순열

1. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족 시키는 함수 $f\ :\ X \rightarrow X$의 개수는?

(가) $f(1) \neq f(2)$ 이고 $f(2) \neq f(3)$ 이다.
(나) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 3이다.

$\Rightarrow$ 경우의 수는 기준 잡고 분류 한다음에 계산이지

우선 분류해야 하는데 (가)에서 $f(2) \neq f(1)$, $f(2) \neq f(3)$ 이라 했는데

$f(1)$과 $f(3)$이 다르면 $f(2) \neq f(1) \neq f(3)$ 즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 에서
서로다른 3개의 치역이 되므로 이미 3개의 치역이 결정되는 거고

만일 $f(1)$과 $f(3)$ 이 같으면 $f(2) \neq f(1) = f(3)$ 이 되서 2개의 치역이 결정되니깐
나머지 하나의 치역을 또 결정해야 하는 것으로 분류가 돼

① $f(2) \neq f(1) \neq f(3)$ 인 경우

이미 치역 3개가 $f(1), f(2), f(3)$으로 결정 났는데 5개의 공역중에
어떤 것을 선택하고 $f(1), f(2),\ f(3)$ 에 배열하는 경우의 수가 되므로

${}_5C_3 \times 3! = {}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

나머지 $f(4)$와 $f(5)$를 결정해야하는데 이건 그냥 함수의 개수니깐
중복순열로 계산하면 돼 치역의 개수가 3개니깐 ${}_3\pi_2 = 3^2 = 9$

두가지 조건이 연달아 성립되야 문제의조건을 만족하므로 곱의법칙으로
계산해야돼 $60 \times 9 = 540$

② $f(2) \neq f(1) = f(3)$ 인 경우

우선 5개의 공역중에 $f(2)$ 랑 $f(1) = f(3)$ 인 2개의 치역을 결정해야 하고
결정한 2개를 $f(2)$와 $\ll f(1),\ f(3) \gg$ 두 개로 배열해야 하니깐

$_5C_2 \times 2! = {}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$

현재 치역 2개만 결정이 났지? 그럼 $f(4)$나 $f(5)$중에 서로 다른 치역 하나를
결정해야 하는데

여기서 $f(4)$와 $f(5)$ 의 경우의수가 또 분류가 돼

즉, $f(4)$와 $f(5)$중 하나가 $f(2)$나 $f(1)$,$f(3)$과 같던지

아니면 $f(4)$ 와 $f(5)$ 중 어느 하나도 $f(2)$와 $f(1)$, $f(3)$과 같지 안던지야

$i)$ $f(4)$와 $f(5)$중 하나가 $f(2)$나 $f(1)$,$f(3)$과 같을때,

$f(4)$ 와 $f(5)$중 누구냐가 2가지 이고 이게 $f(2)$ 랑 같은지 $f(1)$, $f(3)$ 이랑 같은지가
2가지가 되고 거기에 나머지 $f(4)$와 $f(5)$중 같지 않은 어느 하나가 가는 것이
나머지 공역의 3개중에 하나의 방법이므로 3가지 경우의 수가 생겨
$\therefore 2 \times 2 \times 3 = 12$ 가지

$ii)$ $f(4)$ 와 $f(5)$ 중 어느 하나도 $f(2)$와 $f(1)$, $f(3)$과 같지 않을 때

이경우는 $f(2)$와 $f(1)=f(3)$ 치역이 이미 2개가 있으니깐 $f(4) = f(5)$ 가 되야
치역이 3개가 되지
여기서 $f(4) = f(5)$ 이 치역 한개만 결정하면 되는데 $f(2)$, $f(1)=f(3)$ 이
아닌 나머지 3개의 공역중에 골라야 하니깐 3가지가 돼

$i)$ 번과 $ii)$ 번은 어느 하나만 되도 ②를 만족하므로 덧셈정리로 계산해야돼

$12 + 3 = 15$

$\therefore$ ② 번의 경우는 $20 \times (12 + 3) = 300$

① 번과 ②번도 어느 하나만 되도 문제의 조건을 만족하므로 덧셈정리로
계산해야 돼 그래서 총 경우의 수는 $540 + 300 = 840$ 가지야 (어렵지 ㅎ)

$cf)$ 덧셈정리와 곱셈정리 구별하는 방법이 있어

만일 만일 i이라는경우와 ii라는 경우가 있는데

문제의 조건을 만족하려면 i과 ii중 어느 하나여도 만족한다 하면
이 두개의 경우의 수는 더하는거야

그니깐 마치 이래도 되고 저래도 되고지ㅎ

이와 반대로 곱셈법칙은 그 문제의 조건을 만족하려면 i과 ii가
다 되야 할때야
즉, i과 ii가 다 되야 그 하나의 조건을 만족하는 거지
그때는 두 경우의수를 곱해야 돼

$ex)$ 지역 A에서 B로 가는 노선이 버스노선, 지하철노선, 자전거노선이
있고 B에서 C로 가는 노선이 버스노선, 지하철 노선이 있을 때

A에서 B를 거쳐 C로 가는 노선의 경우의 수를 구하여라

$\Rightarrow$ 우선 A에서 B로 갈 때, 버스, 지하철, 자전거 어느 노선으로 가도
B로 갈 수 있지? 이럴땐 합의 법칙이 돼

즉, 버스노선 1가지 + 지하철노선 1가지 + 자전거 노선 1가지 = 3가지
이렇게 A에서 B로 가는 노선의 경우의 수는 3가지야

마찬가지로 B에서 C로 가는 노선의 경우의 수는 $1 + 1 = 2$가지

근데 어차피 이 문제의 조건을 만족하려면 A에서 B를가야하고 또
B에서 C로도 가야하자나 이 두경우를 다해야 조건을 만족하지
이럴때는 곱의 법칙이 성립해 $3 \times 2 = 6$ 가지가 되지

2. 1, 2, 3 의 숫자가 하나씩 적힌 공이 들어있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 집어 넣는 시행을 5번 반복 하였을 때, 공에 적힌 수의 합이 홀수인 경우의 수는?

$\Rightarrow$ 이건 축차 추출중에 복원 축출인데 이런 시행을 독립 시행이라고 해
각각의 시행이 확률에 영향을 받지 않고 동일한 상황이 되는 시행이지

우선 합이 홀수가 되려면 홀수가 홀수개 있어야 돼
$2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, 생각해보면 알수 있지 (뒤에 1의 개수)

경우의 수는 기준 잡고 분류니깐 당연히 홀수가 홀수개인 기준을 가지고
분류해야지 총 5번의 시행이니깐 홀수가 1개, 3개, 5개인 경우로 나누면 되네

그리고 1, 2, 3중에 홀수는 2개인데 이건 어느것을 뽑아도 경우의수에는
변함이 없으니깐 그냥 홀수 한개라고 정한다음 구한 모든 경우의수에서 2를
곱하면 최종 답이 돼

$i)$ 홀수가 1개인 경우

$\Rightarrow$ 우선 몇번째가 홀수가 나오느냐가 있는데 이건 당연히 5가지 겠지
근데 짝수는 2로 정해지지만 홀수는 1인경우 3인 경우 2가지가 있으니깐
$5 \times 2 = 10$

$ii)$ 홀수가 3개인 경우

이건 몇번째에 홀수가 나오느냐의 경우의 수가 생기므로

홀홀홀 짝짝 이걸 배열 하는 경우의 수가 되는데 이건 같은것이 있는 순열
이지 ㅎ $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$

그리고 짝수는 2로 고정되지만 홀수는 1과 3중에 중복을 허락하여 홀수에
배정하는거야 중복 순열이 되는거지
${}_2\pi_3$(2 : 없어도 되는거 (1, 3) , 3 : 반드시 있어야 하는거 (홀수3개)) $= 2^3 = 8$

2가지 경우를 다 만족해야 $ii)$경우를 만족하니깐 곱의 법칙이 되지
$10 \times 8 = 80$

$iii)$ 홀수가 5번인 경우

이건 홀 홀 홀 홀 홀 이니깐 배열하는경우는 1가지고
1, 3을 중복을 허락하여 배열하는거니깐 중복 순열이 돼
$ii)$번처럼 적용 하면 $_2\pi_5 = 2^5 = 32$

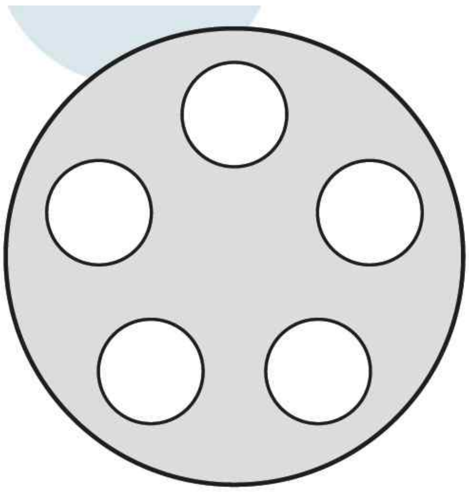
$\therefore\ i) + ii) + iii) = 10 + 80 + 32 = 122$

$cf)$ ≪ 순열 조합 관련 7가지 공식 ≫

<table>
<tr><td></td><td>$_nP_r$ (순열)</td><td>$n!$</td><td>$(n-1)!$ (원순열)</td></tr>
<tr><td>대 상</td><td>서로다른n개</td><td>서로다른n개</td><td>서로다른n개</td></tr>
<tr><td>선 택</td><td>r 개를 선택</td><td>선택않함
(= 모두선택)</td><td>선택않함
(= 모두선택)</td></tr>
<tr><td>자 리</td><td>서로다른자리</td><td>서로다른자리</td><td>돌리면같은자리있다</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$(\frac{n!}{p!q!r!})$</td><td>$_nC_r$ (조합)</td><td rowspan="4">중복순열 $_n\pi_r = n^r$

중복조합
$_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$
n : 없어도 되는것
r : 꼭 있어야 되는것</td></tr>
<tr><td>대 상</td><td>같은것 포함</td><td>서로다른n개</td></tr>
<tr><td>선 택</td><td>선택 않함
(= 모두선택)</td><td>r 개를 선택</td></tr>
<tr><td>자 리</td><td>서로다른자리</td><td>선택에서 끝 ,
자리가지정되어
있거나
자리가구분않됨</td></tr>
</table>

3. 서로 다른 접시 5개와 같은 종류의 박하맛 사탕 3개,
같은 종류의 딸기맛 사탕 2개가 있다.
각 접시에 사탕을 한 개씩 담아 그림과 같은 원형의 식탁의 5곳에 배치하는 경우의 수는?
(단, 회전시켜 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



$\Rightarrow$ 이문제는 원순열과 같은 것이 있는 순열을 짬뽕한 전형적인 문제야

만일 이게 서로 다른 5개를 원탁에 배열하는경우는 완벽하게 원순열이므로
$(5-1)! = 4! = 4\times3\times2 = 24$가지지

그리고 일렬로 배열 했다고 하면 박하, 박하, 박하, 딸기, 딸기 를 나열하는
것이니깐 $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$가지가 돼

근데 이 문제는 원순열이면서 같은것 있는 순열 2개가 다 만족해야
문제 조건을 만족하니깐 총 경우의 수는 곱의 법칙으로 $24 \times 10 = 240$가지가 돼

4. 서로 다른 5가지 음식을 파는 식당이 있다.
갑이 이 식당에서 아침, 점심, 저녁에 각각 하나씩의 음식을 서로 다르게 주문하고 같은 날 을도 이 식당에서 아침, 점심, 저녁에 각각 하나씩의 음식을 서로 다르게 주문하려고 한다.

아침, 점심, 저녁 중 한 번만 두 사람이 주문한 음식이 같고 갑과 을이 주문한 음식의 종류가 총 4가지가 되도록 주문하는 경우의 수는?

⇒ 이런 문제가 난이도가 있는건데 조건이 너무 많아서 하나 하나 파악하기가 힘들어
이때는 어느 하나를 고정해 놓고 다른것을 배열하면서 분류하는게 좋아
우선 갑의 주문을 그냥 배열해 볼게
5가지 음식중에서 3개를 뽑아서$\left({}_5C_3\right)$ 아침, 점심, 저녁에 나열하는 경우니깐(3!)
${}_5C_3 \times 3! = {}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

여기서 5가지 음식을 a, b, c, d, e 라 한다면 다음과 같이 갑의 주문을 이 60가지 중에 어느 한가지 경우를 그림으로 나타내 볼게

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을			

≪ ${}_5P_3 = 60$ ≫

그 다음 내용이 을이 선택한 3가지 음식중에 어느 하나는 갑과 동일해야 한다고 했지? 그것은 당연히 3가지 경우가 있어 그중 아침음식이 동일하다고 할게

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a		

≪ 을이 갑과 같은 음식을 아침 점심 저녁중에 선택하는가 3가지 ≫

자 그다음 어차피 갑과 을이 주문한 모든 음식은 4가지라고 했자나
이미 3가지가 나왔으니깐 나머지 한가지를 골라야 하는데
d, e중에 하나니깐 ${}_2C_1 = 2$ 가지가 되지 만일 d라면 이 d를 점심, 저녁에
나열하는 경우도 생기니깐 $2! = 2$가지가 더 생기는 거야

밑에 그림은 d를 점심에 놓은 경우야 그럼 저녁에는 자동으로 b가 될
수 밖에 없어
(a를 넣으면 아침이랑 중복되서 않되고 c를 넣으면 갑이랑 저녁이 중복되서 안돼)

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a	d	b

$\ll$ 4번째 음식이 d냐 e냐 : 2 가지 $\gg$ $\ll$ 4번째 음식이 점심이냐 저녁이냐 2가지 $\gg$

이 모든게 이루어 져야 조건을 만족하므로 이건 모두 곱의 법칙으로 계산해야돼

$\therefore 60 \times 3 \times 2 \times 2 = 720$ 가지