

# 1쇄 해설 수정

## 1회 29번

정답: 130

1) 평면의 위치관계를 결정해보면

$x+2y+2z=9$ 의 법선벡터는  $(1, 2, 2)$ 이고,  $y-z=3\sqrt{2}$ 의 법선벡터는  $(0, 1, -1)$ 이므로 서로 수직임을 알 수 있다.

그리고 점과 평면사이의 거리 공식에 의해 원점에서 각각의 두 평면까지의 거리가 3으로 같음을 확인할 수 있다.

이제 (가) 조건을 해석해보면

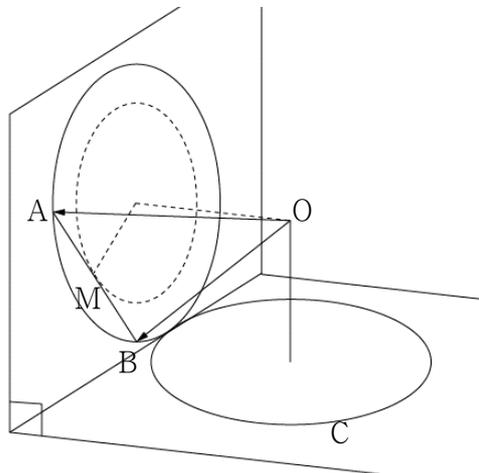
$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=3\sqrt{2}$ 이므로 원뿔의 형태로 두 점 A와 B가 평면  $x+2y+2z=9$  위를 움직인다.

$|\overrightarrow{OC}|=3\sqrt{2}$ 이므로 원뿔의 형태로 C가 평면  $y-z=3\sqrt{2}$  위를 움직임을 확인할 수 있다.

따라서 원의 반지름은 3이다. (피타고라스의 정리)

(나) 조건은 점A와 점 B의 중점을 M이라고 하면  $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{13}$ 을 만족하면서 움직이고 반지름의 길이가 2인 원위에 있음을 알 수 있다.

위의 사실을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



2) 이제 사면체 OABC의 부피를 알아보기 위해서 평면 ABO와 점 C사이의 거리를 보도록 하자. (사면체의 부피에서 밑면 삼각형 ABO의 넓이는 항상 일정하므로)

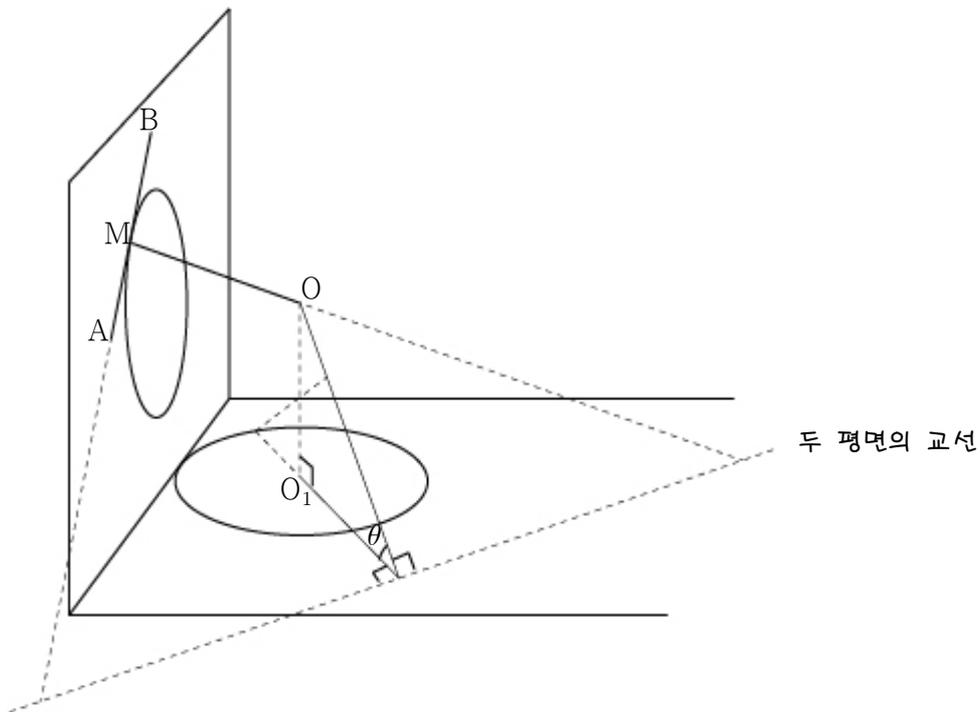
M이 그리는 원에 접하고 O를 지나는 평면을 비틀어 보면 다음과 같다.

\* 직선 MO와 직선 AB는 모두 평면 ABO에 포함된 직선이다.

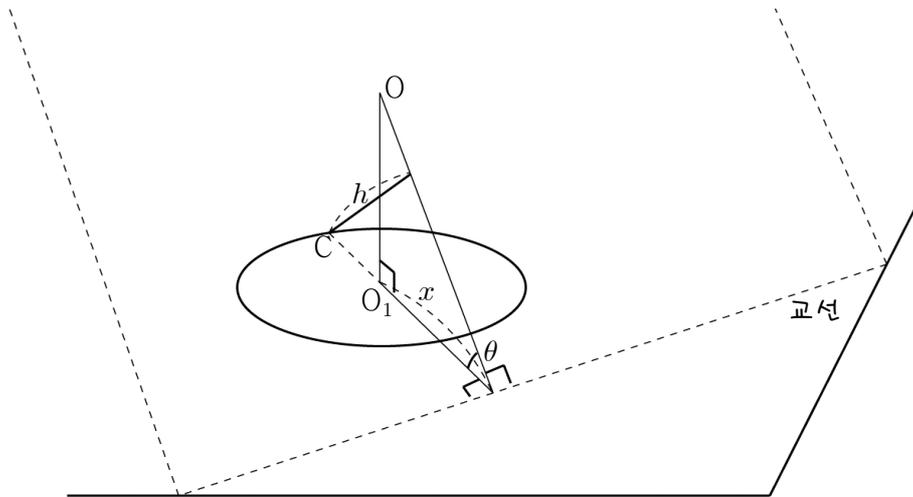
그러므로 직선 MO와 직선 AB가 점 C가 움직이는 평면과 만나는 두 점을 이은 직선이 교선이 된다. (그림참조)

\* 점 C가 움직이는 원의 중심을  $O_1$ 이라 하면 점  $O_1$ 에서 교선까지의 거리가 바뀐다.

\*그림과 같이 삼수선을 볼 수 있다.



3) 이 그림을 조금 더 간단하게 보면, 다음과 같다.



\* 점  $O_1$ 에서 교선까지의 거리를  $x$ 라 하자. 그러면  $0 \leq x \leq a$  (단,  $a > 3$ )이다.

\* 점  $C$ 에서 평면  $OAB$ 까지의 거리  $h$ 의 최댓값이 되려면 점  $C$ 의 위치는 그림과 같이 직선  $CO_1$ 이 두 평면의 교선과 수직으로 만나도록 하는 곳이다.

4) 사면체의 높이  $h = (x+3)\sin\theta$

사면체의 밑면 (삼각형  $ABO$ ) =  $\sqrt{65}$  (항상 일정)

그러므로 사면체의 부피 =  $\frac{1}{3} \times \sqrt{65} \times h$

$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}$  (피타고라스 이용,  $\overline{OO_1} = 3$ )이므로,

$h = (x+3)\sin\theta = 3\sqrt{\frac{x^2+6x+9}{x^2+9}} = 3\sqrt{1+\frac{6x}{x^2+9}}$  이다.

$f(x) = \frac{6x}{x^2+9}$  ( $x \geq 0$ )라 두면  $f(x)$ 는  $x=3$ 에서 극댓값이며 최대이다. 또는 분모와

분자에  $\frac{1}{x}$ 를 곱한 뒤 산술기하 평균을 이용하여 알아낼 수 있다.

$\therefore$  사면체  $OABC$ 의 부피의 최댓값  $k = \sqrt{130}$ ,  $k^2 = 130$

## 2회 30번

### 1) 조건해석

(가) 조건으로 다음 두 가지 해석해야 한다.

\* 함수  $f(x)$ 가  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, 9)$ , ...를 지난다.

\*\*

구간  $(0, 1]$ 에서는  $y=0$ ,  $y=x$  사이에 함수  $f(x)$ 가 존재한다.

구간  $(1, 2]$ 에서는  $y=x$ ,  $y=2x$  사이에 함수  $f(x)$ 가 존재한다.

구간  $(2, 3]$ 에서는  $y=2x$ ,  $y=3x$  사이에 함수  $f(x)$ 가 존재한다.

(나)조건에 의해

\* 각 구간마다의 함수가 다를 수 있다는 것을 인지할 수 있다.

(다) 조건

\*  $x=1$ 에서 미분가능하다. 즉,  $x=2$ 에서는 미분가능할 필요는 없다.

그러므로 구간  $(2, 3]$ 에서 함수는 별개로 구하면 된다.

2) 구간  $(0, 2]$ 에서 가능한 함수  $f(x)$  구하기.

(case 1) 구간  $(0, 1]$ 에서 일차함수, 구간  $(1, 2]$ 에서 일차함수

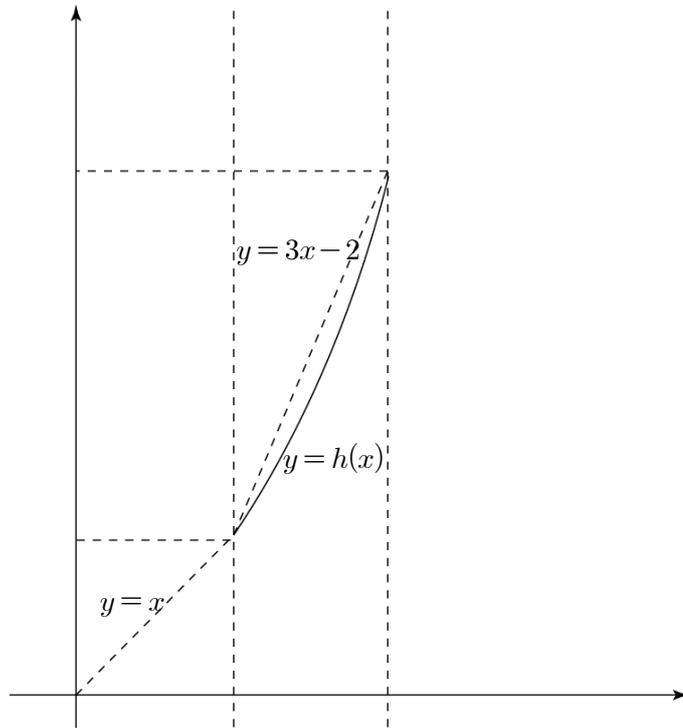
$x=1$ 에서 미분이 불가능하게 된다. 그러므로 조건에 성립하지 않음.

(case 2) 구간  $(0, 1]$ 에서 일차함수:  $y=x$ , 구간  $(1, 2]$ 에서 이차함수:  $y=h(x)$

$x=1$ 에서 미분가능하므로  $h(x)-x=a(x-1)^2$ 이 되고,  $h(2)=4$ 를 만족한다.

그러므로  $h(x)=2(x-1)^2+x$

$y=h(x)$ 와  $y=3x-2$ 의 교점이  $(1, 1)$ ,  $(2, 4)$ 임을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.



$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} + \int_1^2 \{2(x-1)^2 + x\} dx = \frac{1}{2} + \int_1^2 (3x+2) dx - \frac{2(2-1)^3}{6} = \frac{8}{3}$$

(case 3) 구간 (0, 1]에서 이차함수:  $y = g(x)$ , 구간 (1, 2]에서 이차함수:  $y = h(x)$

\*

$g(x)$ 는 (0, 0), (1, 1)을 지나므로,  $g(x) - x = ax(x-1)$ 이라 할 수 있다. 그리고 (가) 조건에 의해서  $g'(0) \geq 0$ 이어야 한다. 즉,  $g'(0) = 1 - a \geq 0$  이다.

또한, (가) 조건을 만족시키려면 아래로 볼록한 함수가 되어야 하므로  $a > 0$ 이어야 한다.

$$\therefore g(x) = ax(x-1) + x \quad (0 < a \leq 1)$$

\*\*

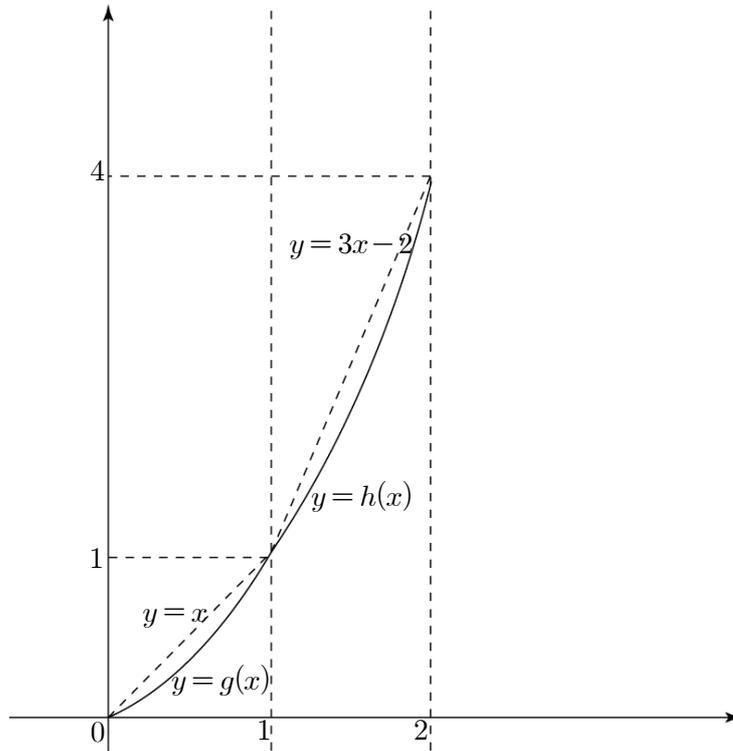
$h(x)$ 는 (1, 1), (2, 4)를 지나므로  $h(x) - 3x + 2 = b(x-1)(x-2)$ 라 할 수 있다.

$$\therefore h(x) = b(x-1)(x-2) + 3x - 2$$

\*\*\*

$g'(1) = h'(1)$ 이므로  $a + 1 = -b + 3 \Leftrightarrow a + b = 2$ ,  $1 \leq b < 2$ 이다.

\*\*\*\*



$$S = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (3x-2) dx \text{ 라 하면}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = S - \int_0^1 g(x) dx - \int_1^2 h(x) dx = S - \frac{a(1-0)^3}{6} - \frac{b(2-1)^3}{6} \text{ 이므로 항상}$$

일정하다.

$$\therefore \int_0^2 f(x) dx = 3 - \frac{2}{6} = \frac{8}{3}$$

(case 4) 구간 (0, 1] 에서 이차함수:  $y = g(x)$ , 구간 (1, 2] 에서 일차함수

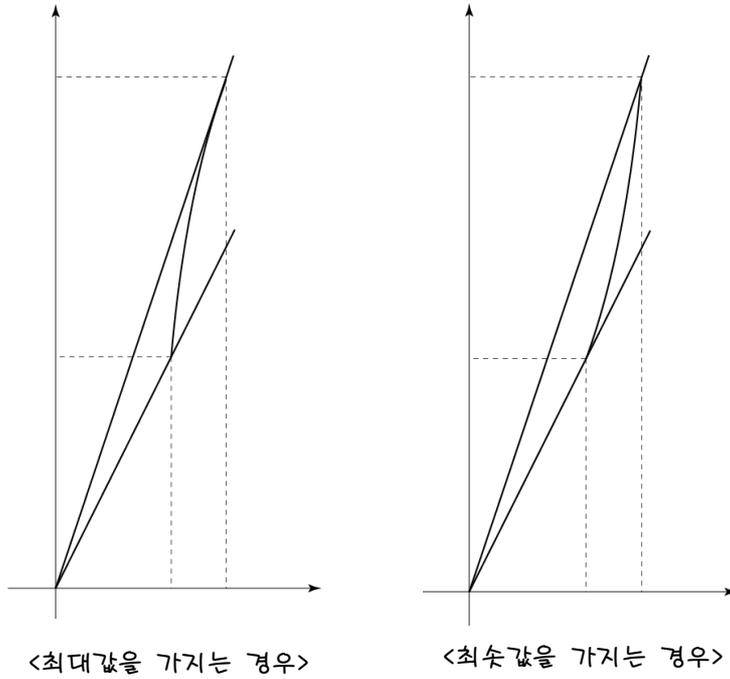
\*조건에 맞는 함수가 나올 수 없다. (case 3)에서 알 수 있다. (a, b의 범위 참조)

그러므로 조건에 맞도록 하는 모든  $f(x)$ 에 대하여  $\int_0^2 f(x) dx$ 의 값은  $\frac{8}{3}$ 으로 일정

하다.

3)  $\int_2^3 f(x) dx$ 에서 최대/최소

구간 (2, 3]에서  $2x \leq f(x) \leq 3x$ 를 만족해야한다. (2, 4), (3, 9)를 지나는 이차함수 또는 일차함수에서 최대는 위로 볼록이고 최소는 아래로 볼록이어야 한다.



적분값이 최대인 경우는  $f'(3)=3$ 를 만족하므로 함수식은  $f(x)=-2x^2+15x-18$ 이고  
 적분값이 최소 경우는  $f'(2)=2$ 를 만족하므로 함수식은  $f(x)=3x^2-10x+12$ 이다.  
 문제에서 구하고자하는 바는 최대최소의 차이이다. 구간  $(0, 2]$ 에서는 적분값이 같으  
 므로 구간  $(2, 3]$ 에서 적분값의 차이를 구하면 된다.  $\int_2^3 -5x^2+25x-30dx=\frac{5}{6}$ 이다.

(공식  $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 일 때,  $\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ 이름)

$\therefore p+q=11$

## 4회 14번

두 원의 중심과 중심 사이의 거리 =  $2n$

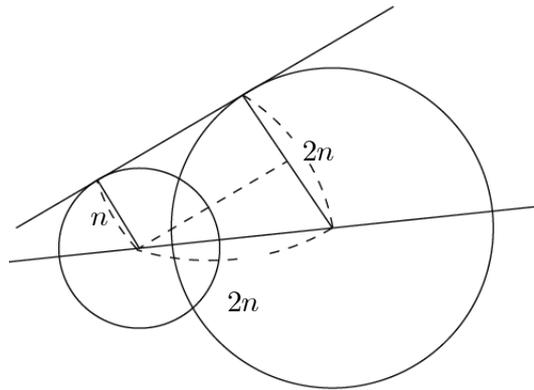
두 원의 반지름 길이의 합  $n + 2n = 3n$

$2n < 3n$  이므로 두 원이 만나고 있다. (그림 참조)

그러므로 공통 외 접선의 개수는 2개가 나오고 각각의 원에 직선이 접하는 두 점 사이의 거리는 같다.

두 원의 중심에서 접선에 수선의 발을 내리고 다음 그림과 같이 직각삼각형을 이용하면  $a_n$  을 구할 수 있다.

$$a_n = \sqrt{4n^2 - n^2}$$



$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \sqrt{3}$$

#### 4회 24번

답: 31

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\text{이므로 } 2\cos^3x-\cos x=2\sin^2x\cos x \left(x \neq 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \pi\right)$$

$$\cos x(2\cos^2x-2\sin^2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos 2x-1)=0$$

따라서 구간  $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ 에서의 근을 구해보면

$$x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{5\pi}{6}, x=\frac{7\pi}{6}, x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2} \text{ 이므로}$$

모든 근의 합은  $\frac{25}{6}\pi$ 이다.

#### 4회 30번

정답 80

매개변수로 나타내어진 식을 보면  $x=t^3+1$ 로  $x$ 가  $t$ 의 삼차방정식으로 나타나 있는데, 일대일 대응됨을 알 수 있다. 즉,  $t$ 값이 커지면  $x$ 값도 커지고  $t$ 값이 작아지면  $x$ 값이 작아진다. 따라서  $t$ 값에 따라  $y$ 값의 변화를 살펴보면  $x$ 값에 따른  $y$ 값의 변화를 살펴볼 수 있다.

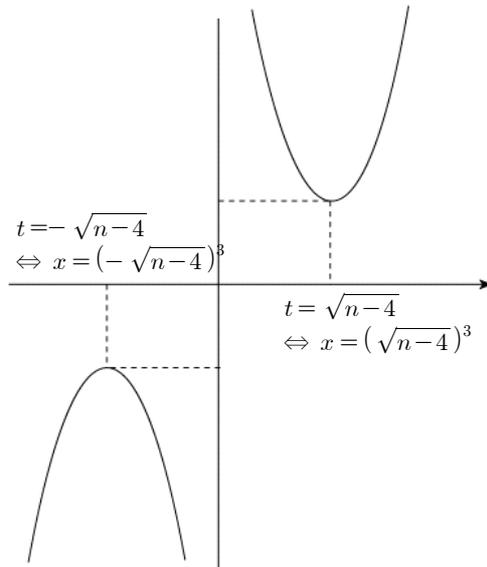
$$1) \frac{dy}{dx}=\frac{t^2-n+4}{2t^4} \text{ 이므로}$$

$$t=-\sqrt{n-4} \text{ or } \sqrt{n+4} \text{ 에서 } \frac{dy}{dx}=0 \text{ 이 된다.}$$

$$\text{즉, } x=(\pm\sqrt{n-4})^3+1 \text{ 에서 } \frac{dy}{dx}=0 \text{ 이다.}$$

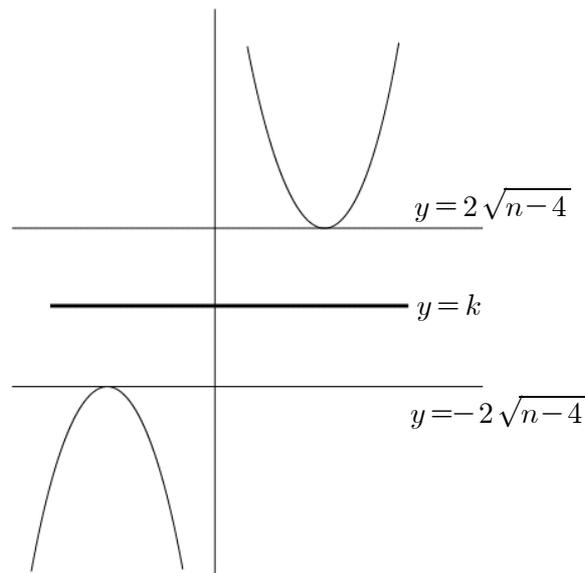
그러므로  $n < 4$ 인  $\frac{dy}{dx}=0$ 인 경우가 존재하진 않는다.

2)  $\frac{dy}{dx}$  와 극한을 이용하여  $t$  값에 따른 함수  $f(x)$ 를 유추할 수 있다.



$t$ 의 값에 따라  $x$  값을 알 수 있다. 그리고  $t$ 에 따른  $y$ 의 값도 알 수 있다. 즉,  $x$  값에 따른  $y$  값도 알 수 있다.

이를 이용하여  $y = |f(x) - k|$ 가 미분가능 하게 하려면  $y = k$ 가 다음의 그림처럼 극대/극소 사이에 있어야 한다는 것을 알 수 있다. (단,  $n \geq 4$ )



$-2\sqrt{n-4} \leq k \leq 2\sqrt{n-4}$ 인 정수  $k$ 의 값들의 개수가  $g(n)$ 이다.

### 주의!

$n=4$ 인 경우는 매개변수 방정식이

$$\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t \end{cases} \text{가 된다. 즉, } t=0 \text{인 경우를 제외하고 모든 실수 전체의 집합에서 연속}$$

이다. ( $t=0$ 일 때, 즉  $x=1$ 인 경우 뚫려있다.) 그러므로 미분가능하도록 하는 값은  $k=0$ 인 경우이다.

$$g(1)=g(2)=g(3)=0$$

$$g(4)=1$$

$$g(5)=5 \quad (k=-2, \dots, 2)$$

$$g(6)=5 \quad (k=-2, \dots, 2)$$

$$g(7)=7 \quad (k=-3, \dots, 3)$$

$$g(8)=9 \quad (k=-4, \dots, 4)$$

$$g(9)=9 \quad (k=-4, \dots, 4)$$

$$g(10)=9 \quad (k=-4, \dots, 4)$$

$$g(11)=11 \quad (k=-5, \dots, 5)$$

$$g(12)=11 \quad (k=-5, \dots, 5)$$

$$g(13)=13 \quad (k=-6, \dots, 6)$$

$$\sum_{n=1}^{13} g(n) = 80$$