⌬ 여러 가지 수열(2) ⌬

⇒이 단원에선 정형화되지는 안지만 수의 규칙성과 주기성을 이용해서 나타낼 수 있는 다양한 수열을 배운다고 생각하면 돼

(1) 반복수

⇒각 자리 숫자가 규칙성과 주기를 갖는 수는 수열로 어떻게 나타내느냐에 대한 얘기야
밑에 여러가지 예를 통해서 익혀보자ㅎ

① $99 \cdot\cdot\cdot 99 = 10^n - 1 \Rightarrow 11 \cdot\cdot\cdot 11 = \frac{1}{9}(10^n - 1)$

$77 \cdot\cdot\cdot 77 = \frac{7}{9}(10^n - 1)$

⇒ $9 = 10^1 - 1$, $99 = 10^2 - 1$, $999 = 10^3 - 1$, $\cdot\cdot$ 에서 일반항은 n번째를 구하는 건데 $a_n = 999 \cdot\cdot 99$(9가 n개) $= 10^n - 1$ 이 되지

여기서 우리는 $\frac{1}{9}a_n = 111 \cdot\cdot 11$(1이 n개) $= \frac{1}{9}(10^n - 1)$ 이라는 것을 알 수 있어

그러므로 일반적인 수 $aaa \cdot\cdot aa$(1이 n개)는 $111 \cdot\cdot 11$(1이 n개)에다가 a를 곱한 형태니깐 $aaa \cdot\cdot aa$(1이 n개) $= \frac{a}{9}(10^n - 1)$로 나타낼 수가 있는거야

② $44\cdots44_{(5)}=5^n-1 \Rightarrow 11\cdots11_{(5)}=\frac{1}{4}(4^n-1)$

$33\cdots33_{(5)}=\frac{3}{4}(4^n-1)$

$\Rightarrow$5진법은 5가 10이고 4가 9야 ㅎ 그렇게 적용하면 돼 ㅎ

지금 $44\cdots44_{(5)}$ 는 $99\cdots9_{(10)}$ 같은거야 원래는 $\frac{1}{9}(10^n-1)$ 인데

10을 5로 9를 4로 바꾸면 $\frac{1}{4}(5^n-1)$ 이 되는거지

$33\cdots33_{(5)}$ 은 $11\cdots11_{(5)}$ 에다가 3을 곱한거니깐

$\frac{3}{4}(4^n-1)$ 이 되는거지

③ $0.99\cdots99=1-\left(\frac{1}{10}\right)^n \Rightarrow 0.77\cdots77=\frac{7}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$

$\Rightarrow 0.9=\frac{9}{10^1}=1-\left(\frac{1}{10}\right)^1,\quad 0.99=\frac{99}{10^2}=1-\left(\frac{1}{10}\right)^2,$

$0.999=\frac{999}{10^3}=1-\left(\frac{1}{10}\right)^3,\cdots$ 에서

일반항 $a_n=0.99\cdots99$ (9가 n개) $=1-\left(\frac{1}{10}\right)^n$ 이 되는 거지

위의 ①번에서 처럼 위 식을 9로 나누면

$\frac{1}{9}a_n=0.11\cdots11$ (1이 n개) $=\frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$ 가 되고

마찬가지로 $0.aa\cdots aa$ (a가 n개) $=\frac{a}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$ 가 되는거야

④ $0.44 \cdot\cdot\cdot 44_{(5)} = 1-\left(\frac{1}{5}\right)^n \Rightarrow 0.33 \cdot\cdot\cdot 33_{(5)} = \frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

$\Rightarrow$ 위에 ① 번과 ②번 관계와 완벽히 일치해

5진법에선 10이 5이고 9가 4로 바뀐다 생각하면 돼 ㅎ

⑤ $99 \cdot\cdot\cdot 99\ (2n$개$) \Rightarrow 10^{2n}-1$의 응용

$$\frac{1}{99}(99 \cdot\cdot\cdot 99) = 1010 \cdot\cdot\cdot 01 = \frac{1}{99}\left(10^{2n}-1\right)$$

$\therefore\ 1212 \cdot\cdot\cdot 1212 = \frac{12}{99}\left(10^{2n}-1\right)$

$\Rightarrow$ 이번에는 2개씩 반복되는 반복수에 대한 해법이야

이때는 9가 짝수개가 있는 반복수의 일반항을 이용하는데

$99 = 10^2-1,\ 9999 = 10^4-1,\ 999999 = 10^6-1$ 이니깐

n번째에는 9가 $2n$ 개 있는 거니깐

$a_n = 99 \cdot\cdot\cdot 99\ (2n$ 개$) = 10^{2n}-1$ 이 성립하겠지

이번엔 이 식을 99로 나눈다면

$\frac{1}{99}(99 \cdot\cdot\cdot 99) = 1010 \cdot\cdot\cdot 01 = \frac{1}{99}\left(10^{2n}-1\right)$ 이렇게 되겠지

여기다 12를 곱한게 $1212 \cdot\cdot\cdot 1212 = \frac{12}{99}\left(10^{2n}-1\right)$ 가 되는거야

$ex1)\ 1313 \bullet \bullet \bullet\ 1313\,(100개) = \frac{13}{99}(10^{100}-1)$

$\Rightarrow$ 여기서 주의할 점이 실제 13이 한쌍이면 총 50쌍이라서

$\frac{13}{99}(10^{50}-1)$ 을 쓰면 절대 안돼 공식이 $\frac{13}{99}(10^{2n}-1)$ 으로 n이 아니라
$2n$ 이었으니깐 총 개수인 100을 써 줘야돼

$ex2)\ 23\ 23 \bullet \bullet \bullet\ 23\ 23_{(5)}\ (100개) = \frac{23_{(5)}}{44_{(5)}}\left\{5^{100}-1\right\} = \frac{13}{24}\left\{5^{100}-1\right\}$

$\Rightarrow$ 5진법은 위에서와 마찬가지로 10을 5로 보고 9를 4로 바꾸면 돼

하지만 여기서 진짜 중요한것은 10진법에서는 99로 나누지만 5진법에서는
44가 아니라 44의 5진법인 $44_{(5)}$ 로 나눠야 돼

실제로 이 수는 $4 \times 5 + 4 \times 1 = 24$ 야 그리고 마지막 23을 곱할 때도
23의 5진법을 곱하는거라 실제로는 $23_{(5)} = 2 \times 5 + 3 \times 1 = 13$을
써야하지 ㅎ

⑥ $0.9999 \cdots 9999\,(2n\text{ 개}) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{2n}$ 이용

$0.1111 \cdots 1111\,(2n\text{ 개}) = \frac{1}{99}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{2n}\right)$

$0.7878 \cdots 7878\,(2n\text{ 개}) = \frac{78}{99}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{2n}\right)$

$\Rightarrow$ 마찬가지로 $0.99 = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{2}$, $0.9999 = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{4}$,

$0.999999 = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{6}$, $\cdots$ $0.999999 \cdots 9999(2n\text{ 개}) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n}$

에서 99로 나누면 $0.111111 \cdots 1111(2n\text{ 개}) = \frac{1}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n}\right)$ 가 되고

여기다 78을 곱하면 $0.787878 \cdots 7878(2n\text{ 개}) = \frac{78}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n}\right)$이 되지ㅎ

⑦ $0.2323 \cdots 2323_{(5)}\,(2n\text{ 개}) : \frac{23_{(5)}}{44_{(5)}}\left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2n}\right\} = \frac{13}{24}\left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2n}\right\}$

$\Rightarrow$ 아까 설명했듯이 5진법은 10을 5로 9를 4로 바꾸면 돼

마찬가지로 $\frac{23_{(5)}}{44_{(5)}}$은 5진법 수를 써야한다는거 중요해

물론 십진법인 $\frac{13}{24}$로 바꿔서 써도 돼ㅎ

≪ 반복수 예제 ≫

⇒ 이제 여태 배운걸 토대로 함 풀어보자ㅎ

① $51,\ 551,\ 5551,\ \bullet\bullet\bullet\ = \frac{50}{9}(10^n - 1) + 1$

⇒ 규칙성을 잘 보면 $(5\times 10+1),\ (55\times 10+1),\ (555\times 10+1)\ \bullet\bullet$ 수열이야

$55\bullet\bullet 55 = \frac{5}{9}(10^n - 1)$ 이었으니깐 $(55\bullet\bullet 55 \times 10+1) = \frac{50}{9}(10^n - 1)+1$

② $1,\ 101,\ 10101,\ \bullet\bullet\bullet\ = \frac{1}{99}(10^{2n} - 1)$

⇒ 두개씩 반복수의 모티브가 되는식인데

$99,\ 9999,\ 999999,\ \bullet\bullet\ = 10^{2n} - 1$ 에서 양변을 99로 나눈거야

③ $121,\ 12121,\ 1212121,\ \bullet\bullet\bullet\ = \frac{120}{99}(10^{2n} - 1) + 1$

⇒ ② $\times 120 + 1$ 인거지

④ $131,\ 131311,\ 131313111,\ \bullet\bullet\bullet\ = \frac{13}{99}(10^{2n} - 1)\times 10^n + \frac{1}{9}(10^n - 1)$

⇒ $(13\times 10+1),\ (1313\times 10^2 + 11),\ (131313\times 10^3 + 111),\ \bullet\bullet$ 형태야

$1313\bullet\bullet 1313 = \frac{13}{99}(10^{2n} - 1)$ 이고 $111\bullet\bullet 111 = \frac{1}{9}(10^n - 1)$

$\therefore (1313\bullet\bullet 1313\times 10^n + 111\ \bullet\bullet\ 111) = \frac{13}{99}(10^{2n} - 1)\times 10^n + \frac{1}{9}(10^n - 1)$

⑤ $1,\ 1001,\ 1001001,\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ = \frac{1}{999}(10^{3n}-1)$

$\Rightarrow 999,\ 999999,\ 999999999,\ = 10^{3n}-1$ 에서 양변을 999로 나눈거야 세개씩 반복수의 모티브가 되는거지ㅎ

⑥ $123,\ 123123,\ 123123123,\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ = \frac{123}{999}(10^{3n}-1)$

$\Rightarrow$ ⑤ $\times 123$

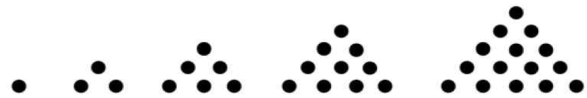
⑦ $1212121212.23232323 = \frac{12}{99}(10^{10}-1) + \frac{23}{99}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{10}\right)$

$\Rightarrow 1212121212 = \frac{12}{99}(10^{10}-1)$ 이고 $0.23232323 = \frac{23}{99}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{10}\right.$

(2) 도형수

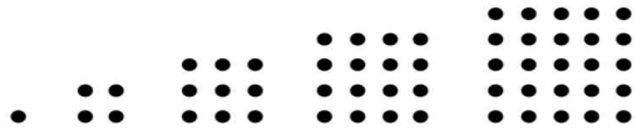
⇒ 점을 이용하여 정 다각형을 만들 때 들어가는 점의 개수가 도형수야
피타 고라스 형아가 많이 연구했대ㅎㅎ
근데 이게 점화식으로 나타내면 전부 계차를 가진 수열이 돼

① 삼각수



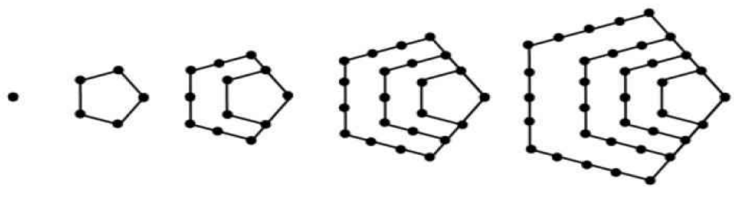
$a_1 = 1,\ \ a_2 = 1+2,\ \ a_3 = 1+2+3 = a_2 + 3,\ \ a_4 = a_3 + 4$
$\cdots,\ a_n = a_{n-1} + n,\ \ \therefore a_{n+1} = a_n + n + 1$

② 사각수



$b_1 = 1,\ \ b_2 = 1+3,\ \ b_3 = 1+3+5 = b_2 + 5,\ \ b_4 = b_3 + 7$
$\cdots\ b_n = b_{n-1} + 2n - 1,\ \ \therefore b_{n+1} = b_n + 2n + 1$

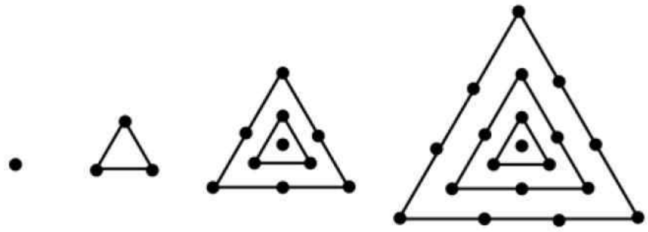
③ 오각수



마찬가지 규칙에 의해 $c_n = c_{n-1} + 3n - 2,\ \ \therefore c_{n+1} = c_n + 3n + 1$

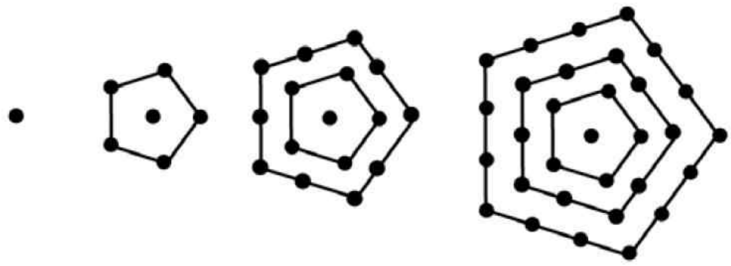
④ 육각수 : 육각수 점화식은 $d_{n+1} = d_n + 4n + 1$ 이겠지ㅎㅎ

⑤ 중심 삼각수



$a_1 = 1,\quad a_2 = a_1 + 3\times 1,\quad a_3 = a_2 + 3\times 2,\quad a_4 = a_3 + 3\times 3,$
$\cdots\ a_n = a_{n-1} + 3(n-1),\quad \therefore a_{n+1} = a_n + 3n$

⑥ 중심 오각수



$b_1 = 1,\quad b_2 = b_1 + 5\times 1,\quad b_3 = b_2 + 5\times 2,\quad b_4 = b_3 + 5\times 3,$
$\cdots\ b_n = b_{n-1} + 5(n-1)\qquad \therefore b_{n+1} = b_n + 5n$

(3) 배수에 관련된 수열

$\Rightarrow k$의 배수는 공차가 k인 등차 수열이야

$ex)$ 3의 배수 : 3, 6, 9, 12, 15, • • 공차가 3인 등차수열

(4) 잉여류에 관련된 수열

$\Rightarrow$ 잉여류란 어떤 수로 나눈 나머지가 같은 수들의 모임을 말하는거야
예를 들어 3으로 나눈 나머지가 2인 잉여류들은
2, 5, 8, 11, 14, • • 이것만 봤을때는 등차 수열이지??
근데 문제는 이렇게 안 나오고
" $a_n = (3^n$을 5으로 나눈나머지$)$ "
이런 식으로 나와 이런 문제는 무조건 주기가있어!!!

잉여류, 즉, 나머지에 관련된 문제는 무조건 주기가 있다 생각해!!

$n=1$ 일 때, $3 \rightarrow 3$
$n=2$ 일 때, $9 \rightarrow 4$
$n=3$ 일 때, $27 \rightarrow 2$
$n=4$ 일 때, $81 \rightarrow 1$
$n=5$ 일 때, $243 \rightarrow 3$
$n=6$ 일 때, $729 \rightarrow 4$
•
• (3, 4, 2, 1)을 반복 하면서 주기가 4지

(5) 서로소에 관련된 수열

$\Rightarrow$ 집합에서 서로소는 $A \cap B = \varnothing$ 이런 거였는데
수에서의 서로소는 공약수가 1밖에 없는 두 수를 얘기하는거야

그런데 두 수가 서로소라는 의미는 두수를 소인수 분해 했을 때
같은 소인수가 없다는 뜻도 되거던

즉, $\ll$ 12와 서로소인 수 $\gg$ 들은 $12 = 2^2 \times 3$ 이어서 $\ll$ 2의 배수도 아니고
3의 배수도 아닌 수들 $\gg$ 을 의미해 (1은 모든수와 서로소)

A_k를 k의 배수의 집합이라 할 때,

12와 서로소의 개수 $= n(A_2^c \cap A_3^c) = n(A_2 \cup A_3)^c = n(U) - n(A_2 \cup A_3)$

$$= n(U) - (n(A_2) + n(A_3) - n(A_6))$$ 을 의미해

만일 100 이하의 자연수 중에서 12와 서로수인 자연수의 개수를 구하라
한다면 $n(U) = 100,\ n(A_2) = 50,\ n(A_3) = 33,\ n(A_6) = 16$ 이니깐

$100 - (50 + 13 - 16) = 53$ 개가 되는거지

(6) 주기를 가진 수열

⇒ 수열의 가장 큰 특징이 바로 주기성이지

주기를 가진 수열을 나타 내는 방법이 있는데 이번 기회에 잘 익혀봐ㅎ

① 주기가 2인 수열의 일반항 : $a_n = p + q(-1)^n$

⇒ $(-1)^n$이 대표적으로 주기가 2인 식이야 그걸 이용한 일반항이지

참고로 $p-q$, $p+q$ 두수를 반복해ㅎ

② 주기가 3인 수열의 일반항 : $a_n = p + qw + rw^2$

⇒ $x^3 = 1$을 만족하는 허근이나 $x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 근을 w라 할 때,
w는 w, w^2, 1, w, w^2, 1, • • 로 나열되서 주기가 3인 수야
이때 w를 이용한 $p + qw + rw^2$ 식이 대표적인 주기가 3인 수열의
일반항이 돼

③주기가 4인 수열의 일반항 : $a_n = p + qi + ri^2 + si^3$

⇒ 잘 알겠지만 허수단위 i는 대표적으로 주기가 4인 수이지ㅎ
그걸 이용해서 일반항을 만든거야

④ $a,\quad b,\quad a,\quad b,\quad a,\quad b,\quad a,\quad b,\quad \bullet\bullet$ 수열의 일반항

$\Rightarrow$ 위에서 주기가 2인 수열의 일반항 $a_n = p + q(-1)^n$ 형태이고
$p-q,\ p+q$ 를 반복한다 했지 근데 위의 수는 a 와 b를 반복하네

$p-q=a,\ p+q=b$ 가 성립되지 연립해서 풀면

$p=\dfrac{a+b}{2},\ q=\dfrac{b-a}{2}$(계차의 반)가 돼

$$\therefore a_n = \frac{a+b}{2} + (-1)^n \frac{b-a}{2}$$

⑤ $c,\quad c+a,\quad c+a+b,\quad c+a+b+a,\quad c+a+b+a+b,\quad \bullet\bullet$

$\Rightarrow$ 이 수열은 계차가 주기 수열이지ㅎ
계차 수열 일반항 $a_{n+1}-a_n = a,\ b,\ a,\ b,\ \bullet\bullet = \dfrac{a+b}{2} + (-1)^n \dfrac{b-a}{2}$ 이어서

$a_n = c + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right) = c + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a+b}{2} + (-1)^k \frac{b-a}{2}\right)$ 이 되서

$a_n = c + \dfrac{(a+b)(n-1)}{2} + \dfrac{b-a}{2} \times \dfrac{-\left(1-(-1)^{n-1}\right)}{1-(-1)}$ 이 되겠네

엄청 복잡한데 그냥 이렇게 된다 정도만 알아둬ㅎ

$ex1)$ 3, 5, 3, 5, 3, 5, • • 의 일반항을 구하시오

$\Rightarrow a_n = \dfrac{3+5}{2} + (-1)^n \left(\dfrac{5-3}{2}\right) = 4 + (-1)^n$

$ex2)$ 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, • • 일반항을 구하시오

$\Rightarrow$ 계차수열이 1, 3, 1, 3,... 이렇게 가니깐

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1+3}{2} + (-1)^n\left(\dfrac{3-1}{2}\right) = 2 + (-1)^n$

$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(2 + (-1)^k\right) = 3 + 2(n-1) + \dfrac{-1\left(1-(-1)^{n-1}\right)}{1-(-1)}$

$= 1 + 2n - \dfrac{1}{2}\left(1-(-1)^{n-1}\right) = 2n + \dfrac{1}{2}\left(1+(-1)^{n-1}\right)$

$cf)$ 이건 원래 끼리 끼리 수열로 볼수도 있어ㅎ

$a_{2n-1} = 3, 7, 11, 15, \bullet\bullet = 4n - 1$ 이고

$a_{2n} = 4, 8, 12, \bullet\bullet = 4n$ 이네ㅎ