



안녕맨의 끝장인강

원의 방정식

⇒ 아마 도형 문제 중에 가장 많은 비율을 차지하는게 원 일거야
유형도 엄청 많거던 그만큼 재밌는 것도 많아 ㅎㅎ

(1) 원의 방정식 표준형과 일반형

⇒ 직선의 방정식의 핵심 요소는 << 점 >> 과 << 기울기 >> 였지?
원의 핵심 요소는 << 원의 중심 >> 과 << 반지름 >> 이야
즉, 원 문제는 원의 중심과 반지름으로 거의 모든 문제를 푼다고 생각하면 돼

원의 방정식을 나타낼 때, 원의 중심 (a, b) 과 반지름 (r) 을 보여주는 식이
표준형이야 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

그에 반해 원의 핵심요소를 모를 때, 즉, 원의 중심과 반지름을 모를 때
쓰는 식이 일반형이야

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이지 당연히 암기해야지

<< 일반형에서 원의 중심과 반지름 구하기 >>

⇒ 원의 중심 구하는 것은 마치 2차 함수에서 꼭지점의 x 좌표
구하는거랑 비슷해

$y = ax^2 + bx + c$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $\frac{\text{두근의 합}}{2} = -\frac{b}{2a}$ 였지?

원의 방정식에서도 중심좌표는 $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ 가 돼

<< 두근의 합의 반 >> 이라고 외우는게 편해

실제 반지름을 구하면 $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$ 인데 이걸

$r = \sqrt{(\text{중심의 } x\text{좌표})^2 + (\text{중심의 } y\text{좌표})^2 - \text{상수항}}$ 이렇게 돼 ㅎ

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{에서}$$

$$\textcircled{1} \text{ 원의 중심 } \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right)$$

$$\textcircled{2} \text{ 반지름 } = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}$$

(원의 중심들의 제곱의합 - 상수항)

$$\textcircled{3} \text{ 원의 성립 조건 } a^2 + b^2 - 4c \geq 0$$

$$ex) \ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0 \text{의 중심과 반지름은?}$$

$$\Rightarrow \text{중심 좌표} = \text{두근의 합의 반이니깐 } (1, -2) \text{가 되지}$$

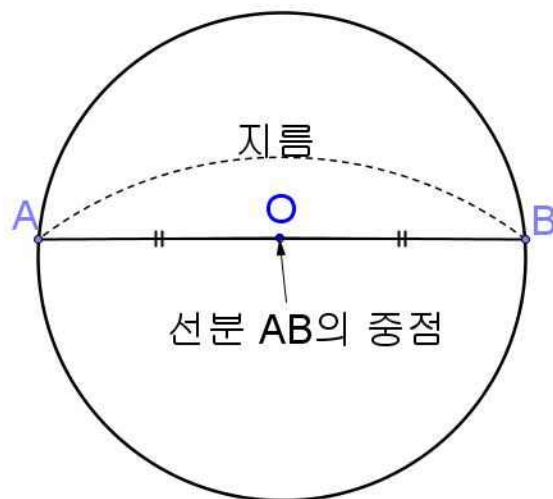
$$\text{반지름 } r = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - (-6)} = \sqrt{11} \text{ 간단하지 ㅎㅎ}$$

(2) 원의 방정식 구하기

- ① 원의 중심과 반지름을 알 때 : 표준형
- ② 지나는 세 점을 알 때 : 일반형
- ③ 지름의 양 끝점을 알 때 : 두점의 중점 = 원의 중심
 두점 사이의 거리 = 지름

⇒ 핵심 요소 (중심, 반지름) 알면 당연히 공식으로
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 하면 되지 하지만, 그 이외의 조건을 알 때는
 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이라 놓고 푸는게 일반적이야

단, 특이 하게도 지름의 양 끝점을 갈켜주는 경우가 있는데 조금만
 생각해보면 두 점의 중점이 원의 중심이고, 두 점 사이의 거리가
 원의 지름이 된다는 것을 알 수 있어. 이걸 이용하면 쉽게 풀 수 있지 ㅎ



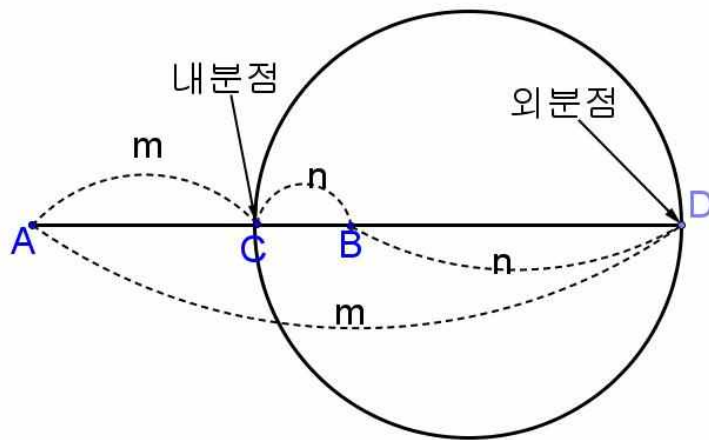
$$\text{지름의 양끝점 } A, B \text{ 라 하면 } \begin{cases} \text{원의 중심} : \overline{AB} \text{ 의 중점} \\ \text{원의 반지름} : \frac{\overline{AB} \text{ 의 길이}}{2} \end{cases}$$

(3) 아폴로니우스의 원

⇒ 두 정점이 있고 두 정점 사이로부터의 거리의 비가 $m:n$ 으로 일정한 점을 다 모아 놓으면 원이 되거던 이 원을 “아폴로니우스의 원”이라고 해 공간에서는 아폴리니우스의 구라고도 해 우린 평면 상태에서만 배우니깐 원인거지ㅎ

아폴로니우스의 원의 방정식은 두 정점을

《 $m:n$ 으로 내분하는점 과 $m:n$ 으로 외분하는 점을 지름의 양끝점》으로 하는원이 돼 암기 하도록!!!



⇒ 결국 아폴로니우스의 원 문제는 내분점과 외분점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하는거니깐

양 끝점을 알 때 쓰는 이론들을 그대로 적용하면 돼

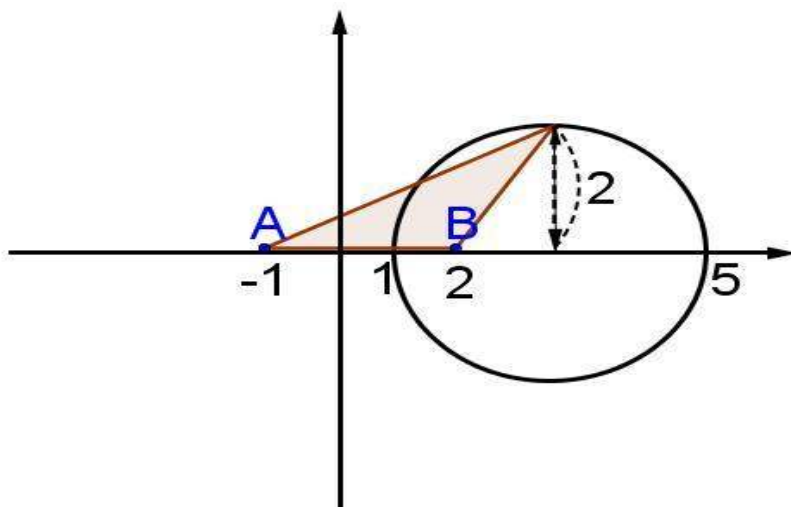
① 원의 중심은 = 양 끝점의 중점,

② 양 끝점 사이의 거리 = 지름

ex) 두 점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 인
 점을 P 라 할 때, 삼각형 PAB 의 넓이의 최댓값은?

$\Rightarrow$ 거리의 비가 $2:1$ 로 일정한 점 P 의 자취는 아폴로니우스의 원이 돼
 $2:1$ 로 내분점은 $(1, 0)$, 외분점은 $(5, 0)$ 인데 이 두 점을 지름의
 양끝으로 하는 원이니깐 중심은 $(\frac{1+5}{2}, 0) = (3, 0)$,
 지금이 $5-1=4$ 이니깐 반지름은 2 인 원이되네

$\overline{AB}$ 의 길이는 일정한 상태에서 높이가 최대가 되면 넓이가 최대가 되겠지
 그림 보면 높이가 반지름일 때 최대가 되니깐 $S = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$



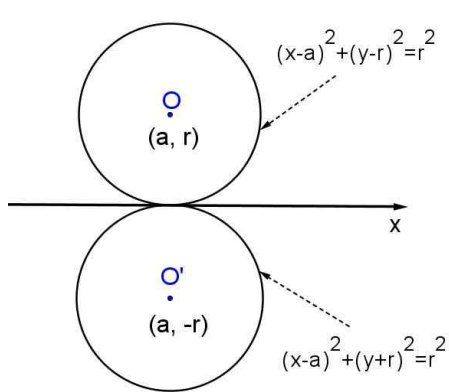
(4) 축에 접하는 원의 방정식

$\Rightarrow x$ 축에 접하는 원은 중심의 $|y\text{좌표}| = \text{반지름}$ 이고,

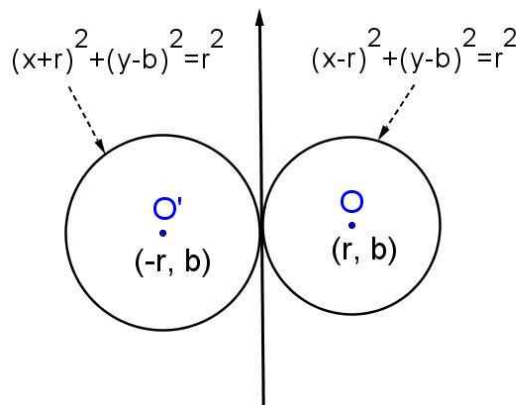
y 축에 접하는 원은 중심의 $|x\text{좌표}| = \text{반지름}$

x 축, y 축 동시에 접하는 원은 중심의 $x\text{좌표}$, $y\text{좌표}$ 가 전부 반지름이랑 절대값이 같지 (원의 중심이 $y = x$, $y = -x$ 위에 존재해)

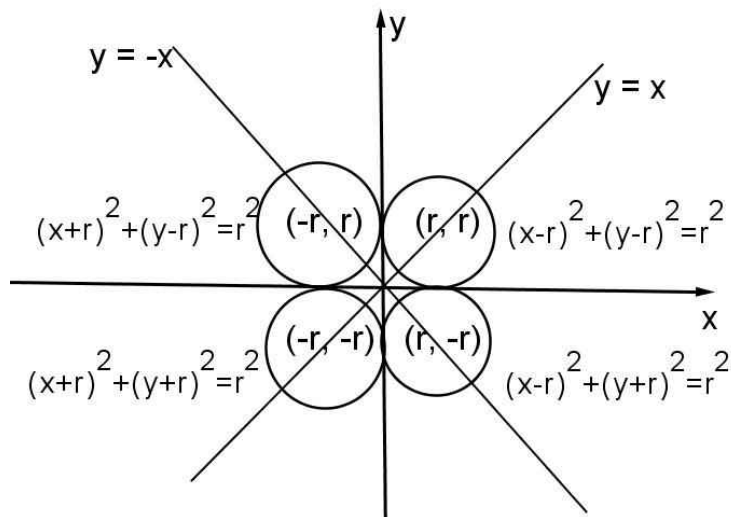
우선 그림을 보면서 이해하는게 나을것 같애



《 x 축에 접하는 원 》



《 y 축에 접하는 원 》



《 x 축, y 축 모두 접하는 원 》

$\Rightarrow$ 여기서 특히 x 축, y 축 동시에 접하는 원의 중심은 $y = x$ 와 $y = -x$ 위에 있다는것 엄청 중요해

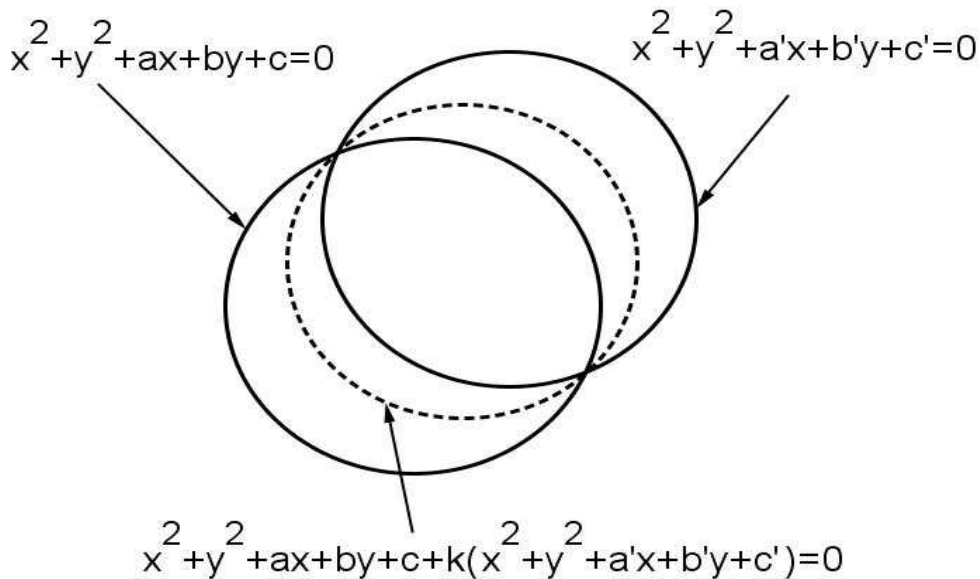
ex) x 축, y 축 동시에 접하는 원의 중심이 $y = x^2$ 위에 있을 때,
원의 중심의 좌표를 구하시오

$\Rightarrow y = x$ 와 $y = x^2$ 교점과 $y = -x$, $y = x^2$ 의 교점 위에 원의 중심이
존재하므로 연립방정식 풀어서 나온 근 $(1, 1)$ 과 $(-1, -1)$ 이
원의 중심이 되는거야

(5) 두 원의 교점을 지나는 원, 직선

① 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

$\Rightarrow$ 두 직선의 교점을 지나는 직선 기억나지?? 그 때 어떻게 했더라
한 직선의 식을 k 로 묶고 k 에 관계없는 항등식으로 나타냈지
두 원의 교점을 지나는 도형도 마찬가지로



《 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 》

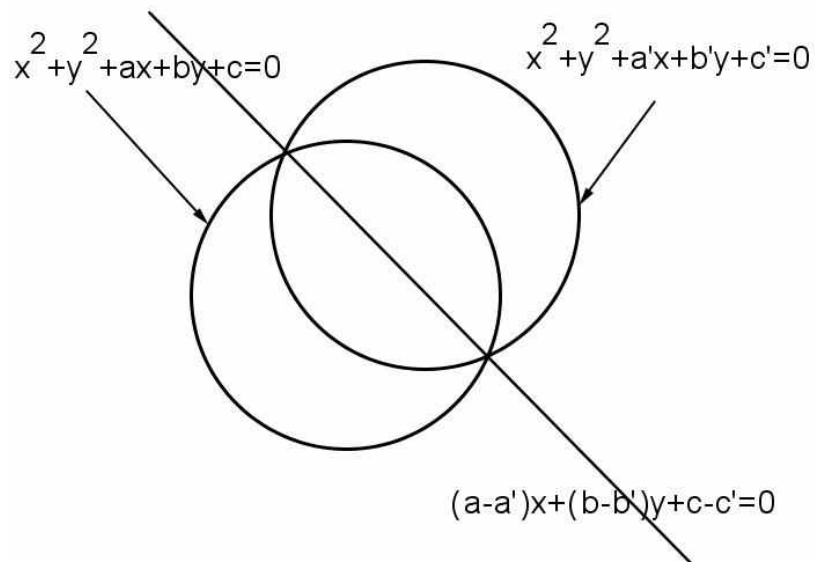
$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

② 두 원의 교점을 지나는 직선(공통현)의 방정식

⇒ 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0 \text{ 에서}$$

$k = -1$ 일 때, 즉 그냥 하나의 원의 방정식에서 다른 원의 방정식을 빼버리면 ≪ 두 원의 교점을 지나는 직선(공통현)의 방정식 ≫ 이 돼



≪ 두 원의 공통현의 방정식 ≫

$$\Rightarrow (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

(6) 두 원의 위치 관계

⇒ 원에 관련된 위치 관계는 반지름(r)과 중심 사이의 거리(d)의 대소로 파악해

① 두 원이 외부에 있다 : $r + r' < d$ (공통접선의 길이 4개 (외접선2, 내접선2))

② 외접한다 : $r + r' = d$ (공통 접선의 길이 3개 (외접선2, 내접선1))

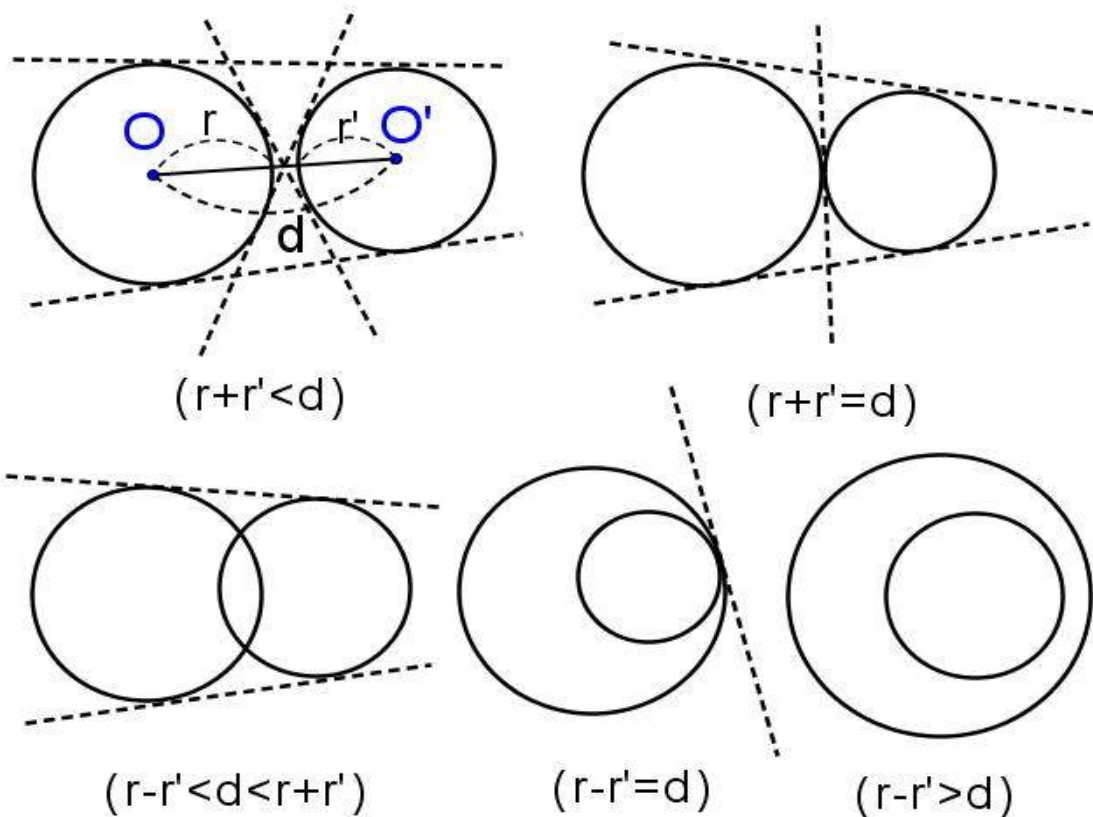
③ 두 점에서 만난다 : $|r - r'| < d < r + r'$ (공통접선의 길이 2개(외접선만))

④ 내접한다 : $|r - r'| = d$ (공통 접선의 길이 1개)

⑤ 한원이 다른원의 내부에 있다 : $|r - r'| > d$ (공통접선 없어)

cf) ≪ 두 원이 만나지 않는다 ≫ 즉, 교점이 없다면

⇒ ① 외부에 있거나 ⑤ 내부에 있는거지 두가지 라는거 꼭 기억해!!!



(7) 원과 직선의 위치 관계

⇒ 원과 직선은 만나지 않는 경우, 한 점에서 만나는 경우(접한다), 두 점에서 만나는 경우 이렇게 세 종류가 있어

원의 방정식도 2차식이고 직선의 방정식과 연립해도 어차피 2차식이 되거던 위치 관계는 교점의 개수로도 파악이 되니깐 이 《연립한 2차 방정식의 근의 개수》로도 위치 관계를 얘기 할 수 있어

즉, 포물선과 직선처럼 원의 방정식과 직선의 방정식을 《연립한 2차 방정식의 판별식 D 》로도 위치 관계를 설명 할 수 있다는 거야

이게 일반적인 2차 곡선과 직선과의 위치 관계 해결 방식이야

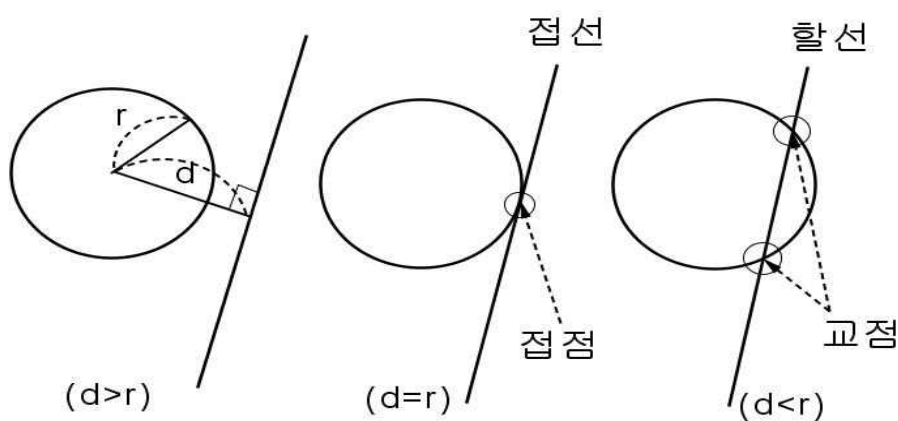
그러나 원은 특이하게도 《직선과 원의 중심과의 거리(d)》와 《반지름(r)》만으로 위치 관계가 설명이 돼 아주 특이한 케이스지 ㅎㅎ

이 방식이 원에서 만큼은 훨씬 편하기 때문에 앞으로 원과의 위치 관계는 d 랑 r 만 가지고 풀면 돼!!!

① $r < d$: 직선이 원 외부에 있다 (만나지 않는다)

② $r = d$: 직선과 원이 접한다(교점1개)

③ $r > d$: 직선과 원이 두 점에서 만난다(교점2개)



cf.) 두번째 그림에서 접하는 경우 그 교점을 《접점》이라고 하고 그 때의 직선을 《접선》이라고 해

(8) 원의 접선의 방정식

⇒ 앞서 원과 직선의 위치 관계를 배웠지? 거기서 원과 직선이 접하는 경우를 특별 취급한거야

접 할때의 직선을 접선이라고 하는데 그 직선의 방정식을 어떻게 구할까?
하는 문제야ㅎ

우선 알아야 할 게 있어 접선도 직선이지?? 직선에서 중요한 게 뭐였더라??
그치!! 《지나는 점》 과 《기울기》 지!!

결국 접선의 방정식 문제는 지나는 점과 기울기를 찾는 문제가 되는거야

《 접선의 방정식 공식 》

⇒ 접점이 주어질 때와 기울기가 주어질 때로 나뉘서 공식이 분류돼

① 접점 (x_1, y_1) 이 주어진 경우

⇒ 우선 접점은 그 곡선위에 있으니깐 그 점을 곡선식에 대입하면
만족한다는 것을 꼭 알아야 돼 그리고,
모든 2차 곡선(원과 포물선 포함)은 접점이 주어질때
접선의 방정식이 공통적으로 적용되는 공식이 있어

곡선위의 접점을 (x_1, y_1) 이라 할 때,

$$\begin{aligned}x^2 &\Rightarrow x_1 x, & x &\Rightarrow \frac{x + x_1}{2}, & y^2 &\Rightarrow y_1 y, & y &\Rightarrow \frac{y + y_1}{2} \\(x - \alpha)^2 &\Rightarrow (x_1 - \alpha)(x - \alpha), & (x - \alpha) &\Rightarrow \frac{(x - \alpha) + (x_1 - \alpha)}{2} \\(y - \beta)^2 &\Rightarrow (y_1 - \beta)(y - \beta), & (y - \beta) &\Rightarrow \frac{(y - \beta) + (y_1 - \beta)}{2}\end{aligned}$$

i) $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1 x + y_1 y = r^2, \quad x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

ii) $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$(x_1 - \alpha)(x - \alpha) + (y_1 - \beta)(y - \beta) = r^2, \quad (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = r^2$$

ex1) $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(3, -4)$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오

$$\Rightarrow 3x - 4y = 25$$

ex2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ 위의 점 $(5, 1)$ 에서의 접선의 방정식은?

$$\begin{aligned}\Rightarrow (5-2)(x-2) + (1+3)(y+3) &= 25 \\ 3x - 6 + 4y + 12 &= 25, \quad 3x + 4y = 19\end{aligned}$$

ex3) 포물선 $y = x^2 + 3x + 1$ 위의 점 $(1, 5)$ 에서의 접선의 방정식은?

$$\Rightarrow \frac{y+5}{2} = 1x + 3 \times \frac{x+1}{2} + 1 \text{ 에서 } y = 5x$$

ex4) 포물선 $y = (x-3)^2 + 4$ 위의 점 $(2, 5)$ 에서의 접선의 방정식은?

$$\Rightarrow \frac{y+5}{2} = (2-3)(x-3) + 4 \text{ 에서 } y = -2x + 9$$

② 기울기 m 이 주어질 때,

i) 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식

$$\Rightarrow \ll y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1} \gg$$

ii) 원 $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식

$$\Rightarrow \ll y - \beta = m(x - \alpha) \pm r\sqrt{m^2 + 1} \gg$$

$\Rightarrow$ i)번 공식은 중심이 원점일 때고 ii)번 공식은 중심이 (α, β) 일 때인데, “중심을 평행이동 시킨 원의 접선의 방정식은 접선도 같이 평행이동 된다”라는 이론이 있어 그래서 위와 같은 공식이 되지 않

ex) $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식은?

$$\Rightarrow y = 2x \pm 3\sqrt{2^2+1} = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

ex) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ 에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은?

$$\Rightarrow (y+3) = 3(x-2) \pm 5\sqrt{3^2+1}, \quad y = 3x-9 \pm 5\sqrt{10}$$

③ 접선의 방정식 구하기 일반적인 해법

$\Rightarrow$ 만일 점점과 접선의 기울기가 주어지지안는다면 공식사용이 불가능하지 그럴때는 일반적으로 푸는 방법이 있어
원과 직선의 위치관계에서 접할 때,

d (원의 중심과 직선사이의 거리) $= r$ (반지름) 이라고 했지??

이걸 이용하는거야 직선의 방정식을 세우고 $d = r$ 이용하면 끝!!

i) 직선의 방정식 세우기

문제에서는 분명히 직선이 지나는 점이나 기울기가 주어질거야
지나는 점이 (3, 2)다 그러면 $y = m(x-3)+2$ 가 되고
기울기가 2이다 그러면 $y = 2x+b$ 라고 세우면돼
사실 기울기를 가르쳐 주면 그냥 공식 써도 되긴 해ㅎ

ii) $d = r$ 을 이용해서 직선의 방정식의 미지수 구하기

$\Rightarrow$ 이 방법은 어떤 형태의문제라도 다 풀수 있는
마치 근의 공식 같은 방법이야
그니깐 복잡하다!! 막혔다!!하면 주어진 조건으로 직선의 방정식
세우고 $d = r$ 이용하면 무조건 풀 수 있어

접선의 방정식 공식 외우기 싫으면 이렇게해도돼 ㅎ

ex) 원 $x^2 + y^2 = 5$ 밖의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 방정식은?

$\Rightarrow$ 지금 주어진 조건은 접점이 아니야 그래서 공식 사용 못해
이렇게 곡선밖의 한점에서 그은 접선의 방정식은 어차피
접선의 방정식이 이 점을 지나니깐 한점을 지나는 직선의 방정식
 $y = m(x-1) + 3$ 이라 놓고 $d = r$ 이용하면 돼

d 는 이 직선과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리니깐 먼저 직선을
 $mx - y - m + 3 = 0$ 이라 놓고 공식 쓰면

$$d = \frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+1}} \text{ 이 되고 이게 } \sqrt{5} (=r) \text{ 이랑 같겠지}$$

$$\frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \text{ 에서 양변 제곱하면 } \frac{(m-3)^2}{m^2+1} = 5$$

$$\text{이걸 풀어서 쓰면 } m = \frac{1}{2}, -2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(x-1) + 3, \quad y = -2(x-1) + 3$$

접선의 방정식	$\left\{ \begin{array}{l} \text{접점과 기울기가 주어질 때 : 공식} \\ \text{일반적 풀이} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{① 직선의 방정식 세우기 (점, 기울기)} \\ \text{② } d = r \end{array} \right. \end{array} \right.$
---------	--

(9) 원 문제 응용 (길이 문제)

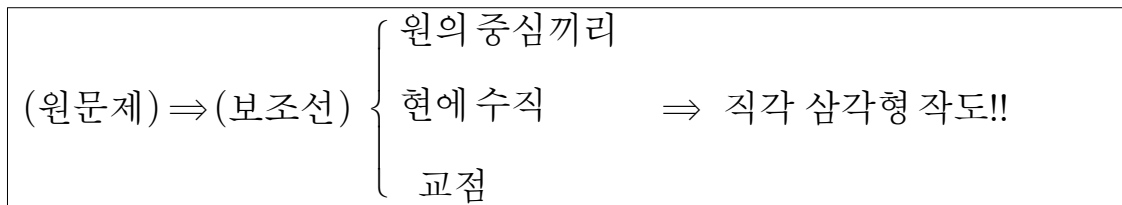
⇒ 원의 구조는 중심과 반지름으로 엄청 간단 해 보이는데 문제 유형은 엄청 많지 $\pi\pi$ 원 문제를 풀 때는 기본 마인드가 있어야 해
술하게 많은 원 문제도 그 풀이를 분석해보면 삼각형으로 푸는 문제가 많아 그것도 100% 직각삼각형!!!

그래서 너네가 알아야 할 기본마인드는

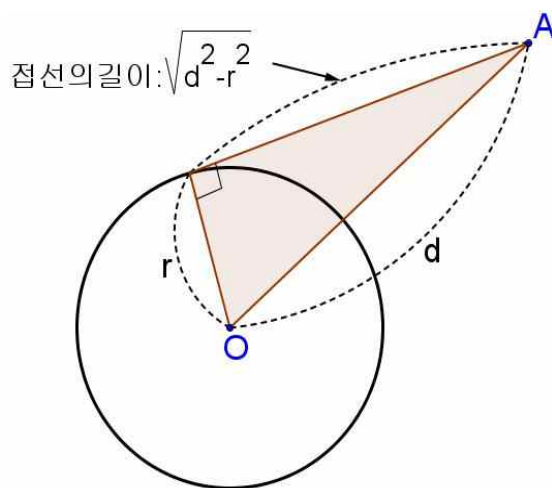
《 원 문제는!!! 》 《 보조선을 그어서!!! 》 《 직각삼각형으로 푼다!! 》

《 보조선 》 도 막 긋는게 아니라 원의 중심부터 시작해서

《 원의 중심끼리 》 《 현에 수직 》 《 원의 교점(원주) 》 이 세가지 밖에 없어 이것들을 연결해서 직각삼각형만 만들고 피타고라스 정리나 삼각비로 길이를 구하면 돼 ㅎ



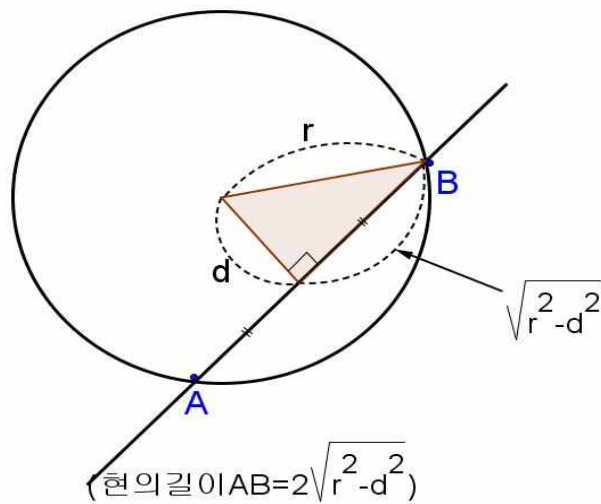
① 곡선밖의 한점에서 원에 그은 접선의 길이



⇒ 직각 삼각형 작도지 ㅎ 피타고라스 정리 이용하면

접선의 길이 = $\sqrt{d^2 - r^2}$ (d : 곡선밖의 한점과 원의 중심까지의 거리)

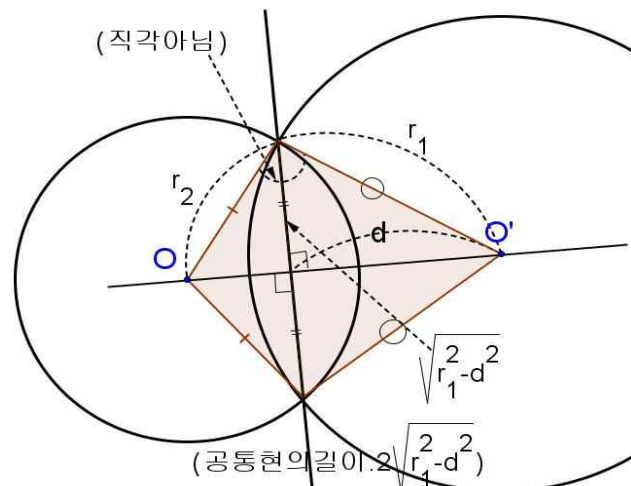
② 원과 직선의 두 교점 사이(현)의 길이



⇒ 이것도 직각 삼각형 작도지

현의 길이 $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$ (d : 원의 중심과 현 사이의 거리)

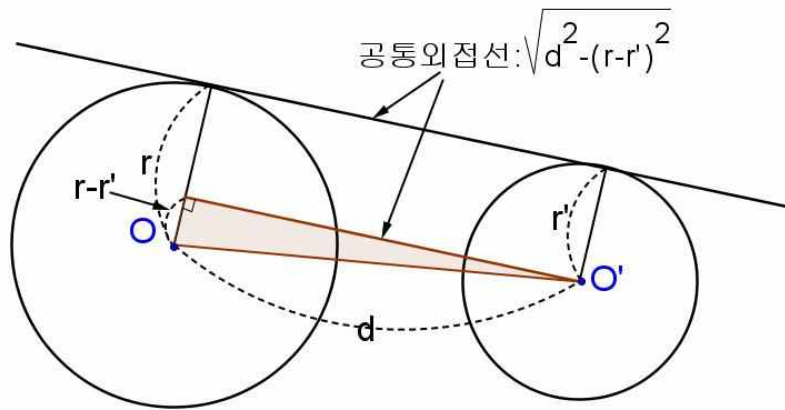
③ 두 원의 교점을 지나는 공통현의 길이



⇒ 위의 그림을 보면 공통현과 두 원의 중점을 연결한 선분은 서로 수직이 돼 공통현의 길이 : $2\sqrt{r_1^2 - d^2}$

r_1 : 원 O' 의 반지름, d : O' 의 중심과 공통현 사이의 거리

④ 공통 외접선의 길이



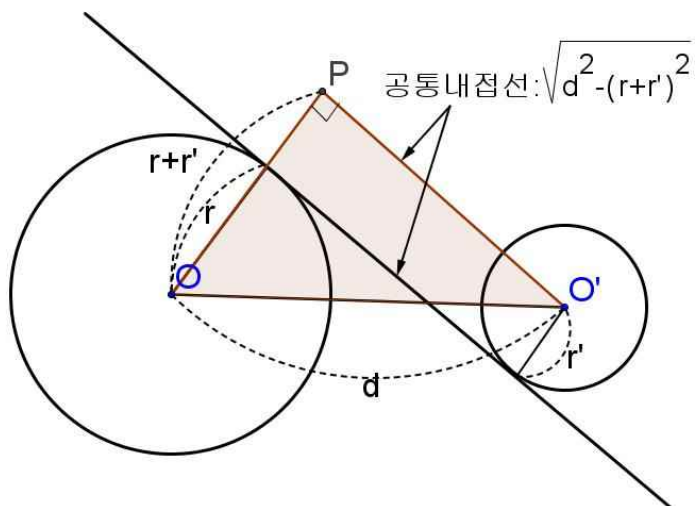
⇒ 역시 직각삼각형 작도야 함

공통 외접선의 길이 : $\sqrt{d^2 - (r - r')^2}$

r : 큰원의 반지름, r' : 작은 원의 반지름,

d : 두원의 중심 사이의 거리

⑤ 공통 내접선의 길이



⇒ 역시 직각 삼각형 작도이고

공통 내접선의 길이 : $\sqrt{d^2 - (r + r')^2}$ (외접원과 기호 동일)

⑥ 원 위의 점과의 최단거리 최장거리

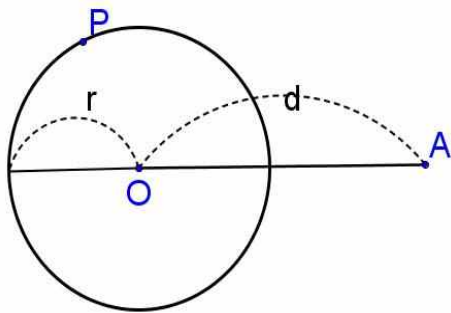
⇒ 이것도 결국 d 와 r 의 관계로 모든게 설명돼 ㅎ

i) 원 위의 움직이는 점 P 와 점 A 의 최단거리 : $d - r$, 최장거리 : $d + r$

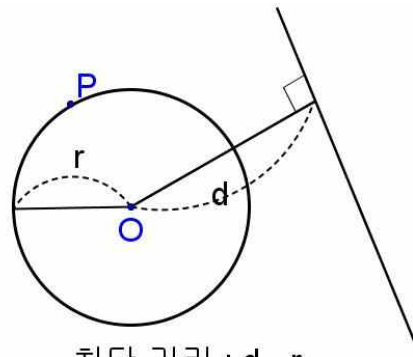
ii) 원 위의 움직이는 점 P 와 직선 l 과의 최단거리 : $d - r$, 최장거리 : $d + r$

iii) 두 원 위의 움직이는 점 P 와 점 Q 의 최단거리 : $d + r - r'$,

최장거리 : $d + r + r'$



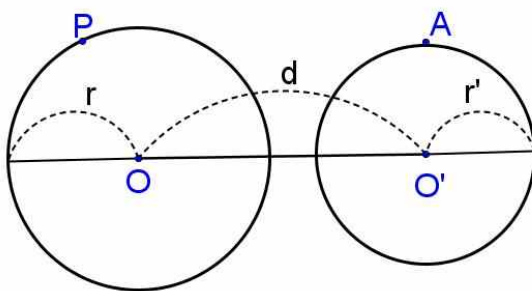
최단 거리 : $d - r$
최장 거리 : $d + r$



최단 거리 : $d - r$
최장 거리 : $d + r$

(i) 원 외부의 점 A 와의 거리

(ii) 원 외부의 직선과의 거리



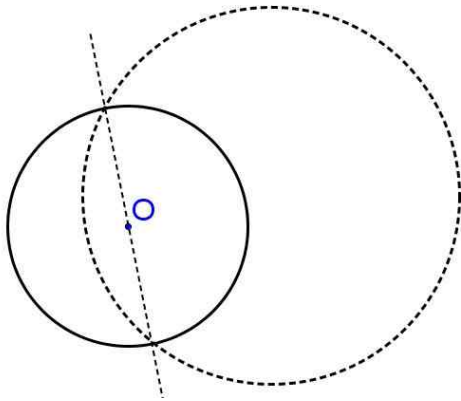
최단 거리 : $d - r - r'$
최장 거리 : $d + r + r'$

(iii) 두 원 사이의 거리

⑦ 특이한 상황의 이해

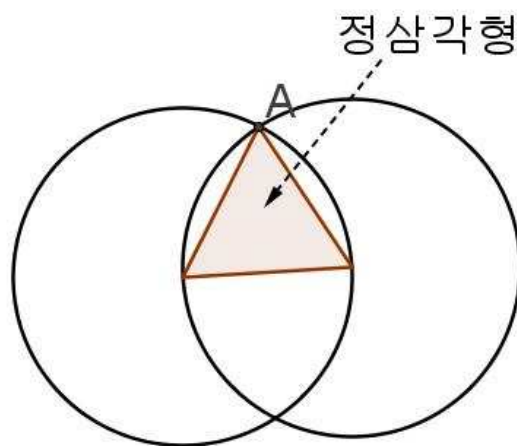
i) 원이 원 둘레의 길이를 이등분 한다

⇒ 공통 현이 원의 중심을 지난다!!

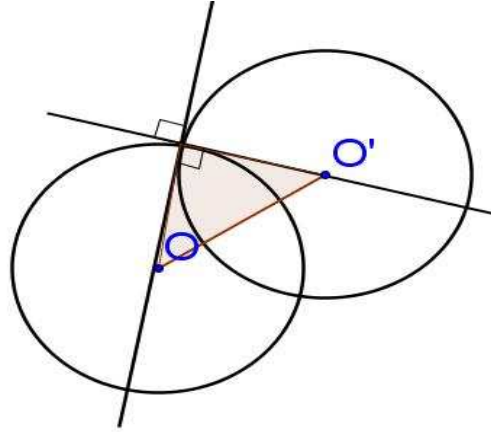


ii) 반지름이 동일한 두원이 서로 원의 중심을 지난다

⇒ 두 원의 중심과 교점으로 이루어진 삼각형은 정삼각형이다



iii) 두 원의 교점에서 그은 두 접선이 서로 수직일때
두 원은 수직으로 만난다(직교한다) 라고한다



(직교: 접선이 서로 수직)