이항 정리

(1) 이항 정리

⇒ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 처럼
항 두개의 합차의 거듭제곱 즉, $(a+b)^n$의 전개식에 대한 정리야

참고로 $(a+b+c)^n$의 전개식에 대한 이론은 “다항 정리” 라고해

원래 이항 정리에서 계수를 계산할 때, “같은것이 있는 순열”을 이용해

$(a+b)^3$의 전개식을 생각해보자

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$ 에서 이 3개의 항에서 각각 어느것을 선택해서 전개할지의 경우의 수로 전개가 돼

만일 $(a+b)$로만 구성된 항 3개중에 a를 2번 b를 한번 선택했다면
어쨌든 곱하면 a^2b가 되겠지 이때 a^2b가 나오는 경우가
aab, aba, baa 이렇게 나올수 있으니깐 a^2b가 3개여서
$3a^2b$ 가 되는거야 여기서 a^2b 의 계수는 aab 를 나열하는 경우의 수
(같은 것이 있는 순열)로 계산하는거지 ($\dfrac{3!}{2!\,1!} = 3$)

만일 3개의 항에서 전부 a를 선택했다면 aaa 가 되는거니깐
a^3이고 이때 계수는 aaa를 나열하는 방법의 수(같은것이 있는순열)
이니깐 1가지 방법 ($\dfrac{3!}{3!} = 1$)이 되서 $1a^3$형태의 항이 나오는 거야

결국 $(a+b)^3 = \dfrac{3!}{3!}a^3 + \dfrac{3!}{2!\,1!}a^2b + \dfrac{3!}{1!\,2!}ab^2 + \dfrac{3!}{3!}b^3$ 으로
전개가되지

참고로 $(a+b)^n$의 전개식에서 항의 개수는 $n+1$ 개야

이건 중복조합이랑 관련이 있는데 a를 x개 선택하고 b를 y개 선택하는 경우의 수가 바로 항의 개수가 되거던
즉, $x+y=n$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$을 만족하는 경우의 수가 되지
근데 이것은 완벽하게 중복조합이 되잖아ㅎ
${}_2H_n = {}_{2+n-1}C_n = {}_{n+1}C_n = {}_{n+1}C_1 = n+1$

이번엔 $(a+b)^4$ 전개 해 볼까 항의 개수 총 5개겠지

$$(a+b)^4 = \frac{4!}{4!}a^4 + \frac{4!}{3!\,1!}a^3b + \frac{4!}{2!\,2!}a^2b^2 + \frac{4!}{1!\,3!}ab^3 + \frac{4!}{4!}b^4$$

그리고 다항 정리도 이항 정리랑 같은 이론으로 정리가 돼

$(a+b+c)^n$ 의 항의 개수는 ${}_3H_n = {}_{3+n-1}C_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2$
$= \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$ 개야

$(a+b+c)^2$ 을 전개해보면 개수는 총 $\dfrac{3\times 4}{2} = 6$개가 되고

$(a+b+c)^2 = \dfrac{2!}{2!}a^2 + \dfrac{2!}{2!}b^2 + \dfrac{2!}{2!}c^2 + \dfrac{2!}{1!\,1!}ab + \dfrac{2!}{1!\,1!}ac + \dfrac{2!}{1!\,1!}bc$
가 돼

이런식으로 이항 정리나 다항 정리의 이론은 동일해
즉, 다항식의 거듭제곱의 정리에서 항의 개수는 중복조합$({}_nH_4)$로 구하고 항의 계수는 같은것이 있는 순열$\left(\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots}\right)$을 이용해서 구하는 거야

근데 항이 2개인 같은것이 있는 순열은 조합으로도 구할 수 있는거 알지?

$aaaabbb$ 나열하는 방법은 $\frac{7!}{4!3!}$ 인데 이거는
나열되는 7자리 중에 a가 들어갈 4자리 선택하는 경우의 수랑 동일해 (a의 자리가 선택되면 b가 들어갈 자리는 자동으로 결정되니깐 a만 들어갈 자리만 선택하면 돼) 즉, ${}_7C_4$ 가 되지
물론 b가 들어갈 3자리를 선택해도 돼 ${}_7C_3$

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7!}{4!3!} \quad \left(\because {}_nC_r = {}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \right)$$

이러한 이유로 이항 정리에서는 항의 계수를 구할 때,
같은것이 있는 순열 대신 조합으로 구할 수가 있어

즉, $(a+b)^3 = {}_3C_0\,a^3 + {}_3C_1\,a^2b + {}_3C_2\,ab^2 + {}_3C_3b^3$

(b의 자리를 결정하는것을 기준으로 했어)

이제 이걸 일반화 하면 이항정리는

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + {}_nC_3a^{n-3}b^3 + {}_nC_4a^{n-4}b^4 + \cdot\cdot\cdot$$
$$\cdot\cdot + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdot\cdot\; {}_nC_nb^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_ra^{n-r}b^r$$

이거야ㅎ

여기서 항의 개수는 $n+1$개고
항 앞에있는 계수들, ${}_nC_0$, ${}_nC_1$, $\cdot\cdot$ ${}_nC_{n-1}$, ${}_nC_n$ 을
“이항 계수” 라고 해
이항 계수의 특징 중에 주목할 만한것은 대칭성이야
${}_nC_0 = {}_nC_n$, ${}_nC_1 = {}_nC_{n-1}$, ${}_nC_2 = {}_nC_{n-2}$, $\cdot\cdot$

그리고 $\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\,a^{n-r}b^r$ 에서 ${}_nC_r\,a^{n-r}b^r$ 을 “이항정리의 일반항”
이라고해. 이항정리 계수 문제에서 아주 중요하게 쓰이지ㅎ

(2) 이항 정리 문제에서 계수구하기

$\Rightarrow$ 이항 정리에서 계수문제는 아주 중요한 유형인데
이건 전적으로 이항 정리 일반항으로 풀어ㅎ

$\ll$ 이항정리 계수 구하기 $\gg$
① 일반항 ${}_nC_r a^r b^{n-r}$ 을 쓴다
② 계수 따로 문자 따로 분리 (이 때, 부호도 계수로 분리)
③ 분리된 식을 보고주어진 조건에 만족하는 미지수 구한다

$ex)$ $\left(x^2 - \dfrac{a}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^3}$ 의 계수가 -192 일 때, a의 값은?

$\Rightarrow$ 일반항 ${}_6C_r (x^2)^{6-r}(-\dfrac{a}{x})^r$ 에서 계수 따로 문자 따로 분리하면
${}_6C_r(-a)^r x^{12-2r-r} = {}_6C_r(-a)^r x^{12-3r}$ 에서 $\dfrac{1}{x^3}(= x^{-3})$의
계수 문제니깐 $12-3r = -3$ 에서 $r = 5$

$\therefore$ $\dfrac{1}{x^3}$ 의 계수는 ${}_6C_5(-a)^5 = -6\,a^5 = -192$, $a^5 = 32$, $\therefore a = 2$

$ex)$ $(1+2x)^4(1-x)^5$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하여라

$\Rightarrow$ 위 문제처럼 두 식의 곱으로 구성된 식의 계수문제는
이건 각각의 이항 정리 일반항의 곱으로 풀면돼

$${}_4C_r(1)^{4-r}(2x)^r \bullet {}_5C_s(1)^{5-s}(-x)^s = {}_4C_r\,{}_5C_s(2)^r(-1)^s\,x^{r+s}$$

이 상태에서 $r+s=2$ 가 되는 $r,\ s$를 부정방정식으로 풀면돼
참고로 $r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\quad s=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$를 가질 수 있지

$(r,\ s)=(0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0)$
이 식을 다 대입해서 더한값이 답이 돼

x^2의 계수 : ${}_4C_0\,{}_5C_2(2)^0(-1)^2+{}_4C_1\,{}_5C_1(2)^1(-1)^1+{}_4C_2\,{}_5C_0(2)^2(-1)^0$

(3) $(1\ +\ x)^n$의 전개식

$\Rightarrow$ 이항 정리관련 공식은 거의 이 전개식에서 나온다고 보면 돼
당연히 가장 중요한 식이고 이항 정리 문제에서 모르는 식이
나왔을 때, 이 전개식을 그냥 적고 x에 알맞는 값을 대입하면
쉽게해석이 되는 경우도 많아

$$\boxed{(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + {}_nC_r x^r + \cdot\cdot\ {}_nC_n x^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^r}$$

① x^r 의 계수가 ${}_nC_r$ 이야 이건 조합의 새로운 해석이지ㅎ
만일 ${}_{10}C_3$ 이라는 것을 해석할 때, 서로 다른 10개 중에 3개를
선택하는 경우의 수 라고도 하지만
“ $(1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x^3 의 계수다” 라는 것도 알 수가 있어

② x와 n 에 특정한 값을 대입한 식

$$\Rightarrow {}_{10}C_0 - \frac{1}{2}\,{}_{10}C_1 + (\frac{1}{2})^2\,{}_{10}C_2 - \cdot\cdot - (\frac{1}{2})^9\,{}_{10}C_9 + (\frac{1}{2})^{10}\,{}_{10}C_{10}$$

이 식의 값은 무엇일까?? 엄청 복잡하지ㅎ

이 때는 $(1+x)^n$ 전개식을 적어보고 위식과 비교하면서 x와 n에
뭘 대입했나 조사해 보면 돼

비교해보면 $n = 10$이고 $x = -\dfrac{1}{2}$ 라는 것을 쉽게 알수있어

그래서 이 값은 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$ 이야

일반적으로 항의 계수가 등비수열 형태로 구성되어있으면
$(1+x)^n$의 전개식에서 숫자를 대입한 식이라 생각하면돼ㅎ

이제는 x 에다가 특정한 값을 대입했을때 나오는 식을 정리 해 볼게

$$\boxed{(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + {}_nC_3 x^3 + \cdot\cdot\ {}_nC_n x^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^r}$$

② $x = 1$ 대입

$\Rightarrow \quad 2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdot\cdot\ {}_nC_n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r$

여기서 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdot\cdot\ {}_nC_n$ 을 이항계수의 합이라고 해
0부터 n까지 쭈욱 더한건 2^n승이지ㅎ

$ex)$ ${}_4C_0 + {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4 = 2^4 = 16$

② $x = -1$ 대입

$\Rightarrow 0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdot\cdot\ (-1)^n {}_nC_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_nC_r$
0부터 n까지푸 마 푸 마 (+ − + −) 한 것은 0이다

$ex)$ ${}_3C_0 - {}_3C_1 + {}_3C_2 - {}_3C_3 = {}_4C_0 - {}_4C_1 + {}_4C_2 - {}_4C_3 + {}_4C_4 = 0$

$\Rightarrow$ 여기서 − 부분을 이항하면

${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdot\cdot = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdot\cdot = 2^{n-1}$
짝수항 끼리 끼리 = 홀수항 끼리끼리 = 2^{n-1} ($\because$ 두 식의 합 = 2^n)

$ex)$ ${}_4C_0 + {}_4C_2 + {}_4C_4 = {}_4C_1 + {}_4C_3 = 2^3$

${}_5C_0 + {}_5C_2 + {}_5C_4 = {}_5C_1 + {}_5C_3 + {}_5C_5 = 2^4$

③ $x = i$ 대입

$$(1+i)^n = {}_nC_0 + i\,{}_nC_1 - {}_nC_2 - i\,{}_nC_3 + {}_nC_4 + i\,{}_nC_5 - {}_nC_6 - i\,{}_nC_7 + \cdots$$

$$= ({}_nC_0 - {}_nC_2 + {}_nC_4 - {}_nC_6 \cdots) + ({}_nC_1 - {}_nC_3 + {}_nC_5 - {}_nC_7 \cdots)i$$

$$= \sum_{r=0}^{n} i^n\,{}_nC_r$$

$\Rightarrow$ 짝수항 끼리 푸마푸마 $= (1+i)^n$의 실수부
  홀수항 끼리 푸마푸마 $= (1+i)^n$의 허수부 인데
$(1+i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$ 이기 때문에 $(1+i)^n$ 은 $(1+i)^2$ 을 이용하면 쉽게 구할 수 있어 거기서 실수부 허수부를 보고 답을 낼 수 있지ㅎ

$ex)$ ${}_{100}C_0 - {}_{100}C_2 + {}_{100}C_4 - {}_{100}C_6 + \cdots - {}_{100}C_{98} + {}_{100}C_{100}$

$\Rightarrow$ 짝수항의 푸 마 푸 마 니깐 $(1+i)^{100}$의 실수부가 되지

$(1+i)^{100} = ((1+i)^2)^{50} = (2i)^{50} = 2^{50} i^{50} = 2^{50} i^2 = -2^{50}$

실수부는 -2^{50} , 허수부는 0

$\therefore$ ${}_{100}C_0 - {}_{100}C_2 + {}_{100}C_4 - {}_{100}C_6 + \cdots - {}_{100}C_{98} + {}_{100}C_{100} = -2^{50}$

$cf)$ ${}_{100}C_1 - {}_{100}C_3 + {}_{100}C_5 - {}_{100}C_7 + \cdots + {}_{100}C_{97} - {}_{100}C_{99} = 0$ ($(1+i)^{100}$의 허수부))

④ 미분

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1\,x + {}_nC_2\,x^2 + {}_nC_3\,x^3 + \cdot\cdot\;{}_nC_n\,x^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\,x^r$$

이 상태에서 양변을 미분하자

$$n(1+x)^{n-1} = {}_nC_1 + 2\,{}_nC_2\,x + 3\;{}_nC_3\,x^2 + \cdot\cdot\; n\;{}_nC_n\,x^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r\;{}_nC_r\;x^{r-1}$$

여기서 $x = 1$ 대입하면

$$n\,\cdot\,2^{n-1} = {}_nC_1 + 2\,{}_nC_2 + 3\,{}_nC_3 + \cdot\cdot\; n\;{}_nC_n = \sum_{r=0}^{n} r\;{}_nC_r$$ 이 되지

이 식의 특징은 ${}_nC_1$ 부터 시작하고 계수들이 등비수열을
이루지 안지 등비수열 아닌것 계수를 갖는 식은 미분한거라
생각하면 돼

$$ {}_{10}C_1 + \frac{2}{5}\,{}_{10}C_2 + \frac{3}{25}\;{}_{10}C_3 + \cdot\cdot\; 10\;{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^9 = 10\,(1+\frac{1}{5})^9$$

⑤ 적분

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1\,x + {}_nC_2\,x^2 + {}_nC_3\,x^3 + \cdot\cdot\ {}_nC_n\,x^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\,x^r$
에서 양변을 적분하면

$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} = {}_nC_0\,x + \frac{1}{2}\,{}_nC_1\,x^2 + \frac{1}{3}\,{}_nC_2\,x^3 + \cdot\cdot\ \frac{1}{n+1}\,{}_nC_n\,x^{n+1} + C$
$= \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r+1}\,{}_nC_r\,x^{r+1} + C$ ($x=0$ 대입 $\rightarrow$ C(적분 상수) $=$ $\frac{1}{n+1}$)

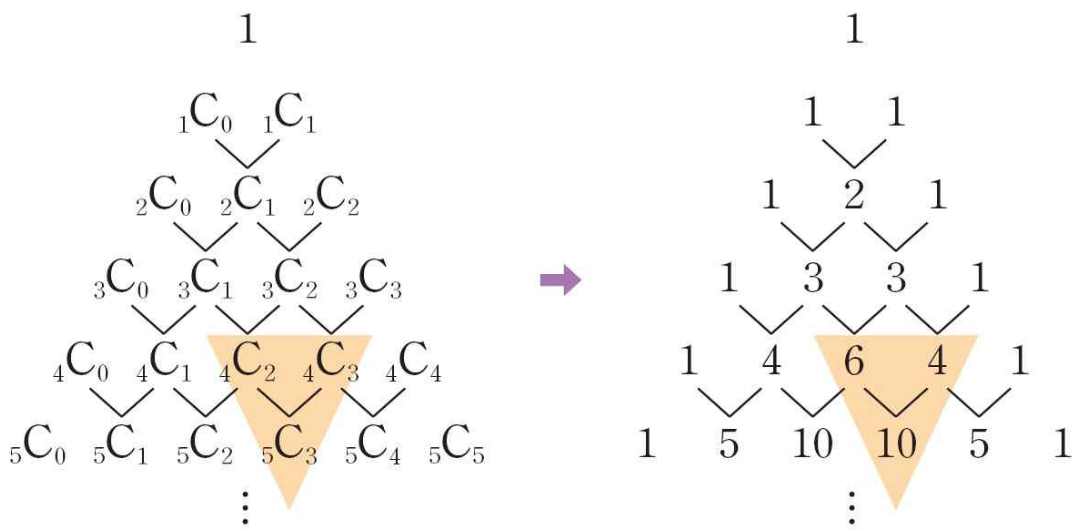
$\Rightarrow$ $x = 1$ 대입하면

$\frac{1}{n+1}2^{n+1} = {}_nC_0 + \frac{1}{2}\,{}_nC_1 + \frac{1}{3}\,{}_nC_2 + \cdot\cdot\ \frac{1}{n+1}\,{}_nC_n + \frac{1}{n+1}$

$cf)$ $(1+x)^n$의 전개식의 미분식과 적분식은 암기용이아니라
그냥 이렇게 미적분으로 변형이 가능하다 정도만 알면 돼

(4) 파스칼의 삼각형

$\Rightarrow (a+b)^n$ 의 전개식에서 n에 따라 이항계수들을 나열한것을 " 파스칼의 삼각형" 이라고 해 (이등변 삼각형 모양이야 ㅎ)



우선 위의 그림에서 역삼각형 색깔칠해진 부분을 보면
위의 두식을 더하면($_4C_2 + {_4C_3}$) 밑의 식 ($_5C_3$)이 되는걸 알 수 있지
이걸 일반화 시키면 $_nC_r = {_{n-1}C_{r-1}} + {_{n-1}C_r}$ 인데,

이건 조합이론에서 선택과 배제로 $_nC_r$을 이해할때 나온 이론이야

이것도 꼭 암기해야할 공식이야

나중에 " 하키스틱 정리" 랑 같이 암기하는게 좋은데

우선 앞에꺼는 무조건 증가하고($n-1 \rightarrow n$)
뒤에꺼는 계속 증가했으면 ($r-1$, r 로 증가)
끝에것을 쓰고(끝이 r이니깐 r을 씀)
증가한적이 없으면 하나증가 시킨다 생각하면돼

$$\boxed{{_nC_r} = {_{n-1}C_{r-1}} + {_{n-1}C_r}}$$

$ex)$ $_3C_2 + {_3C_3} = {_4C_3}$, $\quad$ $_5C_0 + {_5C_1} = {_6C_1}$

파스칼의 삼각형을 보면서 $(1+x)^n$의 전개식에서 배웠던것들을 정리 해 보자

① ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \bullet \bullet \, {}_nC_n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r = 2^n$

② ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \bullet \bullet \, (-1)^n \, {}_nC_n = 0$

③ ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \bullet \bullet = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + {}_nC_7 + \bullet \bullet = 2^{n-1}$

여기서 추가할게 있는데, 파스칼의 삼각형에서 6번째 줄 ($(a+b)^5$의 이항계수)
${}_5C_0$ ${}_5C_1$ ${}_5C_2$ ${}_5C_3$ ${}_5C_4$ ${}_5C_5$ 를 보면

${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5$ 인데

${}_5C_0 = {}_5C_5$, ${}_5C_1 = {}_5C_4$, ${}_5C_2 = {}_5C_3$ 이므로
${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 = {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5$ 이 되니깐

${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 = {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^4$ 이 되지

그러므로 2^4을 나타내는 방법은

$2^4 = {}_4C_0 + {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4$

$= {}_5C_0 + {}_5C_2 + {}_5C_4 = {}_5C_1 + {}_5C_3 + {}_5C_5$

$= {}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 = {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5$

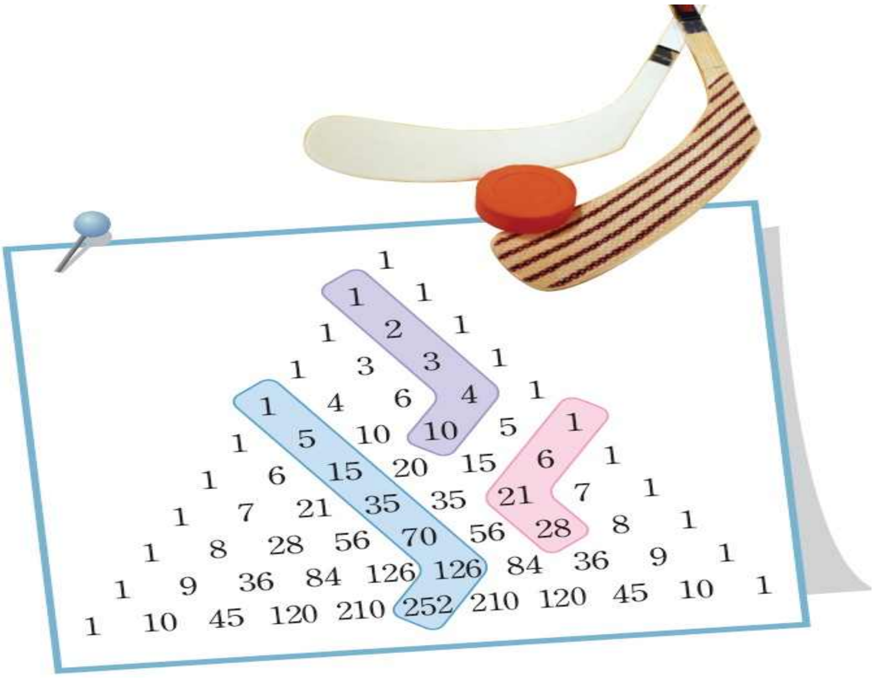
$cf)$ ${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 = {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^4$ 이게 되는 이유는
$n=5$ (홀수)일 때, 항의 개수는 6 (짝수)개가되서 항이 반으로
딱 나뉘어 질때야

만일 $n=4$ 인경우에는 항의개수가 5(홀수)개가 되서
가운데 항도 반으로 짤라야 2^3을 만들 수가 있어

$2^{4-1} = 2^3 = {}_4C_0 + {}_4C_1 + \frac{1}{2}\, {}_4C_2 = \frac{1}{2}\, {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4$

④ 하키스틱 정리

⇒ 파스칼의 삼각형에서 하키스틱 모양의 식의 정리가 있어



우선 하키스틱정리는 두가지 패턴이 있어

① ${}_3C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 = {}_8C_4$

⇒ ${}_nC_r$ 에서 $r = 0$ 즉, ${}_nC_0$ 으로 시작하는 식이야
원리는 단순해 앞에꺼(n 부분)는 무조건 증가해
그리고 뒤에꺼(r 부분)은 그동안 증가했으면 끝에꺼를쓰고
증간하지 안으면 하나 증가 이런 원리로 답을 내면돼
지금 위에 보면 앞에꺼는 무조건 증가하니깐 8이 됬고,
뒤에꺼는 0, 1, 2, 3, 4 까지 증가했으니깐 끝에 수인 4를
쓰면 돼

② ${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 = {}_8C_4$

⇒ 이건 ${}_nC_n$ 으로 시작을 해야돼 같은 원리로 해석하면
앞에꺼는 무조건 증가하니깐 8이되고 뒤에꺼는 증가되지 안았으니깐
(3으로고정) 4가 되는거야

안녕맨의 끝장인강

⌬ 이항 정리 주요 유형 ⌬

(1) $(1+x)^{20}=(1+x)^{10}(1+x)^{10}$ 을 이용해서 $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\frac{({}_{10}C_k)^2}{{}_{20}C_{11}}$ 을 간단히 하여라

$\Rightarrow$ 우선 $\sum$ 에서 $({}_{10}C_k)^2$ 부분에 변수가 있지? 나머지는 상수고

즉, $({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2+({}_{10}C_3)^2+\cdots({}_{10}C_{10})^2$ 이게 무엇인지가 핵심이네

$(1+x)^{10}(1+x)^{10} = (1+x)^{10}(x+1)^{10}$ 이니깐 여기서
$(1+x)^{10}$ 와 $(x+1)^{10}$ 각각을 이항정리로 전개해 볼게

$$(1+x)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2+{}_{10}C_3x^3+\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10}$$
$$(x+1)^{10}={}_{10}C_0x^{10}+{}_{10}C_1x^9+{}_{10}C_2x^8+{}_{10}C_3x^7+\cdots+{}_{10}C_{10}$$

$(1+x)^{10}(x+1)^{10}$ 이 식은 결국 위의 두 식의 곱인데
두 식을 곱해서 위 아래 식 순서대로 곱하면 x^{10}이 나오지
즉, $(1+x)^{10}(x+1)^{10}$ 을 전개했을 때, x^{10}의 계수만 뽑아내면

$({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2+({}_{10}C_3)^2+\cdots({}_{10}C_{10})^2$ 이 돼

근데 위 문제에서 $(1+x)^{10}(x+1)^{10} = (1+x)^{20}$이니깐

$({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2+({}_{10}C_3)^2+\cdots({}_{10}C_{10})^2$ 은 $(1+x)^{20}$의 x^{10}의 계수 ${}_{20}C_{10}$ 이 되는거지 ㅎ

$$\therefore \sum_{k=0}^{10}({}_{10}C_k)^2=({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2+({}_{10}C_3)^2+\cdots({}_{10}C_{10})^2={}_{20}C_{10}$$

$$\sum_{k=0}^{10}\frac{({}_{10}C_k)^2}{{}_{20}C_{11}}=\frac{{}_{20}C_{10}}{{}_{20}C_{11}}=\frac{11}{10}$$

(2) $1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\bullet\bullet\bullet(1+x)^{20}$ 을 이용하여

$\sum_{k=3}^{20} {}_kC_3$ 값을 구하시오

풀이1) $\sum_{k=3}^{20} {}_kC_3 = {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \bullet\bullet\ {}_{20}C_3$ 에서

하키스틱 원칙으로 바로 나오네 ${}_{21}C_4$ (앞에꺼는 무조건 증가,
뒤에꺼도 3으로 증가안했으니깐 4로 증가)

풀이2) $\sum_{k=3}^{20} {}_kC_3 = {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \bullet\bullet\ {}_{20}C_3$ 에서
${}_3C_3$ 은 $(1+x)^3$의 전개식에서 x^3의 계수가 되고
${}_4C_3$ 은 $(1+x)^4$의 전개식에서 x^3의 계수가 되고
${}_5C_3$ 은 $(1+x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 되고
$\bullet\bullet$
${}_{20}C_3$ 은 $(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^3의 계수가 되지

즉, ${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \bullet\bullet\ {}_{20}C_3$ 은
$(1+x)^3+\bullet\bullet\bullet(1+x)^{20}$ 에서의 x^3의 계수가 돼

근데 $1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\bullet\bullet\bullet(1+x)^{20}$ 이 식에서
$1+(1+x)+(1+x)^2$ 이 부분은 절대 x^3 의 계수가 없지?
그러니깐 $1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\bullet\bullet\bullet(1+x)^{20}$ 에서의 x^3의 계수와
$(1+x)^3+\bullet\bullet\bullet(1+x)^{20}$ 에서의 x^3의 계수가 같겠지

결국 $\sum_{k=3}^{20} {}_kC_3$ 은 $1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\bullet\bullet(1+x)^{20}$
에서 x^3의 계수 구하라는 문제가 돼
$1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\bullet\bullet(1+x)^{20}$ 은 등비수열의 이니깐
$\frac{(1+x)((1+x)^{20}-1}{(1+x)-1} = \frac{(1+x)^{21}-(1+x)}{x}$ 여기서 $(1+x)^{21}$ 에서 x^4의
계수가 전체에서 x^3의 계수가 돼 $\therefore {}_{21}C_4$

(3) x에 대한 항등식

$1+x+x^2+x^3+\cdot\cdot\cdot\cdot+x^8$

$= a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+\cdot\cdot\; a_8(x-1)^8$ 일 때,

a_4의 값을 구하시오

$\Rightarrow$문제가 약간 이상하지? 보통
$1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdot\cdot\,(x+1)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2+\cdot\cdot\; a_8x^8$
a_4 구하라는게 일반적이야ㅎ ((2)번 풀이)
복습겸 풀어보자

a_4 는 x^4의 계수인데 이건결국
$1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdot\cdot\,(x+1)^8$ 의 x^4의 계수랑 같지
${}_4C_4 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 = {}_9C_5$ (하키스틱 정리) 또는

$1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdot\cdot\,(x+1)^8$

$= \dfrac{(x+1)((x+1)^8-1)}{(x+1)-1} = \dfrac{(x+1)^9-(x+1)}{x}$ 에서 $(x+1)^9$의 x^5 계수가
되니깐 ${}_9C_5$

이제 진짜 문제를 풀어보자

솔직히 진짜문제와 방금 푼 문제는 같은 문제야ㅎ

$x-1 = t$ 로 치환해봐ㅎ 그럼
$1+(t+1)+(t+1)^2+(t+1)^3+\cdot\cdot\cdot\cdot+(t+1)^8$
$= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdot\cdot\; a_8t^8$

x나 t나 식의 모양이 완벽히 일치하니깐

답도 동일하지 ${}_9C_5$