1쇄 해설 수정

1회 29번

정답: 130

1) 평면의 위치관계를 결정해보면
$x+2y+2z=9$의 법선벡터는 $(1,2,2)$이고, $y-z=3\sqrt{2}$의 법선벡터는 $(0,1,-1)$이므로 서로 수직임을 알 수 있다.

그리고 점과 평명사이의 거리 공식에 의해 원점에서 각각의 두 평면까지의 거리가 3으로 같음을 확인할 수 있다.

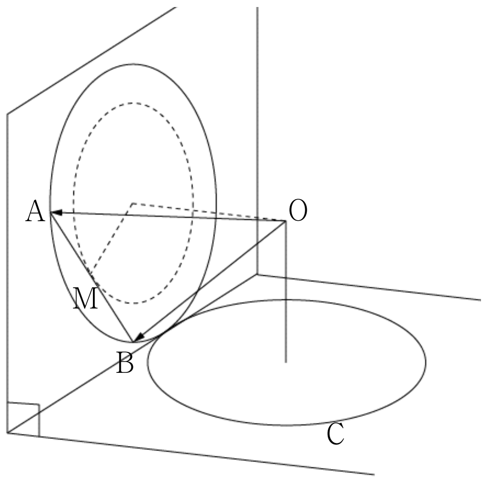
이제 (가) 조건을 해석해보면
$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=3\sqrt{2}$이므로 원뿔의 형태로 두 점 A와 B가 평면 $x+2y+2z=9$ 위를 움직인다.

$|\overrightarrow{OC}|=3\sqrt{2}$이므로 원뿔의 형태로 C가 평면 $y-z=3\sqrt{2}$위를 움직임을 확인 할 수 있다.

따라서 원의 반지름은 3이다. (피타고라스의 정리)

(나) 조건은 점A와 점 B의 중점을 M이라고 하면 $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{13}$을 만족하면서 움직이고 반지름의 길이가 2인 원위에 있음을 알 수 있다.

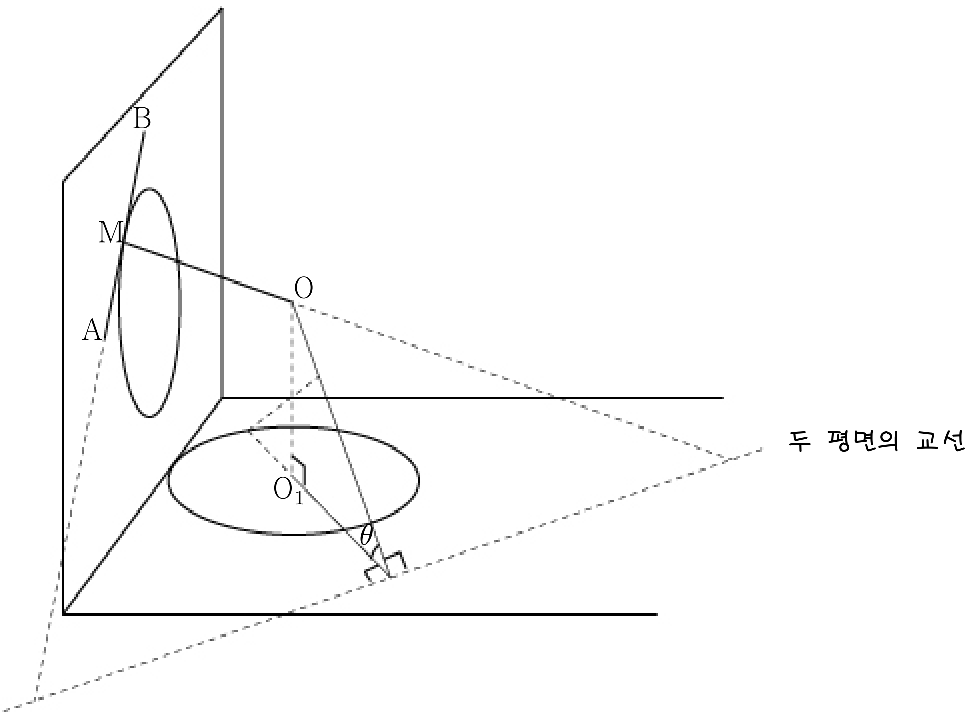
위의 사실을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



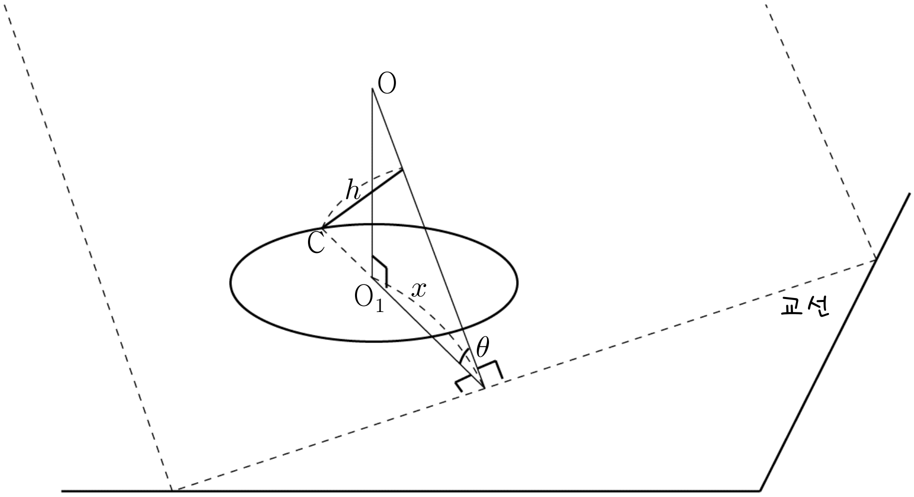
2) 이제 사면체 OABC의 부피를 알아보기 위해서 평면 ABO와 점 C사이의 거리를 보도록 하자. (사면체의 부피에서 밑면 삼각형 ABO의 넓이는 항상 일정하므로)

M이 그리는 원에 접하고 O를 지나는 평면을 비틀어 보면 다음과 같다.

* 직선 MO와 직선 AB는 모드 평면 ABO에 포함된 직선이다.
그러므로 직선 MO와 직선 AB가 점 C가 움직이는 평면과 만나는 두 점을 이은 직선이 교선이 된다. (그림참조)
* 점 C가 움직이는 원의 중심을 O_1이라 하면 점 O_1에서 교선까지의 거리가 바뀐다.
*그림과 같이 삼수선을 볼 수 있다.



3) 이 그림을 조금 더 간단하게 보면, 다음과 같다.



* 점 $\mathrm{O_1}$에서 교선까지의 거리를 x라 하자. 그러면 $0 \le x \le a$ (단, $a > 3$)이다.

* 점 C에서 평면 OAB까지의 거리 h의 최댓값이 되려면 점 C의 위치는 그림과 같이 직선 $\mathrm{CO_1}$이 두 평면의 교선과 수직으로 만나도록 하는 곳이다.

4) 사면체의 높이 $h = (x+3)\sin\theta$

사면체의 밑면 (삼각형 ABO) $= \sqrt{65}$ (항상 일정)

그러므로 사면체의 부피 $= \dfrac{1}{3} \times \sqrt{65} \times h$

$\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+9}}$ $\left(\text{피타고라스 이용, } \overline{\mathrm{OO_1}} = 3\right)$이므로,

$h = (x+3)\sin\theta = 3\sqrt{\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+9}} = 3\sqrt{1+\dfrac{6x}{x^2+9}}$ 이다.

$f(x) = \dfrac{6x}{x^2+9}$ $(x \ge 0)$라 두면 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값이며 최대이다. 또는 분모와 분자에 $\dfrac{1}{x}$를 곱한 뒤 산술기하 평균을 이용하여 알아낼 수 있다.

$\therefore$ 사면체 OABC의 부피의 최댓값 $k = \sqrt{130}$, $k^2 = 130$

2회 30번

1) 조건해석

(가) 조건으로 다음 두 가지 해석해야 한다.

* 함수 $f(x)$가 $(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 4),\ (3,\ 9),\ \cdots$를 지난다.

**
구간 $(0,\ 1]$에서는 $y=0,\ y=x$ 사이에 함수 $f(x)$가 존재한다.
구간 $(1,\ 2]$에서는 $y=x,\ y=2x$사이에 함수 $f(x)$가 존재한다.
구간 $(2,\ 3]$에서는 $y=2x,\ y=3x$ 사이에 함수 $f(x)$가 존재한다.

(나)조건에 의해
* 각 구간마다의 함수가 다를 수 있다는 것을 인지할 수 있다.

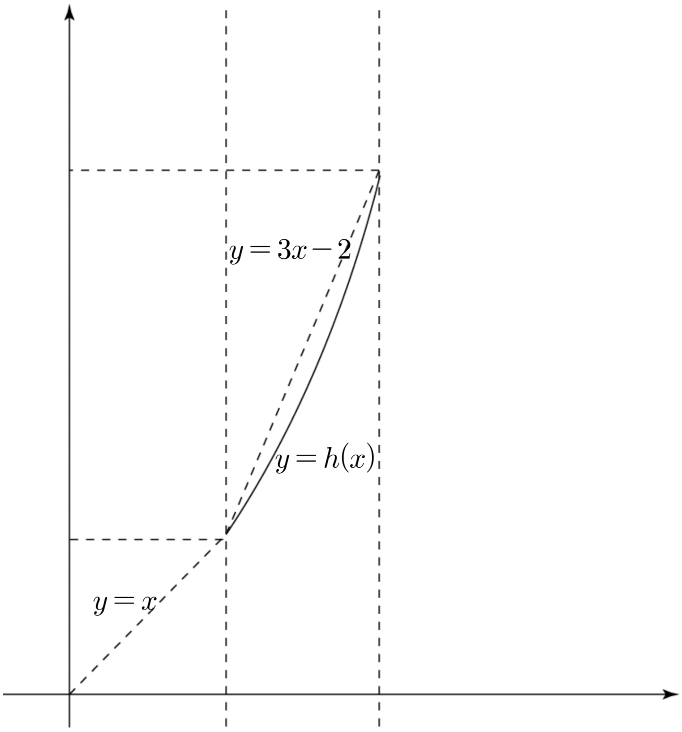
(다) 조건
* $x=1$에서 미분가능하다. 즉, $x=2$에서는 미분가능할 필요는 없다.
그러므로 구간 $(2,\ 3]$에서 함수는 별개로 구하면 된다.

2) 구간 $(0,\ 2]$에서 가능한 함수 $f(x)$ 구하기.

$(case\ 1)$ 구간 $(0,\ 1]$에서 일차함수, 구간 $(1,\ 2]$에서 일차함수
$x=1$에서 미분이 불가능하게 된다. 그러므로 조건에 성립하지 않음.

$(case\ 2)$ 구간 $(0,\ 1]$에서 일차함수: $y=x$, 구간 $(1,\ 2]$에서 이차함수: $y=h(x)$

$x=1$에서 미분가능하므로 $h(x)-x=a(x-1)^2$이 되고, $h(2)=4$를 만족한다.
그러므로 $h(x)=2(x-1)^2+x$
$y=h(x)$와 $y=3x-2$의 교점이 $(1,\ 1),\ (2,\ 4)$임을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.



$$\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}+\int_1^2\{2(x-1)^2+x\}\,dx=\frac{1}{2}+\int_1^2(3x+2)\,dx-\frac{2(2-1)^3}{6}=\frac{8}{3}$$

$(case\ 3)$ 구간 $(0,\ 1]$에서 이차함수: $y=g(x)$, 구간 $(1,\ 2]$에서 이차함수: $y=h(x)$

*

$g(x)$는 $(0,\ 0),\ (1,\ 1)$을 지나므로, $g(x)-x=ax(x-1)$이라 할 수 있다. 그리고 (가) 조건에 의해서 $g'(0)\geq 0$이어야 한다. 즉, $g'(0)=1-a\geq 0$ 이다.
또한, (가) 조건을 만족시키려면 아래로 볼록한 함수가 되어야 하므로 $a>0$이어야 한다.
$\therefore g(x)=ax(x-1)+x\ \ (0<a\leq 1)$

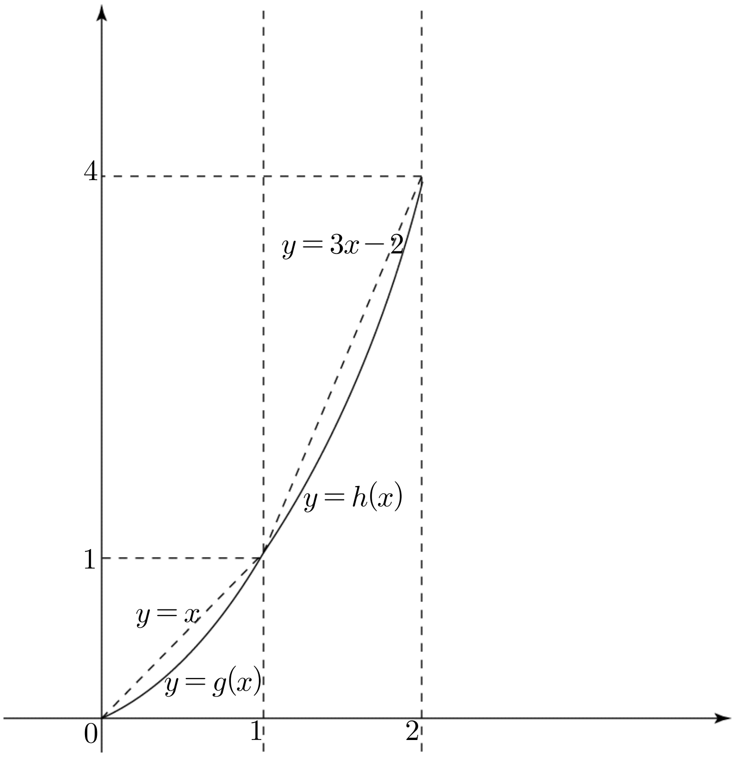
**

$h(x)$는 $(1,\ 1),\ (2,\ 4)$를 지나므로 $h(x)-3x+2=b(x-1)(x-2)$라 할 수 있다.
$\therefore h(x)=b(x-1)(x-2)+3x-2$

***

$g'(1)=h'(1)$이므로 $a+1=-b+3\ \Leftrightarrow\ a+b=2$, $1\leq b<2$이다.

****



$S=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(3x-2)\,dx$ 라 하면

$\int_0^2 f(x)dx=S-\int_0^1 g(x)\,dx-\int_1^2 h(x)\,dx=S-\frac{a(1-0)^3}{6}-\frac{b(2-1)^3}{6}$ 이므로 항상 일정하다.

$\therefore \int_0^2 f(x)dx=3-\frac{2}{6}=\frac{8}{3}$

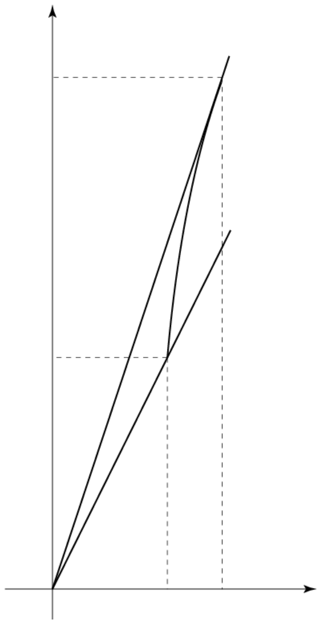
$(case\ 4)$ 구간 $(0,\ 1]$에서 이차함수: $y=g(x)$, 구간 $(1,\ 2]$에서 일차함수

*조건에 맞는 함수가 나올 수 없다. $(case\ 3)$에서 알 수 있다. ($a,\ b$의 범위 참조)

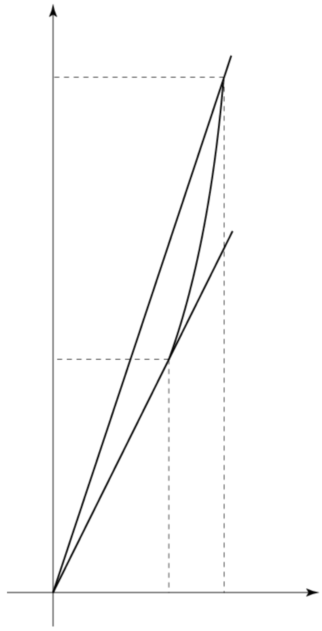
그러므로 조건에 맞도록 하는 모든 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)\,dx$의 값은 $\frac{8}{3}$으로 일정하다.

3) $\int_2^3 f(x)\,dx$에서 최대/최소

구간 $(2,3]$에서 $2x\le f(x)\le 3x$를 만족해야한다. $(2,4)$, $(3,9)$를 지나는 이차함수 또는 일차함수에서 최대는 위로 볼록이고 최소는 아래로 볼록이어야 한다.



<최대값을 가지는 경우>



<최솟값을 가지는 경우>

적분값이 최대인 경우는 $f'(3)=3$를 만족하므로 함수식은 $f(x)=-2x^2+15x-18$이고
적분값이 최소 경우는 $f'(2)=2$를 만족하므로 함수식은 $f(x)=3x^2-10x+12$이다.
문제에서 구하고자하는 바는 최대최소의 차이이다. 구간 $(0,2]$에서는 적분값이 같으므로 구간$(2,3]$에서 적분값의 차이를 구하면 된다. $\int_2^3 -5x^2+25x-30dx=\frac{5}{6}$이다.

(공식 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$일 때, $\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$이용)

$\therefore\ p+q=11$

4회 24번

답: 31

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan2x$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

이므로 $2\cos^3 x-\cos x=2\sin^2 x\cos x \ \left(x\neq 0, \ \frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{4}, \ \pi\right)$

$$\cos x\left(2\cos^2 x-2\sin^2 x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \ \cos x(2\cos 2x-1)=0$$

따라서 구간 $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$에서의 근을 구해보면

$x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$, $x=\frac{7\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$이므로

모든 근의 합은 $\frac{25}{6}\pi$이다.

4회 30번

정답 80

매개변수로 나타내어진 식을 보면 $x=t^3+1$로 x가 t의 삼차방정식으로 나타나 있는데, 일대일 대응됨을 알 수 있다. 즉, t값이 커지면 x값도 커지고 t값이 작아지면 x값이 작아진다. 따라서 t값에 따라 y값의 변화를 살펴보면 x값에 따른 y값의 변화를 살펴볼 수 있다.

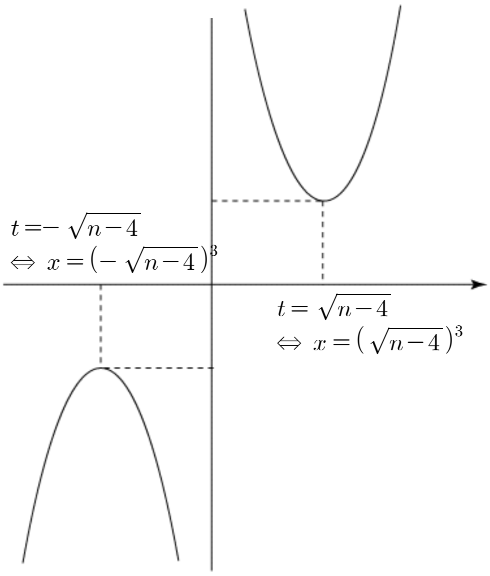
1) $\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-n+4}{2t^4}$ 이므로

$t=-\sqrt{n-4}$ or $\sqrt{n+4}$ 에서 $\frac{dy}{dx}=0$이 된다.

즉, $x=(\pm\sqrt{n-4})^3+1$에서 $\frac{dy}{dx}=0$이다.

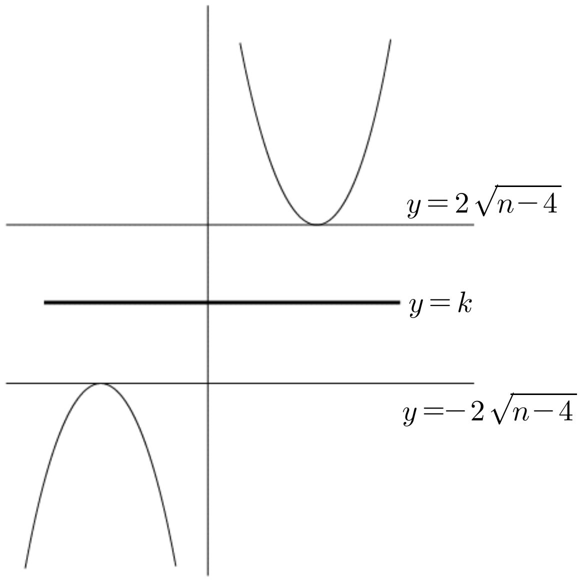
그러므로 $n<4$인 $\frac{dy}{dx}=0$인 경우가 존재하지 않는다.

2) $\frac{dy}{dx}$ 와 극한을 이용하여 t값에 따른 함수 $f(x)$를 유추할 수 있다.



t의 값에 따라 x값을 알 수 있다. 그리고 t에 따른 y의 값도 알 수 있다. 즉, x 값에 따른 y값도 알 수 있다.

이를 이용하여 $y=|f(x)-k|$가 미분가능 하게 하려면 $y=k$가 다음의 그림처럼 극대/극소 사이에 있어야 한다는 것을 알 수 있다. (단, $n \geq 4$)



$-2\sqrt{n-4} \leq k \leq 2\sqrt{n-4}$인 정수 k의 값들의 개수가 $g(n)$이다.

주의!

$n=4$인 경우는 매개변수 방정식이

$\begin{cases} x=t^3+1 \\ y=t \end{cases}$ 가 된다. 즉, $t=0$인 경우를 제외하고 모든 실수 전체의 집합에서 연속이다. ($t=0$일 때, 즉 $x=1$인 경우 뚫려있다.) 그러므로 미분가능하도록 하는 값은 $k=0$인 경우이다.

$g(1)=g(2)=g(3)=0$

$g(4)=1$

$g(5)=5$ $(k=-2, \cdots, 2)$

$g(6)=5$ $(k=-2, \cdots, 2)$

$g(7)=7$ $(k=-3, \cdots, 3)$

$g(8)=9$ $(k=-4, \cdots, 4)$

$g(9)=9$ $(k=-4, \cdots, 4)$

$g(10)=9$ $(k=-4, \cdots, 4)$

$g(11)=11$ $(k=-5, \cdots, 5)$

$g(12)=11$ $(k=-5, \cdots, 5)$

$g(13)=13$ $(k=-6, \cdots, 6)$

$\sum_{n=1}^{13} g(n)=80$