20. 점 P는 사분원 $x^2+y^2=1$ $(x>0,\ y>0)$ 위에 있으므로 그 좌표는

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$입니다.

따라서

$$f(\theta)=\frac{|2\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta+3|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}}\quad \cdots\ (*)$$

이 때, 사분원 $x^2+y^2=1$ $(x>0,\ y>0)$은 직선 $y=2\sqrt{2}x+3$보다 아래쪽에 있으므로

$\sin\theta<2\sqrt{2}\cos\theta+3$, 즉

$|2\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta+3|=2\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta+3$

이고 이를 $(*)$에 대입하여 정리하면

$f(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\theta-\frac{1}{3}\sin\theta+3$입니다.

한편 $g(\theta)=|\sin\theta|=\sin\theta$이므로

$$\begin{aligned}f(\theta)+g(\theta)&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\theta+\frac{2}{3}\sin\theta+3\\&=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)+3\\&=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\theta+\alpha)+3\end{aligned}$$

(단, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$)

이 때, $\sin(\theta+\alpha)$의 값이 최대인 경우는

$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때 이므로

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\&=\frac{1}{\tan\alpha}\\&=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\&=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$