



◈ 정적분의 활용 ◈

1. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt - e^x + 1$$

을 만족시킬 때, <보기> 에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

- ㄱ.  $f'(x) = f(x) + e^x$
- ㄴ.  $\{e^{-x}f(x)\}' = 1$
- ㄷ. 곡선  $y = f(x)$ 와  $x$ 축 및 직선  $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

$\Rightarrow$  실제 위 식은  $\int_0^x f(t)dt = f(x) - e^x + 1$  야

$\int_0^x f(t)dt$ 가 엄마함수(미분하면  $f(x)$ )이기 때문이지

우선  $x = 0$ 대입하면  $0 = f(0) - 1 + 1 = f(0)$ ,  $\therefore f(0) = 0$

또 이 상태에서 양변을 미분하면  $f(x) = f'(x) - e^x$ 가 돼

$\therefore f'(x) = f(x) - e^x$  (ㄱ은 맞음)

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \{e^{-x} f(x)\}' &= e^{-x}(f'(x) - f(x)) = e^{-x}(f(x) - e^x - f(x)) \\ &= e^{-x} \times e^x = 1 \quad (\text{맞음}) \end{aligned}$$

ㄷ. ㄴ에서  $f(x)$ 를 구할 수가 있는데

$\{e^{-x} f(x)\}' = 1$ 에서 양변을 적분하면

$e^{-x} f(x) = x + C$  여기서  $x = 0$ 대입하면  $f(0) = C$ 되는데

$f(0) = 0$ 이니깐  $C = 0$

$\therefore f(x) = x e^x$ 가 돼

$f(x) = x e^x$ 은 원점을 지나는데  $f(x)$ 와  $x$ 축,  $x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 면적은  $f(x) = x e^x$ 가  $0 \leq x \leq 1$ 에서 항상  $x$ 축 위에 있는게 명백하니깐 그냥 0부터 1까지 정적분 하면 돼

$$S = \int_0^1 x e^x dx = [x e^x - e^x]_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1 \quad (\text{참})$$

cf) ≪ 안녕맨이 이과 부정적분에서 반드시 외우라고 하는 8정리 소개할게 ≫

$$\textcircled{1} \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C \quad \textcircled{2} \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\textcircled{3} \int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$\textcircled{4} \int \ln(x+a) dx = (x+a) \ln(x+a) - x + C$$

$$\textcircled{5} \int x e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$\textcircled{6} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\textcircled{7} \int f(x) f'(x) dx = \frac{1}{2} \{f(x)\}^2 + C$$

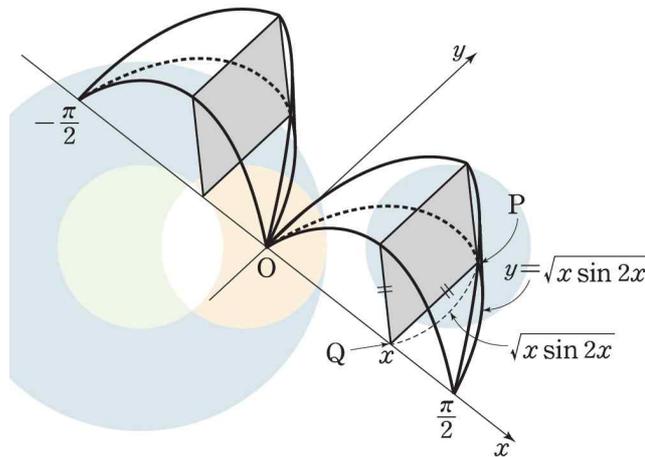
$$\textcircled{8} \int \{f(x) + x f'(x)\} dx = x f(x) + C$$

2. 곡선  $y = \sqrt{x \sin 2x}$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$  와  $x$ 축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체 도형이 있다.

이 입체 도형을  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형일 때,  
이 입체도형의 부피는?

$\Rightarrow y = \sqrt{x \sin 2x}$  는 구간의 끝점  $x = -\frac{\pi}{2}$  와  $x = \frac{\pi}{2}$  가  $x$ 절편이야

그래서 입체도형의 부피는  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$  (정사각형면적(단면적)) $dx$ 로 하는 건데  
결국 정 사각형 한변의 길이를 구하는게 핵심이지 ㅇ



그림에서 한변의 길이가  $\sqrt{x \sin 2x}$  ( $y = \sqrt{x \sin 2x}$ 의 함숫값)인 것을 알 수 있어

그러므로 단면적  $S(x) = (\sqrt{x \sin 2x})^2 = x \sin 2x$

$$\therefore \text{부피} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx \quad (\text{우함수})$$

$$= 2 \left[ x \left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \left( -\frac{1}{4} \sin 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{부분적분 속성법}) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

3. 곡선  $y = \sqrt{x}$  위에 점  $P_n(x_n, \sqrt{x_n})$  이 다음 조건을 만족 시킨다  
(단,  $n = 1, 2, 3, \dots$ )

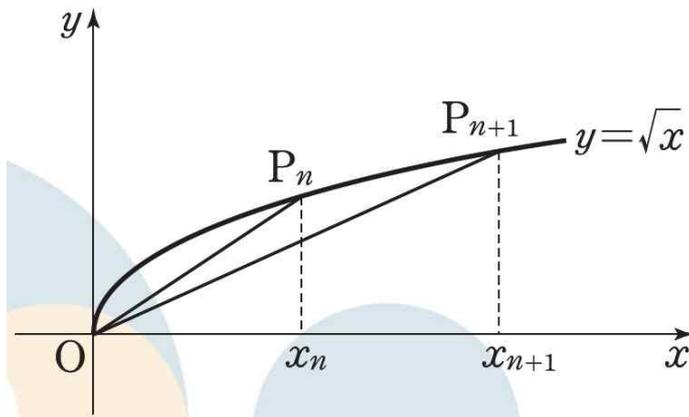
(가)  $x_1 = 1, x_2 = 4$

(나) 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $x_n < x_{n+1}$ 이다.

그림과 같이 원점  $O$ 에 대하여 두 선분  $OP_n, OP_{n+1}$  과 곡선  $y = \sqrt{x}$  로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_n$  이라 하면

수열  $\{S_n\}$  은 공비가  $\frac{4}{5}$  인 등비 수열을 이룬다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\frac{3}{2}}$  의 값을 구하시오.



⇒ 우선 면적  $S_n$  을 구하는게 핵심인데

위 그림에서  $X_n(x_n, 0), X_{n+1}(x_{n+1}, 0)$  이라고 하면

$$S_n = (\text{직각삼각형 } OP_n X_n) + \left( \int_{x_n}^{x_{n+1}} \sqrt{x} dx \right) - (\text{직각삼각형 } OP_{n+1} X_{n+1})$$

이 때

직각 삼각형  $OP_n X_n = \frac{1}{2} x_n \sqrt{x_n} = \frac{1}{2} x_n^{\frac{3}{2}}$  이고

직각 삼각형  $OP_{n+1} X_{n+1} = \frac{1}{2} x_{n+1} \sqrt{x_{n+1}} = \frac{1}{2} x_{n+1}^{\frac{3}{2}}$  이야

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sqrt{x} dx = \left[ \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_{x_n}^{x_{n+1}} = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{x_n}^{x_{n+1}} = \frac{2}{3} x_{n+1}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} x_n^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore S_n = \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) x_{n+1}^{\frac{3}{2}} + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) x_n^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \left( x_{n+1}^{\frac{3}{2}} - x_n^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$x_{n+1}^{\frac{3}{2}} - x_n^{\frac{3}{2}} = 6S_n$$

여기서 뭐 생각나는거 없어? 계차수열의 일반항이잖아 ㅎㅎ

$$x_n^{\frac{3}{2}} = a_n \text{으로 치환해볼게 그럼 위 식은 } a_{n+1} - a_n = 6S_n$$

우선  $S_n$ 은 공비가  $\frac{4}{5}$ 인 등비수열이라고 했으니깐 첫째항  $S_1$ 만 구하면 일반항 구할 수 있어

$$S_1 = \frac{1}{6} \left( x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{6} \left( 4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{6} (8 - 1) = \frac{7}{6}$$

$S_n = \frac{7}{6} \times \left( \frac{4}{5} \right)^{n-1}$  이야 즉  $a_{n+1} - a_n = 6S_n = 7 \left( \frac{4}{5} \right)^{n-1}$  점화식에서  $a_n$  구해서  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  구하라는 문제가 된거야

$a_n$ 은 계차가 등비인 수열이니깐  $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 7 \left( \frac{4}{5} \right)^{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 7 \left( \frac{4}{5} \right)^{k-1}$  인데

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 7 \left( \frac{4}{5} \right)^{k-1} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{n-1} 7 \left( \frac{4}{5} \right)^{k-1} \right) = 1 + \frac{7}{1 - \frac{4}{5}} = 36$$

cf) 계차수열 :  $a_{n+1} = a_n + f(n) \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = f(n)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) \\ &\quad \cdot \cdot \cdot = a_p + \sum_{k=p}^{n-1} f(k) \end{aligned}$$

ex1)  $a_2 = 4$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + 3n$  ( $n \geq 1$ ) 일 때,  $a_n$  을 구하시오

$\Rightarrow n$  대신에  $n-1$  대입 하면  $a_{n+1} = a_n + 3(n-1)$  ( $n \geq 2$ )

$$a_n = a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} 3(k-1) = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 3(k-1) - 0 = 4 + 3 \times \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

ex2)  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = a_n + 3^n$  일 때,  $a_n$  을 구하시오

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3-1}$$

$$cf2) \text{ 계비 수열 : } a_{n+1} = a_n f(n) \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 \times (f(1) \times f(2) \times \dots \times f(n-1))$$

$$= a_2 \times (f(2) \times f(3) \times \dots \times f(n-1))$$

• • •

$$= a_p \times (f(p) \times f(p+1) \times \dots \times f(n-1))$$

ex)  $a_2 = 3$ ,  $a_n = a_{n-1} \times 3^n$  ( $n \geq 3$ )일 때,  $a_n$  을 구하시오

$$\Rightarrow n \text{ 대신에 } n+1 \text{ 대입하면 } a_{n+1} = a_n \times 3^{n+1} \quad (n \geq 2)$$

$$a_n = a_2 \times 3^3 \times 3^4 \times \dots \times 3^n = 3 \times 3^3 \times 3^4 \times \dots \times 3^n$$

$$= 3^{\frac{n(n+1)}{2} - 2}$$

cf.) 계차가 등비 수열이랑 계비 수열이랑 헷갈리지마 !!!

$$i) a_{n+1} = a_n + 3^n \text{ (계차가 등비 수열)}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3-1}$$

$$ii) a_{n+1} = a_n \times 3^n \text{ (계비수열)}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 \times (3^1 \times 3^2 \times \dots \times 3^{n-1})$$