
# 부정적분과 정적분

1. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가

$$3F(x) = x\{f(x)-8\}$$

을 만족 시킬 때, $F(3)$의 값은?

$\Rightarrow$ 우선 $x=0$을 대입하면 $3F(0)=0$에서 $F(0)=0$

위 식에서 양변을 미분하면

$$3f(x) = (f(x)-8) + xf'(x) \text{ 에서 } f(x) = \frac{1}{2}xf'(x)-4$$

$f(x)=x^n+...$라 할 때, $f'(x)=nx^{n-1}+....$을 위식에 대입하면

$$x^n+.... = \frac{1}{2}x\left(nx^{n-1}+....\right)-4 = \frac{1}{2}nx^n+.... \text{ 에서 } \frac{1}{2}n=1, \quad \therefore n=2$$

$f(x)$가 2차식이므로 $f(x)=x^2+ax+b$라고 구체적으로 나타낼 수 있어
다시 위 식에 대입해서 계수비교에서 미지수를 구하면돼
$f'(x)=2x+a$ 니깐

$$x^2+ax+b = \frac{1}{2}x(2x+a)-4 = x^2+\frac{1}{2}ax-4 \text{ 에서 } a=0, \ b=-4$$

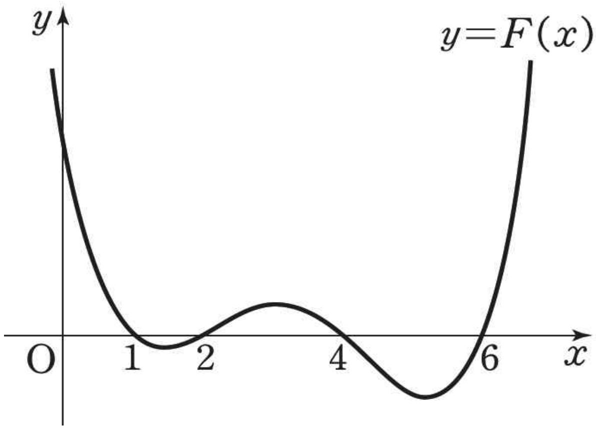
$\therefore f(x)=x^2-4$, $F(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+C$인데 $F(0)=C=0$이었으니간

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$, $\therefore F(3)=\frac{1}{3}\times 3^3-12=9-12=-3$

2. 삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $y = F(x)$의 그래프가 그림과 같다. 부등식

$$\int_{m}^{m+1} f(x)dx < 0$$

을 만족시키는 모든 자연수 $m$의 값의 합은?




$\Rightarrow$ 정적분은 유향 면적이야 정적분의 값이 음수가 되려면

원래는 $y = f(x)$ 기준으로 $x$축 아래에 있는 그래프의 면적이

$x$축 위에 있는 그래프의 면적보다 크면돼

근데 위 그림은 $y = F(x)$ 그래프야 그래서 이것은 보이는 면적으로 구하는게 아니야

$$\int_{m}^{m+1} f(x)dx = \left[ F(x) \right]_{m}^{m+1} = F(m+1) - F(m) < 0 \text{ 에서}$$

$F(m+1) < F(m)$ 이건 결국 감소하는 구간을 구하라는 말이네 ㅎ

그래프는 보면 $F(0) < F(1)$ $(m = 0)$, $F(3) < F(4)$ $(m = 3)$, $F(4) < F(5)$ $(m = 4)$ 가 되는것을 알 수 있어

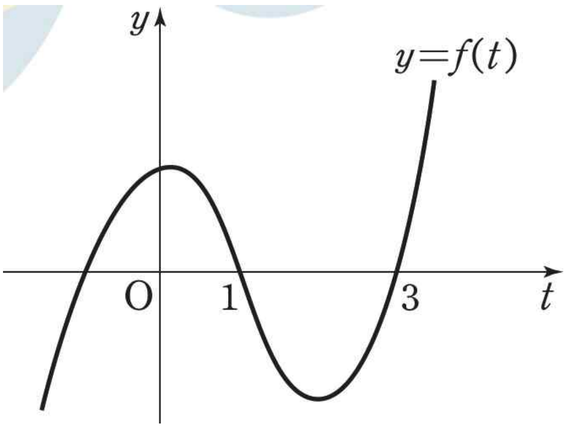
여기서 $m$은 자연수라고 했으니깐 $m = 3, 4$ , $\therefore 3+4 = 7$

3. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. 함수

$$S(x) = \int_0^x f(t)\ dt$$ 일 때,

닫힌 구간 $[\,0,\ 3\,]$ 에서 $S(x)$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하자.

$\int_0^1 f(t)\,dt = 1,\quad \int_1^3 f(t)\,dt = -2$ 일 때, $M - m$ 의 값은?




$$S(x) = \int_0^x f(t)\ dt$$ 이 의미를 알면 쉽게 풀 수 있어

0부터 $x$까지 정적분이야 유향면적이지 ㅎ

그림보면 0부터 1까지는 양의 면적을 갖고 1부터 3까지는 음의 면적을 갖는데
최댓값을 가지려면 최대한 양의 면적까지 먹어야 하니깐
$\int_0^1 f(t)\ dt = 1$ 까지가 최대가 되지 $\therefore\ M = 1$

최소가 되려면 최대한 음의 면적까지 먹어야 하는데
$f(x)$는 1부터 3까지는 정적분이 음의 값을 가져
그니깐 $[0,\ 3\,]$에서는 최대한 끝까지(3까지) 정적분하는게 최솟값을 갖겠지

그러니깐 최솟값 $m = \int_0^3 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^3 f(t)\,dt = 1 + (-2) = -1$

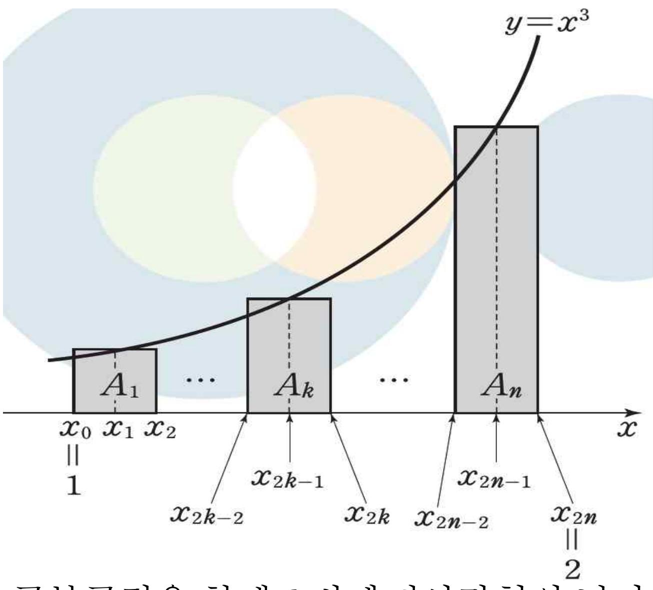
$M - m = 1 - (-1) = 2$

4. 자연수 $n$ 에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ 2]$ 를 $2n$ 등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례로

$$1 = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \bullet\bullet\bullet,\ x_{2n-1},\ x_{2n} = 2$$

라 하자. 함수 $f(x) = x^3$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{2k-1}\right)$ 의 값은?

⇒ 위의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같아 ㅎ




⇒ 구분구적을 할때 $k$번째 직사각형의 넓이를 구하는게 핵심인데 원래는 전체 길이가 1을 $2n$ 등분 했기 때문에 직사각형 가로의 길이는 $\frac{1}{2n}$으로 일정하게 돼

그런데 위의 그림처럼 직사각형의 세로의 길이를 구할때 $f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3)$ • • 이렇게 연속적인 세로가 아니라

$f(x_1),\ f(x_3),\ f(x_5),$ • • 처럼 두 칸씩 건너서 세로값을 나타냈어

이건 가로의 길이가 직사각형 2개에 해당되는 길이를 나타내기 때문에 $\frac{1}{2n}$ 의 2배인 $\frac{1}{n}$이 직사각형의 가로의 길이가 되는거야

$f\left(x_{2k-1}\right)$은 세로의 길이가 되니깐$\left(x_{2k-1} : x - zone\right)$

$k$번째 직사각형의 넓이는 $\frac{1}{n} f\left(x_{2k-1}\right)$ 가 돼

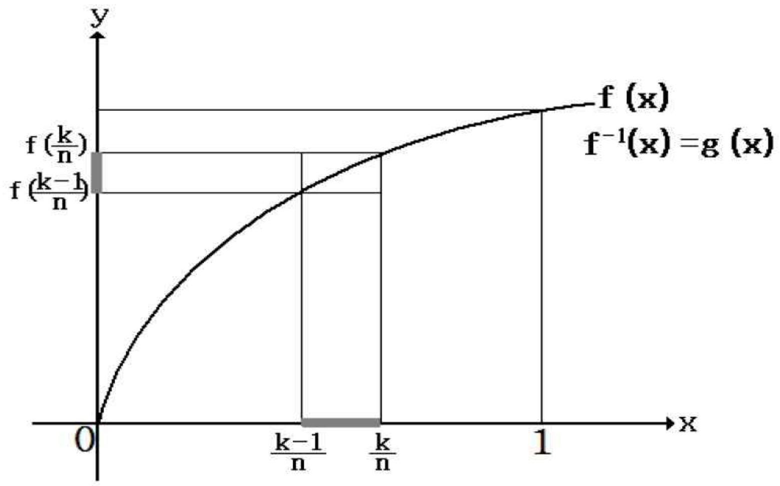
$$\therefore \lim_{n \to \infty} 2\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{2k-1}\right)\right) = 2\int_{1}^{2} f(x)dx = 2\int_{1}^{2} x^3 dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = 2\left(\frac{1}{4}(16-1)\right) = \frac{15}{2}$$

$cf)\ X-zone,\quad Y-zone$

$\Rightarrow$ 구분구적법으로 면적을 구하면 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$($k$번째직사각형넓이)였지

$k$번째 직사각형의 넓이를 구할때 가로의 길이는 $\frac{\text{구간의길이}}{n}$로 일정했어
단지 높이가 차이 나는데 이때 높이는 $k$번째 $x$좌표의 함수값이었어




$\Rightarrow$ 그림에서 $k$번째 직각사각형을 잘 보자
가로의 길이는 $\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}=\frac{1}{n}$ ($x$좌표의 차이) $=\triangle x$
새로의 길이는 $f(\frac{k}{n})$인데 잘보면 $f(\frac{k-1}{n})$을써도
$n$을 무한대로 보내니깐 결국 같은거야
근데 더웃긴건 $\frac{k-1}{n}$ 과 $\frac{k}{n}$의 중점인 $\frac{2k-1}{n}$의 함숫값 을
써도 어차피 $n$이 무한대로 가면 똑같겠지

이렇게 $f(\ )$안에 들어갈식은 $\frac{k-1}{n}\sim\frac{k}{n}$가 돼

근데 우리가 이미 배웠다시피 $\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}=\frac{1}{n}=\triangle x$는 결국 $dx$가 되고
$f()$안에 들어가는 애들이 $x$가 되는건데 이 $x$가 될수있는것들이
$\frac{k-1}{n}$ 부터 $\frac{k}{n}$까지 다 된다는거야 이걸 $x-zone$이라고 해

쉽게 생각해서 $x$값의 차이 ($x$에서 $x$를 뺀거) 는 $dx$가 되고
나머지 $\frac{k-1}{n}$부터 $\frac{k}{n}$은 $x$로 봐도 무방하다는거야

$X-zone$ 의 예 $\frac{2k-1}{2n}, \frac{3k-1}{3n}, \frac{3k-2}{3n}, \frac{4k-3}{4n}, \frac{4k-2}{4n}, \frac{4k-3}{4n} \cdot\cdot$

$$ex) \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) = 3\int_0^1 f(x)dx$$

$$ex) \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}\left(\frac{4k-1}{4n}\right)f\left(\frac{3k-2}{3n}\right) = 3\int_0^1 xf(x)dx$$

이번엔 $Y-zone$에 대해서 알아보자

그냥 $y=f(x)$니깐 $f(X-zone) = Y-zone$이지 ㅎ
즉 $f(\frac{k-1}{n})$부터 $f(\frac{k}{n})$까지 전부 $y$로 봐도 무방한거야

$Y-zone$ 의 예 $f(\frac{2k-1}{2n}),\ f(\frac{3k-1}{3n}),\ f(\frac{3k-2}{3n}),$
$f(\frac{4k-3}{4n}),\ f(\frac{4k-2}{4n}), f(\frac{4k-3}{4n}) \cdot\cdot$

자 근데 $Y-zone$은 우리가 언제 사용할까?

무한급수의 정적분 표시 문제에서 문제의 조건에 따라
내가 $X-zone$을 이용할지 $Y-zone$을 이용할지 판단해야
하는데 우리가 여지껏 배운 것들은 전부 $X-zone$이었어
그 이유가 $x$값의 차이 즉 $dx$를 갈켜줘서 이지
문제에서 자주봤던 $\frac{1}{n}$이 $x$값의 차이였어
$\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}$ 을 간단하게 $\frac{1}{n}$로 나타낸거야

근데 만일 문제에서 $f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})$처럼 $y$값의 차이가
주어진다면 이건 $dy$를 갈켜준거기 때문에 $Y-zone$에서 봐야돼

≪ $Y-zone$이 주어진 무한급수의 정적분 표시 ≫

우선 이걸 배우기 전에 알아둬야 할게 하나 있어

우리가 함수를 보통 $y = f(x)$라고 놓지?

근데 이것은 $x = f^{-1}(y)$랑 같은 말이지

즉 $y$를 $f(x)$로 바꾸듯이 $x$도 $f^{-1}(y)$로 $y$에 관한식으로 바꿀수 있다는 말이야

그런데 문제에서 $y$값의 차이인 $f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})$ 식이 나왔다는것은 $dy$로 식을 나타내라는 얘기인데 그 말은 모든식을 $y$ 로 나타내라는 말이거던 그러니깐 $x$도 $f^{-1}(y)$로 바꿔서 나타내야돼

ex) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \{f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})\} \frac{k}{n}$ 을 정적분으로 나타내시오

$\Rightarrow$ 문제에서 $y$값의 차이인 $f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})$를 갈켜줬자나

그럼 $f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n}) = dy$니깐 $y$에 관해서 나타내란얘기야

$\frac{k}{n} = x$지만 $f^{-1}(y)$가 되고 정적분의 범위도 $y$값의 범위니깐

$\int_{\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})=f(0)}^{\lim_{n\to\infty} f(\frac{n}{n})=f(1)}$ 이 되서 $\int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(y)\,dy$가 돼

근데 어차피 정적분에서 적분구간이 같으면 변수를 바꿔도 상관없으니깐 $\int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(y)\,dy = \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(x)\,dx$ 가 되는거야

이것은 실제로 $f(x)$와 $y=f(0)$, $y=f(1)$과 $y$축으로 둘러쌓인 면적이야

$cf)$ 정적분의 활용 $-4$ (면적)에서 면적으로 $dx$로 볼꺼냐 $dy$로 볼꺼냐로 나눠

$ex) \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \left\{\left(f(\frac{k}{n})\right)^2 - \left(f(\frac{k-1}{n})\right)^2\right\} \frac{2k-1}{2n}$ 을 정적분으로표시하라

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \left\{\left(f(\frac{k}{n})\right) + \left(f(\frac{k-1}{n})\right)\right\} \times \left\{\left(f(\frac{k}{n})\right) - \left(f(\frac{k-1}{n})\right)\right\} \frac{2k-1}{2n}$ 에서

$\left(f(\frac{k}{n})\right) - \left(f(\frac{k-1}{n})\right) = dy, \quad \left(f(\frac{k}{n})\right) + \left(f(\frac{k-1}{n})\right) = y+y=2y$

$\frac{2k-1}{2n} = x\ (X-zone)$ 이니깐

$\int_{f(0)}^{f(1)} 2yx\,dy = \int_{f(0)}^{f(1)} 2yf^{-1}(y)\ dy = \int_{f(0)}^{f(1)} 2xf^{-1}(x)\ dx$

$ex) \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \left\{\left(f(\frac{k}{n})\right)^2 - f(\frac{k}{n})\left(f(\frac{k-1}{n})\right)\right\} \frac{3k-2}{3n}$ 을 정적분으로표시하라

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \left\{\left(f(\frac{k}{n})\right)\left(f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})\right)\right\} \frac{2k-2}{3n}$ 에서

$\left(f(\frac{k}{n})\right) - \left(f(\frac{k-1}{n})\right) = dy, \quad \left(f(\frac{k}{n})\right) = y$

$\frac{3k-2}{3n} = x\ (X-zone)$ 이므로

$\int_{f(0)}^{f(1)} yx\,dy = \int_{f(0)}^{f(1)} yf^{-1}(y)\ dy = \int_{f(0)}^{f(1)} xf^{-1}$