. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형이 있다.

정사각형의 각 변을 밑변으로 하고, 높이가 밑변의 길이의 $\frac{1}{4}$인 이등변삼각형 4개를 그린다. 4개의 이등변삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1의 4개의 이등변삼각형의 꼭짓점 중 정사각형의 꼭짓점이 아닌 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그린다. 이 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 이등변삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2의 작은 4개의 이등변삼각형의 꼭짓점 중 정사각형의 꼭짓점이 아닌 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그린다. 이 정사각형 안에 그림 R_2을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 이등변삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 이등변삼각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

10. 곡선 $y=x^3-3x+4$와 직선 $y=m$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 m의 값의 곱은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

11. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$3n-1 \le a_n \le \sqrt{9n^2+4}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{n}$의 값은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

12. 주머니 안에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 주머니에서 2장의 카드를 임의로 뽑고 주사위를 1번 던질 때, 2장의 카드에 적힌 수의 합을 a, 주사위의 눈의 수를 b라 하자. 두 수의 곱 ab가 짝수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

13. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & (x<a) \\ 5x-20 & (x\geq a) \end{cases}$$

일 때, $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

14. $f(4)=0$인 이차함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)dx=7, \quad \int_1^4 f(x)\,dx=-10$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)=4\int_0^x f(t)\,dt$에 대하여 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

① -12 ② -11 ③ -10 ④ -9 ⑤ -8

15. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n a_n+3^{n+1}}{3^n+2^n a_n}=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n a_n$의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

16. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A-A^{-1}=B-B^{-1}$$

을 만족시킨다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A=E$이면 $B=E$이다.
ㄴ. $A^2+(A^{-1})^2=B^2+(B^{-1})^2$
ㄷ. $A+A^{-1}=\sqrt{2}E$이면 $B^4=-E$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고,

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2n(a_n)^2}{1-2na_n} \quad (n\geq 1)\ (\text{단, } a_n\neq 0)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식 $a_{n+1}-a_n=\frac{2n(a_n)^2}{1-2na_n}$의 양변에 $1-2na_n$을 곱하면

$$(a_{n+1}-a_n)(1-2na_n)=2n(a_n)^2 \quad (n\geq 1)$$

이다. 이 식을 정리하면

$$a_{n+1}-a_n=\boxed{\text{(가)}}\times a_na_{n+1} \quad (n\geq 1)$$

를 얻는다. 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\boxed{\text{(가)}}$$

이다. 따라서,

$$a_n=\boxed{\text{(나)}} \quad (n\geq 1)$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(11)\times g(8)$의 값은? [4점]

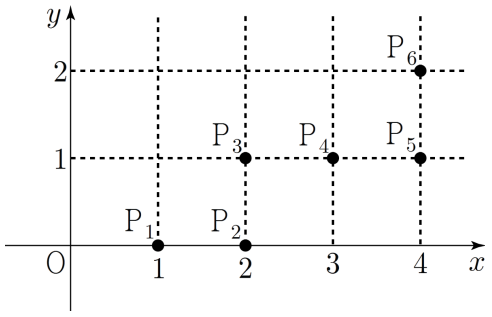
① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

18. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1, 0)$이다.
(나) 점 P_n의 좌표가 (a, b)일 때,
$b\geq \log_3 a$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 $(a+1, b)$이고
$b<\log_3 a$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 $(a, b+1)$이다.

점 P_{31}의 좌표는 (p, q)이다. $p-q$의 값은? [4점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27



19. 곡선 $y=2x^3+ax^2-(2a+1)x+a$는 a의 값에 관계없이 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 곡선 위의 점 P에서의 접선이 점 $(0,\ b)$를 지날 때, b의 값은? [4점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

20. 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$$

이라 하자.

$$|b_{k+1}|<|b_k|$$

가 오직 $k=14$에서만 성립할 때, $\sum_{n=1}^{30}a_n$의 값은? [4점]

① -15 ② 0 ③ 15 ④ 30 ⑤ 45

21. $\log\frac{1}{k^3}$의 지표가 $-n$인 자연수 k의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{6} a_n$의 값은? [4점]

① 90 ② 92 ③ 94 ④ 96 ⑤ 98

단답형

22. 함수 $f(x)=x^3-4x$에 대하여 $f'(4)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 방정식 $2^x+\frac{8}{2^x}=9$의 모든 실근의 합을 구하시오. [3점]

24. 다항식 $\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 x^2의 계수가 6일 때, 상수 a에 대하여 a^2의 값을 구하시오. [3점]

25. 이항분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=\frac{4}{3},\quad \mathrm{E}(X^2)=\frac{8}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

26. 좌표평면에서 두 직선

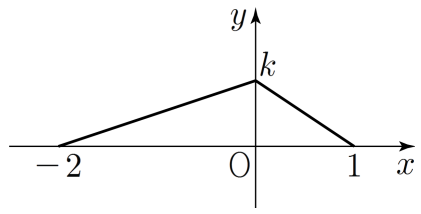
$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=1 \end{cases}$$

이 오직 점 (4, 3)에서만 만난다. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

27. 어느 카펫을 만드는 회사에서 사용하는 합성섬유의 인장강도 X는 평균이 75N/m^2, 표준편차가 5N/m^2인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 카펫 중에서 임의추출한 25개의 인장강도의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\text{P}(a \le \overline{X} \le 76) = 0.8185$일 때, a의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

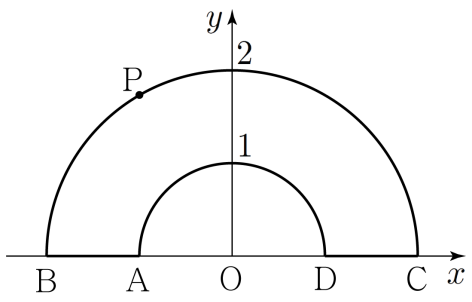
z	$\text{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-2 \le X \le 1$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$\text{E}(-3X+10)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1, 2인 두 반원이 있다. 점 P가 두 반원과 선분 AB, 선분 CD로 둘러싸인 도형의 둘레를 따라 점 A를 출발하여 A→B→C→D→A의 순서로 매초 1의 속도로 움직인다. 점 P가 점 A를 출발하여 t초 후에 선분 OP의 길이를 $f(t)$라 할 때, $\int_0^{3\pi+2} f(t)dt = p\pi + q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]



30. 자연수 n에 대하여 곡선 $y = n \times 3^{-x}$과 다음 조건을 만족시키는 도형이 만나서 생기는 교점의 개수가 4가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

좌표평면 위에 12개의 점

(i, j) $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4)$

중 이웃한 두 점을 이은 선분 중에서 x축 또는 y축과 평행한 선분을 그린다.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.