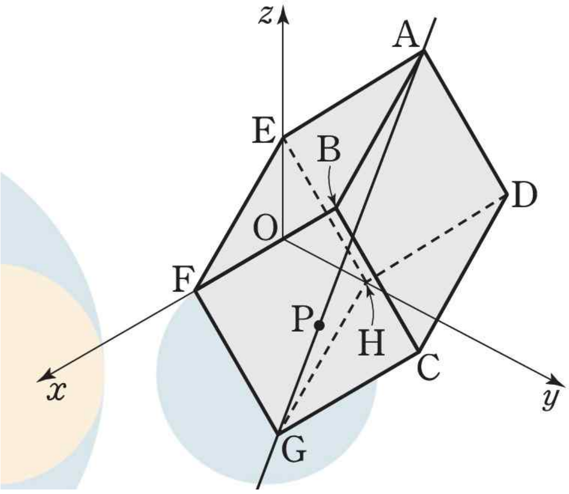
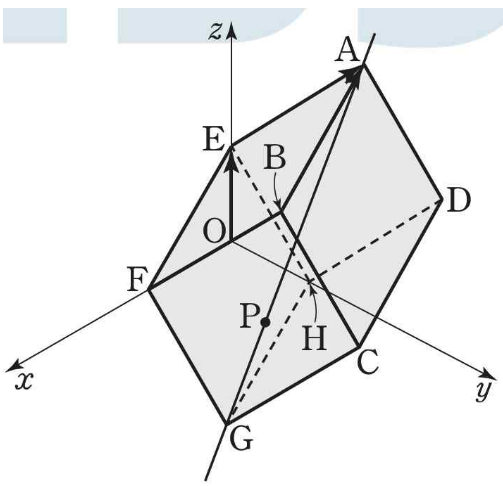
안녕맨의 눈으로 본 수능특강 LEVEL 3

⌬ 도형의 방정식 ⌬

1. 그림과 같이 두 밑면 $ABCD$, $EFGH$는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 마름모이고 네 옆면은 정사각형인 육면체 $ABCD-EFGH$를 세 점 E, F, H의 좌표가 각각 $E(0,\ 0,\ 1)$, $F(1,\ 0,\ 0)$, $H(0,\ 1,\ 0)$이 되도록 좌표공간에 놓았다. 두 점 A, G를 지나는 직선이 xy 평면과 만나는 점을 $P(a,\ b,\ 0)$이라고 할 때, $a+b$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.)





⇒ 점 A와 G의 좌표를 구해서 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식과 $z=0$과의 교점을 찾는 문제야 우선 G는 쉽게 구할수가 있어

사각형 $EFGH$가 마름모라고 했으니깐 평행사변형도 되는거지
평행사변형 성질에 의해서 대각선에 있는 두점의 중점이 서로 일치해
점 $G(a,\ b,\ c)$라 하면

$\overline{EG}$ 의 중점$\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{c+1}{2}\right) = \overline{FH}$ 의 중점$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ 에서

$a=1,\ b=1,\ c=-1 \quad \therefore\ G(1,\ 1,\ -1)$
점 A는 $\overrightarrow{OA}$ 라는 위치 벡터가 좌표가 되는거지
위의 오른쪽 그림에서 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA} = (0,\ 0,\ 1) + \overrightarrow{EA}$ 인데

$\overrightarrow{EA}$ 는 길이가 $\sqrt{2}$ 이고 평면 $EFGH$ 와 수직이 돼 즉,
평면 $EFGH$의 법선 벡터와 평행하게 되지

법선벡터는 외적을 이용하면 쉽게 구할 수있는데
$EFGH$의 법선벡터는 $EFGH$위의 두 벡터 $\overrightarrow{EF}$ 랑 $\overrightarrow{FH}$ 모두 수직이 되지

즉, 이 두벡터를 외적하면 법선벡터가 나와
$\overrightarrow{EF} = (1,\ 0,\ -1),\quad \overrightarrow{FH} = (-1,\ 1,\ 0)$

$$\vec{n} = \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0\times 0-(-1)\times 1,\quad (-1)\times(-1)-1\times 0,\ 1\times 1-0\times(-1)) = (1,\ 1,\ 1)$$

이거 공식으로도 풀 수 있는데

x절편 a, y절편 b, z절편 c인 평면의 방정식은

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 이야

$(1,0,0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,1)$ 지난다는것은 $x,\ y,\ z$ 절편이 1이라는 말이니깐

$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = x+y+z = 1$ 이 되서 법선벡터가 $(1,\ 1,\ 1)$이라는것을 알 수 있어

$\overrightarrow{EA} = t\vec{n} = t(1,\ 1,\ 1) = (t,\ t,\ t)$ 인데 크기가 $\sqrt{2}$ 니깐
$\sqrt{t^2+t^2+t^2} = \sqrt{3}t = \sqrt{2}$ 에서 $t = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \overrightarrow{EA} = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\therefore \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA} = (0,\ 0,\ 1) + \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$= \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3},\ 1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 이게 점 A의 좌표야ㅎ

두 점 A와 $G(1,\ 1,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은
$\dfrac{x-1}{\dfrac{\sqrt{6}}{3}-1} = \dfrac{y-1}{\dfrac{\sqrt{6}}{3}-1} = \dfrac{z+1}{1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}-(-1)}$, 이 직선과 $z=0$과의 교점은

$\dfrac{x-1}{\dfrac{\sqrt{6}}{3}-1} = \dfrac{y-1}{\dfrac{\sqrt{6}}{3}-1} = \dfrac{0+1}{\dfrac{\sqrt{6}}{3}+2}$ 을 풀면 $x = \dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}$, $y = \dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}$

즉, 점 $P\left(\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10},\ \dfrac{2+3\sqrt{6}}{10},\ 0\right) = (a,\ b,\ 0)$

$\therefore a+b = \dfrac{2+3\sqrt{6}}{10} + \dfrac{2+3\sqrt{6}}{10} = \dfrac{2+3\sqrt{6}}{5}$

≪ 평면의 방정식 ≫

한 점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 평면에 수직인

법선 벡터 $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$일 때,

① $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ (표준형)

② $ax + by + cz + d = 0$ (일반형)

(단, $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$)

cf) 외적을 이용한 평면의 방정식 구하기

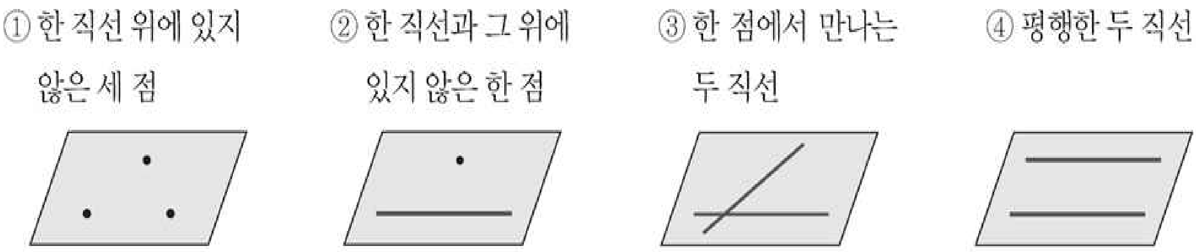
⇒ 두 벡터($\vec{a},\ \vec{b}$)를 포함하는 평면(α)이 있다고 하자
이 두 벡터를 외적을 하면 그 외적의 결과($\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$)도
벡터인데 이 벡터의 방향이 두 벡터에 수직이야($\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$)

근데 이 수직인 벡터($\vec{c}$)는 평면위의 두 벡터와
수직이기 때문에($\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$) 평면에 수직($\vec{c} \perp \alpha$) 이라고
할 수 있자나
그래서 이 외적 결과로 나온 벡터가 법선 벡터가 돼ㅎ($\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} = \vec{h}$)

즉, 평면위의 두개의 벡터만 잡으면 무조건 외적이 법선 벡터니깐

법선 벡터를 구할 수가 있는거지

보통 평면의 방정식을 구하는 문제에서 제공되는 조건은 평면의 결정 조건을 만족하는거야
공간 도형 첫 부분에서 배웠던 평면의 결정 조건을 다시 보자ㅎ
밑에 있는 조건이 평면의 방정식을 구하는 문제에서 주어지는 대표적인 4가지 조건이야



① 세 점을 지나는 평면의 방정식

⇒ 서로 다른 두점이 하나의 벡터를 만들 수 있어
그럼 두 쌍의 서로 다른 두점으로 두 벡터를 만들고 이걸 외적을 해서 법선벡터를 구하지 그리고 하나의 점은 세 점중에 아무거나 하나 쓰면 돼

$ex)$ 세 점 $A(1,\ 2,\ 0)$, $B(-1,\ 0,\ 2)$, $C(2,\ 1,\ 1)$ 을 지나는 평면의 방정식은?

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB} = (-2,\ -2,\ 2),\quad \overrightarrow{BC} = (3,\ 1,\ -1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (2-2,\ 6-2,\ -2+6)$$

$= (0,\ 4,\ 4)$ 이게 법선 벡터 인데 $(0,\ 1,\ 1)$을 써도 돼

$\vec{n} = (0,\ 1,\ 1)$ 이고 점 $A(1,\ 2,\ 0)$를 지나는 평면의 방정식은

$$0\,(x-1) + 1(y-2) + 1(z-0) = 0, \qquad y + z - 2 = 0$$

② 한 직선을 포함하고 그 직선 위에 있지 안는 한점을 지나는 평면

⇒ 직선의 방향 벡터와 직선위의 한점과 직선위에 있지 안은 한 점으로 벡터를 만들어서 외적하면 법선벡터가 나와

$ex)\ \dfrac{x-1}{3} = y+2 = \dfrac{z-1}{2}$ 를 포함하고 점 $A(1,\ 2,\ 0)$을 지나는 평면의 방정식을 구하시오

⇒ 우선 직선의 방향 벡터 하나는 있네 $\vec{u} = (3,\ 1,\ 2)$
그 다음 직선 위의 한점 $B(1,\ -2,\ 1)$과 $A(1,\ 2,\ 0)$으로 벡터 하나 만들 수 있지 $\overrightarrow{AB} = (0,\ 4,\ -1)$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (-1-8,\ 0+3,\ 12)$$

$$= (-9,\ 3,\ 12)\ \therefore \text{법선벡터}\ \vec{n} = (-3,\ 1,\ 4)$$

점 $A(1,\ 2,\ 0)$을 지나고 법선벡터 $\vec{n} = (-3,\ 1,\ 4)$인 평면의 방정식

$$-3(x-1) + 1(y-2) + 4(z-0) = 0,\quad -3x + y + 4z + 1 = 0$$

③ 한 점에서 만나는 두 직선을 포함하고 있는 평면

$\Rightarrow$ 두 방향벡터에 수직인 벡터가 법선벡터가 돼
점은 두 직선중 아무거나 상관없이 직선위의 한점을 잡으면되지ㅎ

$ex)$ 두 직선 $\frac{x-1}{2} = y-3 = -z+3$ 과 $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{4}$ 을 포함하는 평면의 방정식은?

$\Rightarrow$ 두 직선의 방향 벡터 $\overrightarrow{u_1} = (2,\ 1,\ -1)$, $\overrightarrow{u_2} = (3,\ 2,\ 4)$를 외적하면 법선 벡터가 돼

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (4+2,\ -3-8,\ 4-3)$$

$$= (6,\ -11,\ 1)$$

한 점은 $\frac{x-1}{2} = y-3 = -z+3$ 위의 점으로 잡을게 $(1,\ 3,\ 3)$

그럼 평면의 방정식은 $6(x-1) -11(y-3) +1(z-3) = 0$ 에서

$6x -11y +z +24 = 0$

④ 평행한 두 직선을 포함하는 평면의 방정식

$\Rightarrow$ 두 직선의 방향 벡터가 동일하니깐 방향 벡터는 하나만 사용 할 수 있어
각 직선에서 한 점을 잡고 그 두점으로 벡터를 만들어서 방향벡터랑
외적하면 법선 벡터가 나와

$ex)$ 평행한 두직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z$ 와 $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = z-1$ 을 포함하는
평면의 방정식은?

$\Rightarrow$ 우선 $\vec{u} = (2,\ 3,\ 1)$ 하나는 있고
두 직선위의 점 $A(1,\ 2,\ 0)$과 $B(-1,\ 0,\ 1)$로 벡터를 만들면
$\overrightarrow{AB} = (-2,\ -2,\ 1)$

법선 벡터 $\vec{n} = \vec{u} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2, & 3, & 1, & 2, & 3 \\ -2, & -2, & 1, & -2, & -2 \end{pmatrix}$

$= (3+2,\ -2-2,\ -4+6) = (5,\ -4,\ 2)$

점 $A(1,\ 2,\ 0)$을 지나고 법선 벡터 $\vec{n} = (5,\ -4,\ 2)$ 인 평면의 방정식은

$5(x-1) - 4(y-2) + 2(z-0) = 0$, $5x - 4y + 2z + 3 = 0$

$\Rightarrow$ 위 4 개 유형의 공통 전략은 결국 평면위에서 두 벡터를 잡고
그 벡터를 외적한것을 법선벡터로 잡는 거야

$cf2)$ 절편을 알고 있는 평면의 방정식

$\Rightarrow$ 좌표 평면에서 x절편 a 이고, y절편 b 일 때, 직선의 방정식 기억나?
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이었지ㅎ

평면도 마찬가지야 x절편 a, y절편 b, z절편 c 일 때, 평면의 방정식은

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 이야

이건 세점을 지나는 평면으로 생각하고 외적을 이용해서 구할 수 있는데

$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ 를 지나는 평면이니깐

$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, -b, c)$ 이 두벡터 외적이 법선벡터지ㅎ

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -a & b & 0 & -a & b \\ 0 & -b & c & 0 & -b \end{pmatrix} = (bc, ac, ab)$ 인데 법선 벡터는

평행 이동해도 동일하니깐 양변을 abc로 나누면 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$가 되지

법선 벡터가 $\vec{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$이고 점 $(a, 0, 0)$을 지나는 평면의

방정식 : $\frac{1}{a}(x-a) + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z = 0$ 에서 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$cf)$ 여기서 $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 +}$ 은 선분 $\overline{AB}$ 랑 $\overline{AC}$를

이웃한 변으로 하는 평행사변형의 넓이니깐 그 반인 $\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 +}$

은 $\triangle ABC$의 넓이(S)가 되지 $S^2 = \frac{1}{4}((ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2)$

$= \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2 = S_{xy}^{\ 2} + S_{yz}^{\ 2} + S_{xz}^{\ 2}$ (S_{xy} : $\triangle OAB$ 넓이)

2. 좌표 공간에서 xy 평면, yz평면, zx 평면에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 1인 구를 S_1이라 하고, xy평면, yz 평면, 구 S_1에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 3인 구를 S_2 라 하자.

두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 A, B라 하고 점 C의 좌표가 $(0,\ 0,\ 2)$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(단, 두 점 A, B의 x좌표, y좌표, z좌표는 모두 양수이다.)

$\Rightarrow$ S_1 은 공식이지 ㅎ 반지름이 1이라고 했으니깐
$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \quad \therefore A(1,\ 1,\ 1)$
(참고로 세 축에 접할때는 반지름이 $\sqrt{2}$ 야)

S_2는 xy평면이랑 yz평면이랑 접하고 반지름이 3이라고 했으니깐
중심좌표가 $B(3,\ b,\ 3)$ 이 돼
외접하려면 중심간의 거리가 두 구의 반지름의 합과 같으니깐

$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(b-1)^2+2^2}=1+3=4$에서 $(b-1)^2+8=16$, $(b-1)^2=8$

$b-1=\pm 2\sqrt{2}$, $b=1\pm 2\sqrt{2}$ 인데 중심 좌표가 다 양수라고 했으니깐
$b=1+2\sqrt{2}$ 겠지 $\quad \therefore B(3,\ 1+2\sqrt{2},\ 3)$
공간 좌표 상에서 세 점으로 이루어진 삼각형의 넓이 구할때에도
외적이 엄청좋아 두 벡터의 외적의 크기의 반이 면적이 되거던
$\overrightarrow{AB}=(2,\ 2\sqrt{2},\ 2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,\ -1,\ 1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$=\left(2\sqrt{2}\times 1-2\times(-1),\quad 2\times(-1)-2\times 1,\quad 2\times(-1)-2\sqrt{2}\times(-1)\right)$
$=\left(2\sqrt{2}+2,\ -4,\ 2\sqrt{2}-2\right)$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}+2)^2+(-4)^2+(2\sqrt{2}-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{40}$$
$$=\sqrt{10}$$

$cf)$ 평면과 축에 접하는 구의 방정식

$\Rightarrow$ 정육면체로 이해하는게 편해

$i)$ 기본

xy평면에 접한다 : $r=|c| \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2$

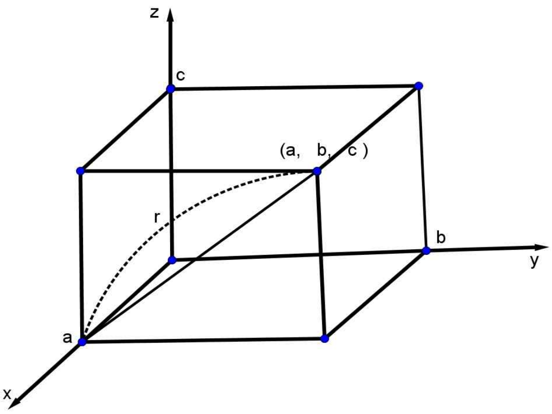
yz평면에 접한다 : $r=|a| \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2$

zx평면에 접한다 : $r=|b| \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2$

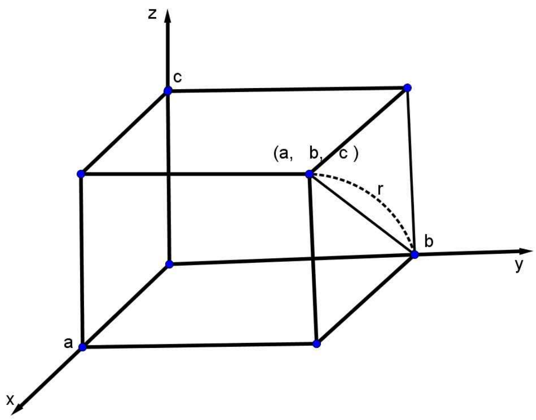
x축에 접한다 : $r=\sqrt{b^2+c^2} \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2+c^2$

y축에 접한다 : $r=\sqrt{a^2+c^2} \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$

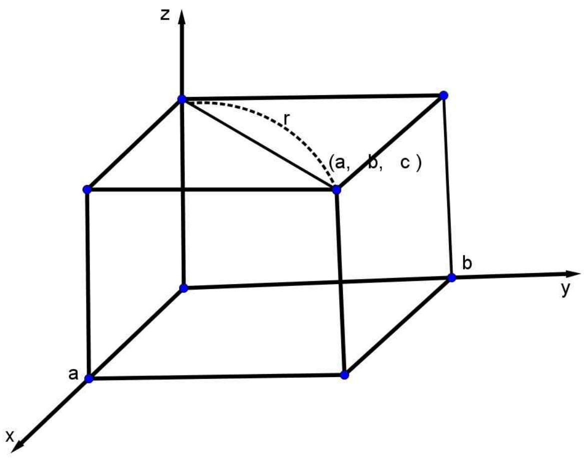
z축에 접한다 : $r=\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2$



≪ x축 ≫



≪ y축 ≫



≪ z축 ≫

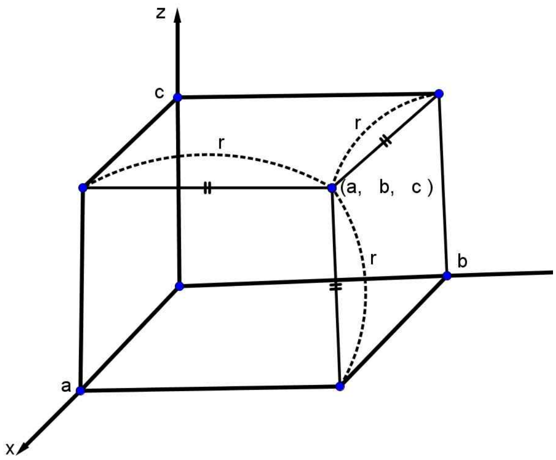
$ii)$ 응용

ⓐ xy평면, yz평면, zx평면에 접한다 : $|a|=|b|=|c|=r$

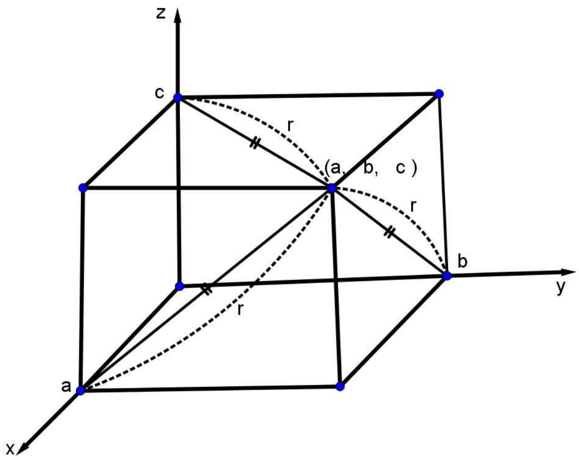
$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2$

ⓑ x축, y축, z축에 접한다 : $|a| = |b| = |c|$, $r = \sqrt{2}\,a$

$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = 2a^2$



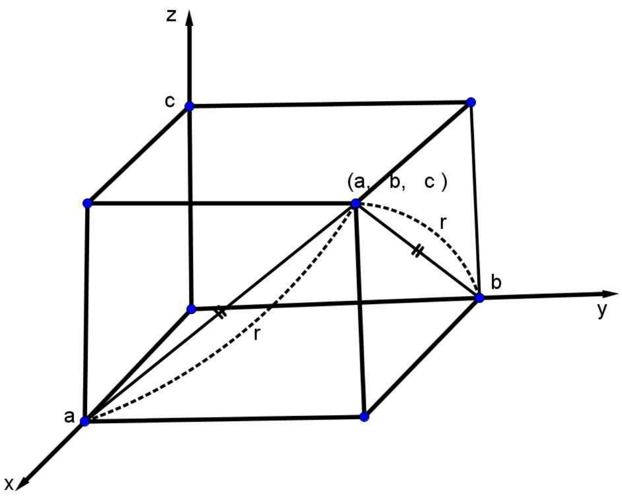
≪ⓐ≫



≪ⓑ≫

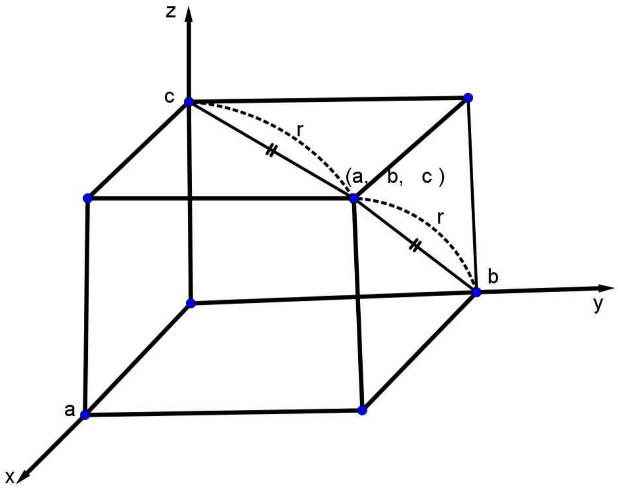
ⓒ x축, y축에 접한다 : $|a| = |b|$, $r=\sqrt{a^2+c^2}$

$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-c)^2 = a^2 + c^2$



ⓓ y축, z축에 접한다 : $|b| = |c|, \quad r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-b)^2 = a^2 + b^2$

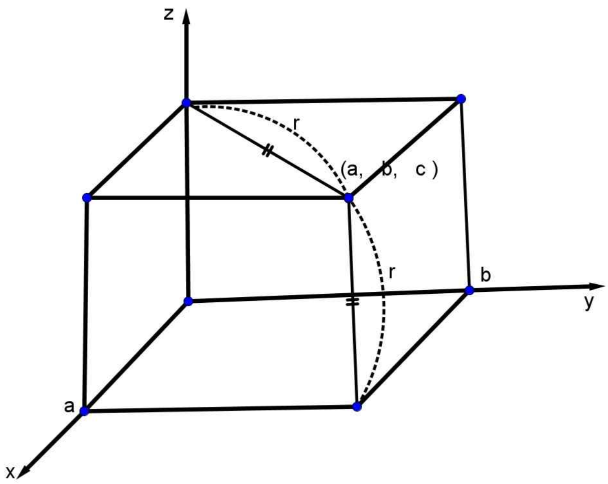


ⓔ xy평면에 접하고 z축에 접한다 : $r = |c| = \sqrt{a^2+b^2}$

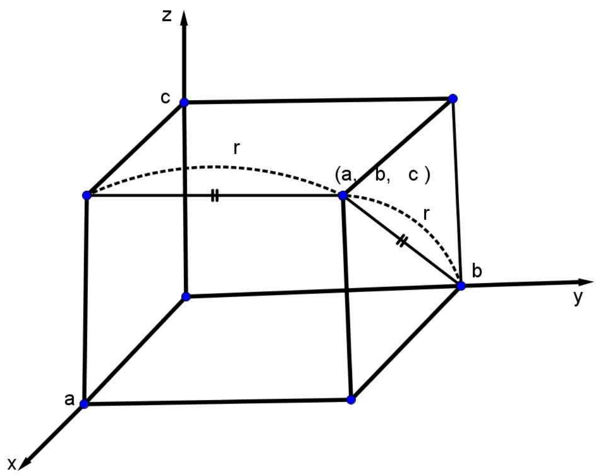
$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\sqrt{a^2+b^2})^2 = a^2+b^2$

ⓕ xz평면에 접하고 y축에 접한다 : $|b| = r = \sqrt{a^2+c^2}$

$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-\sqrt{a^2+c^2})^2 + (z-c)^2 = a^2+c^2$



≪ ⓔ ≫



≪ ⓕ ≫

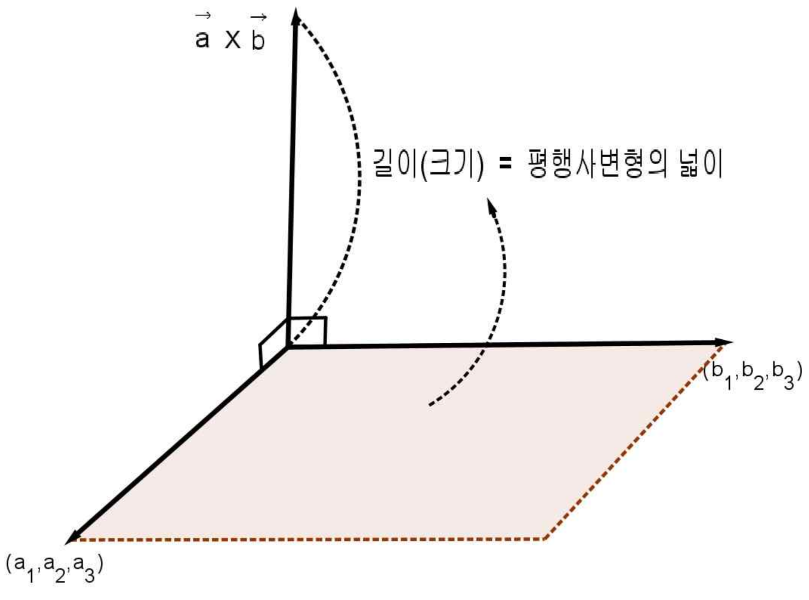
$cf2$) 외적의 활용

$\Rightarrow$ 외적은 교과 과정은 아니지만 면적이나 두 벡터에 수직인 법선 벡터 구할 때 아주 유용하게 활용 될 수 있어

$\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 외적은 $\vec{a} \times \vec{b}$ 로 표시하고 그 결과 값은 벡터야
이게 내적과 큰 차이지
$\vec{a} \bullet \vec{b} =$ 실수, $\vec{a} \times \vec{b} =$ 벡터

$\ll$ 두 벡터를 외적한 벡터는 항상 두 벡터에 동시에 수직인 벡터 $\gg$ 가 돼
그니깐 두 벡터에 수직인 법선 벡터가 바로 외적이지
이건 어떤 평면의 법선 벡터를 구할 때 굉장히 유용하게 쓸 수 있어

그리고 두 벡터의 외적의 크기는 두 벡터가 이루고 있는 평행사변형의 넓이와 같아
즉, $\ll \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta \quad \gg$



$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ 일 때 $\vec{a} \times \vec{b}$ 구하기

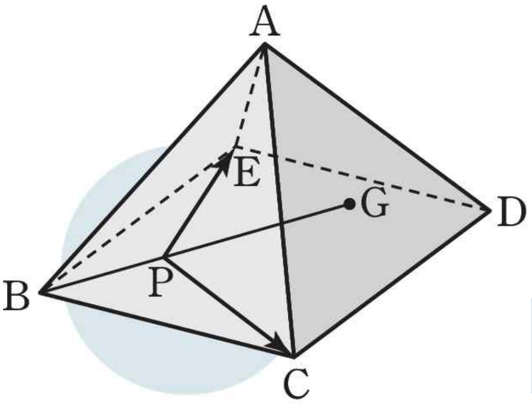
$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{matrix}$ 이렇게 나열 한 다음 지그 재그로 빼면 돼

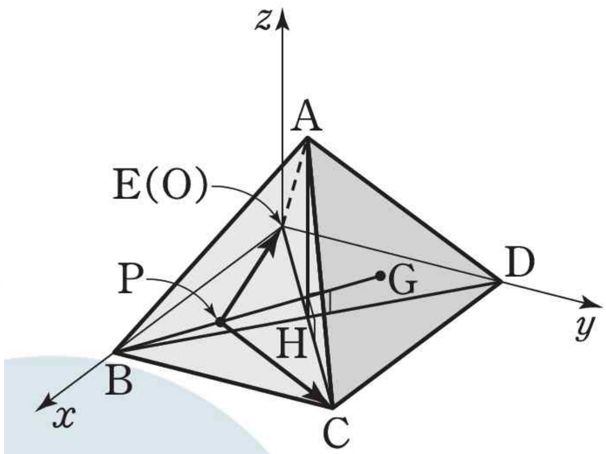
$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$

3. 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 사각뿔 $A-BCDE$ 에서

삼각형 ACD의 무게중심을 G라고 하자.

점 P가 선분 BG 위의 점일 때, $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PC}$ 의 최솟값은?





$\Rightarrow$ 이 문제는 두점 B와 G를 지나는 직선의 방정식을 구한다음에
직선위의 점 P를 매개변수 $(=t)$로 나타낸 다음에 내적의 최솟값을
구하는 문제야 어차피 t에 관한 함수가 나오겠지

우선 각 점들을 좌표화 해야 하는데 수직이 3개인 직선을 찾아야돼

사각뿔의 모든 모서리가 같다는것은 밑면은 정사각형이고 옆면은
다 정삼각형이라는 말인 거야

참고로 밑면이 정사각형인 뿔을 “정사각뿔” 이라고 해
원래 정사각뿔이 모든 변이 같은건 아니지만 이 경우는 특별한 경우의
정사각뿔이야

그럼 위의 오른쪽 그림처럼 밑면에서 x축 y축을 만들수가 있고 $\overline{AH}$ 랑
평행한 z축을 만들수가 있어

E를 원점으로 하면 $B(2,\ 0,\ 0)$, $C(2,\ 2,\ 0)$, $D(0,\ 2,\ 0)$ 라는 것을 알 수 있지

점 A는 x좌표 y좌표는 정사각뿔 한변의 길이의 반이니깐 1이지
z좌표는 $\overline{AH}$ 길이가 되는데 직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}^2 = \overline{AB}^2\left((\text{사각뿔 한변의 길이} = 2)^2\right) - \overline{BH}^2\left(\left(\text{정사각형 대각선의 반} = \frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$

$= 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 2$, $\quad \therefore \overline{AH} = \sqrt{2}$, 점 $A(1,\ 1,\ \sqrt{2})$

점 G는 삼각형 ACD의 무게중심이니깐

$$G\left(\frac{1+2+0}{3},\ \frac{1+2+2}{3},\ \frac{\sqrt{2}+0+0}{3}\right) = \left(1,\ \frac{5}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

두점 $B(2,0,\ 0)$과 $G\left(1,\ \frac{5}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$을 지나는 직선의 방정식은
방향 벡터 $\vec{u} = \left(-1,\ \frac{5}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$인데 방향벡터는 평행이동이 가능하니깐
각 좌표에 3을 곱해서 방향벡터를 $(-3,\ 5,\ \sqrt{2})$로 봐도 문제 없어

즉, 직선의 방정식은 $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{\sqrt{2}}$ 이렇게 되는데 이 직선위의 점
P를 매개변수로 나타내려면 $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{\sqrt{2}} = t$에서
$x = -3t+2$, $y = 5t$, $z = \sqrt{2}\,t$ 이니깐

점 $P(-3t+2,\ 5t,\ \sqrt{2}\,t)$라 놓을 수 있어 $E(0,\ 0,\ 0)$, $C(2,\ 2,0)$ 이니깐

$\overrightarrow{PE} = (3t-2,\ -5t,\ -\sqrt{2}\,t)$,
$\overrightarrow{PC} = (2-(-3t+2), 2-5t,\ -\sqrt{2}\,t) = (3t,\ 2-5t,\ -\sqrt{2}\,t)$ 니깐

$\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PC} = 3t(3t-2) + (-5t)(2-5t) + (-\sqrt{2}\,t)^2 = 9t^2 - 6t - 10t + 25t^2 + 2t^2$
$= 36t^2 - 16t$ (2차 함수니깐 도함수가 0이되는 t에서 최솟값을 가져)

$f(t) = 36t^2 - 16t$라 한다면 $f'(t) = 72t - 16 = 0$에서 $t = \dfrac{16}{72} = \dfrac{2}{9}$
$\therefore$최솟값 : $f\left(\dfrac{2}{9}\right) = 36\left(\dfrac{4}{81}\right) - 16 \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{16}{9} - \dfrac{32}{9} = -\dfrac{16}{9}$

4. 좌표공간에 있는 구 S : $(x-13)^2+\ y^2\ +z^2\ =34$ 와 평면 $y=3$이

만나서 생기는 원을 C_1 이라고 할 때,

y축을 포함하는 평면 α가 원 C_1과 점 P에서 접한다.

또한 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원을 C_2라고 하자.

원 C_1위의 점 중에서 점 P까지의 거리가 최대가 되도록 하는 점을 Q,

원 C_2 위의 점 중에서 점 P까지의 거리가 최대가 되도록 하는 점을

R이라고 하자

세 점 P, Q, R를 지나는 평면의 방정식 $ax+by+5z=c$ 일 때,

세 상수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

(단, 점 P의 z좌표는 양수이다.)

$\Rightarrow$ 우선 C_1 을 구해볼게 $(x-13)^2+(3)^2+z^2\ =34$에서 $(x-13)^2+z^2=5^2$
이건 x축, z축으로 되어있는 좌표평면에서 원이 되지

그리고 α가 y축을 포함하는 평면이라고 했는데 이건 x축, z축 에서
원점을 지나는 직선처럼 보면돼 식도 $z=ax$ 형태거던

그래서 이 문제는 실제 작도 할 때도 x축 z축으로 된 좌표 평면으로 해석하는게 좋아

문제에서 α 가 C_1 에 접한다고 했으니깐 원점을 지나는직선이 접점 P에서
중심이 $(13, 0)$이고 반지름이 5인 원에 접하는 상황을 그려보면 돼

우선 평면 α와 C_1이 접하면 α와 C_1 의 중심사이의 거리가 반지름이랑

같으니깐 $ax-z=0$과 $(13,\ 0)$사이의 거리 $\dfrac{13a}{\sqrt{a^2+1}}\ =\ 5$에서

$13a\ =5\sqrt{a^2+1}$, $169a^2=25(a^2+1)$, $144a^2=25$, $a^2=\dfrac{25}{144}$, $a=\dfrac{5}{12}$

평면 α : $\frac{5}{12}x - z = 0$, $5x - 12z = 0$ 에서 $z = \frac{5}{12}x$ 야

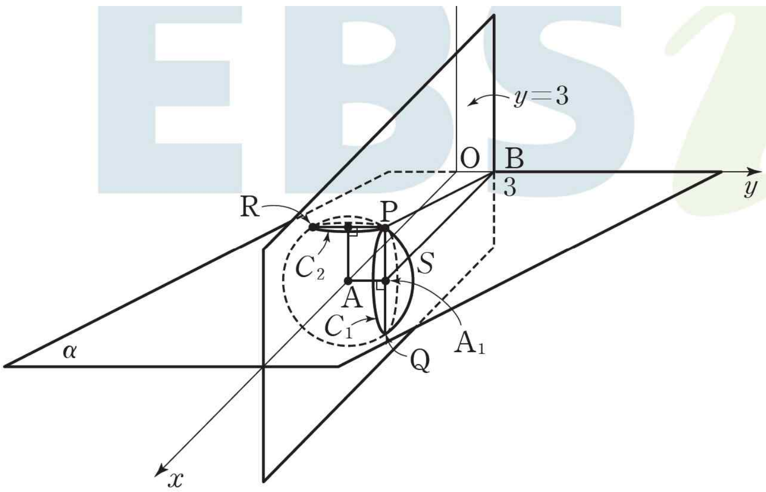
이거랑 $(x-13)^2 + z^2 = 5^2$과 연립하면 $(x-13)^2 + \frac{25}{144}x^2 = 25$에서

$x^2 - 26x + 169 + \frac{25}{144}x^2 = 25$, $x^2 + \frac{25}{144}x^2 - 26x + 144 = 0$ 에서

$144x^2 + 25x^2 - 26 \times 144 + (144)^2 = (13x)^2 - 2 \times 13 \times 144 + (144)^2$

$(13x - 144)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{144}{13}$, $z = \frac{5}{12} \times \frac{144}{13} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$

그래서 P의 좌표 : $\left(\frac{144}{13},\ 3,\ \frac{60}{13}\right)$ 이제 위 상황을 그림으로 보자



위 그림을 보면 $\overline{PR}$이 C_2의 지름이 되고 $\overline{PQ}$ 는 C_1의 지름이 돼
그리고 $\angle RPG$가 직각이기 때문에 $\overline{RQ}$는 구 C의 지름이 되지

세 점 P, Q, R, 을 지나는 평면은 당연히 $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RQ}$를 포함하기 때문에 구의 중심 $A(3,\ 0,\ 0)$ 를 지나고 y축에 평행한 평면이야

위 그림을 보면 점 P에서 y축에 내린 수선의 발이 점 $B(0,\ 3,\ 0)$인데
이 평면은 $\overrightarrow{PB} = \left(\frac{144}{13},\ 0,\ \frac{60}{13}\right)$에 수직임을 알수가 있어
그래서 $\overrightarrow{PB}$가 법선벡터가 되지

$\therefore$ 평면의 방정식 : $\frac{144}{13}(x-13) + 0y + \frac{60}{13}z = 0$, $12x + 5z = 156$ 인데,
$ax + by + 5z = c$ 라고 했으니깐 $a = 12$, $b = 0$, $c = 156$, $\quad \therefore a + b + c = 168$

$cf)$ 축에 평행한 평면 또는 축을 포함하는 평면

① 축에 평행한 평면

$\Rightarrow$ 만일 x축에 평행하고 점 $(1,\ 2,\ 3)$을 지나는
평면의 방정식을 생각해보자
x축에 평행이라는 것은 yz평면에 수직인 것이랑 같은 말이니깐
법선 벡터가 $(0,\ b,\ c)$이 되지

그럼 평면의 방정식은 $0(x-1)+b(y-2)+c(z-3)=0$ 이 되서
$by+cz-2b-3c=0$ 즉, 마치 $y,\ z$에 관한 직선의 방정식 처럼 나오지?

실제 이러한 평면에 관한 문제는 문자가 2개 이하로 나오기 때문에
그냥 우리가 평면 좌표에서 했던 것처럼 좌표 평면 그려서 해결하면 돼

참고로 이 때는 구도 원으로 바꿔서 풀어

즉, 어떤 축에 평행하다 포함하다 라고 조건이 주어지면 이거는
공간에서 볼 필요없이 좌표평면에서 직선처럼 그려서 해결하라는 소리야ㅎ

② 축을 포함하는 평면

$\Rightarrow$ 이번엔 x축을 포함하고 점 $(1,\ 2,\ 3)$을 지나는 평면을 생각해보자

x축을 포함하는 평면도 결국 x축에 평행한 평면 중 하나니깐 $y,\ z$에
관한 식만 나와

하지만 잘 생각해보면 x축을 포함하고 있으니깐 원점을 지나겠지ㅎ

그래서 마치 $y,\ z$평면에서 원점을 지나는 직선처럼 생각하면 돼

식도 $z=ay$ 이렇게 나타내도 돼 (상수항이 없으니깐ㅎ)

$cf)$ 앞으로는 x축에 평행한 평면그러면 $z=ay+b$ 라 놓고
x축을 포함하는 평면 그러면 $z=ay$ 라고 놓으면 돼

마찬가지로 z축에 평행한 평면은 $y=ax+b$ 이고
z축을 포함하는 평면은 $y=ax$ 가 되겠지ㅎ

5. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$, $\overline{AE}=1$ 인

직육면체 $ABCD-EFGH$를 세 점 A, F, H의 좌표가 각각

$A(0,\ 0,\ 1)$, $F(1,\ 0,\ 0)$, $H(0,\ 2,\ 0)$이 되도록 좌표공간에 놓았다.

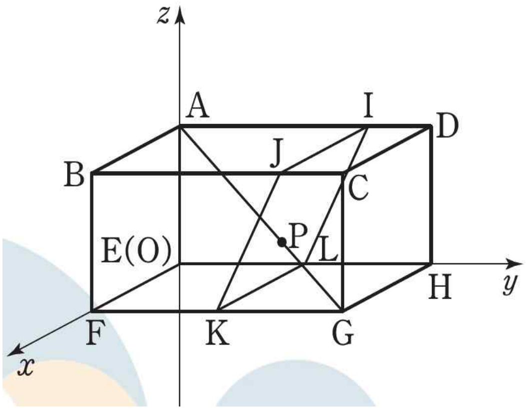
두 선분 AD, BC를 $3:1$로 내분하는 점을 각각 I, J라 하고

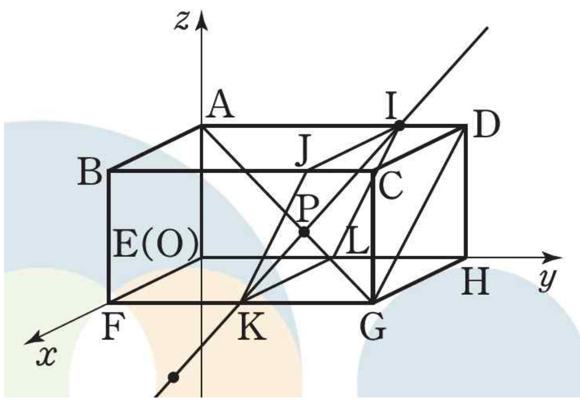
두 선분 FG, EH의 중점을 각각 K, L이라고 하자.

직선 AG와 평면 $IJKL$이 만나는 점을 P라고 할 때,

직선 IP와 zx평면이 만나는 점의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 하자.

$a+b+c$의 값은?





⇒ 우선 직선 AG, 평면 $IJKL$이라 했는데 주어진 점은 A, F, H니깐
나머지 G, I, J, K, L을 구해야지

위 그림에서 $B(1,\ 0,\ 1)$, $C(1,\ 2,\ 1)$, $D(0,\ 2,\ 1)$, $G(1,\ 2,\ 0)$이고

$$I:\left(0,\ 2\times\frac{3}{4},\ 1\right)=\left(0,\ \frac{3}{2},\ 1\right),\quad J:\left(1,\ 2\times\frac{3}{4},\ 1\right)=\left(1,\ \frac{3}{2},\ 1\right)$$

$K(1,\ 1,\ 0)$, $L(0,\ 1,\ 0)$ 할튼 모든 점을 아주 쉽게 구할 수 있어 ㅎ

평면 $IJKL$의 방정식 부터 구해볼게

점은 있으니깐 법선벡터만 구하면 되는데 평면위의 두벡터를 외적하면돼

$\overrightarrow{LK} = (1,\ 0,\ 0)$,

$\overrightarrow{LI} = \left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$인데 $(0,\ 1,\ 2)$를 쓸게 (법선벡터나 방향벡터는 평행이동이 가능)

$\overrightarrow{LK} \times \overrightarrow{LI} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0\times 2 - 0\times 1,\ \ 0\times 0 - 1\times 2,\ 1\times 1 - 0\times 0)$

$= (0,\ -2,\ 1)$, 즉 법선벡터 $\overrightarrow{n} = (0,\ -2,\ 1)$야

점 $L(0,\ 1,\ 0)$을 지나고 법선 벡터가 $(0,\ -2,\ 1)$인 평면 $IJKL$ 의 방정식

: $0(x-0) - 2(y-1) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow\ -2y + z + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y - z - 2 = 0$

이번엔 두점 $A(0,\ 0,\ 1)$, $G(1,\ 2,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식을 구하자

$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{(z-1)}{-1} \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} = 1 - z$ 인데 평면과 교점을 구해야하니깐

$x = \frac{y}{2} = 1 - z = t$라고 놓으면 직선 위의 점 $(t,\ 2t,\ 1-t)$가 돼

이게 평면위에도 있으니깐 $2(2t) - (1-t) - 2 = 0$을 만족하지 $5t - 3 = 0$에서 $t = \frac{3}{5}$

$\therefore$ 평면과 직선의 교점 $P\left(\frac{3}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{2}{5}\right)$가 돼

이제 두 점 $I\left(0,\ \frac{3}{2},\ 1\right)$과 $P\left(\frac{3}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{2}{5}\right)$를 지나는 직선의 방정식을 구하면 돼

$\frac{x}{\frac{3}{5} - 0} = \frac{y - \frac{3}{2}}{\frac{6}{5} - \frac{3}{2}} = \frac{z-1}{\frac{2}{5} - 1} \Leftrightarrow\ x = 3 - 2y = 1 - z$ 에서 $zx(y=0)$과 교점은

$x = 3 = 1 - z$에서 $x = 3,\ z = -2$, $\therefore (3,\ 0,\ -2) = (a,\ b,\ c)$, $a + b + c = 1$

6. 좌표공간에서 두 구

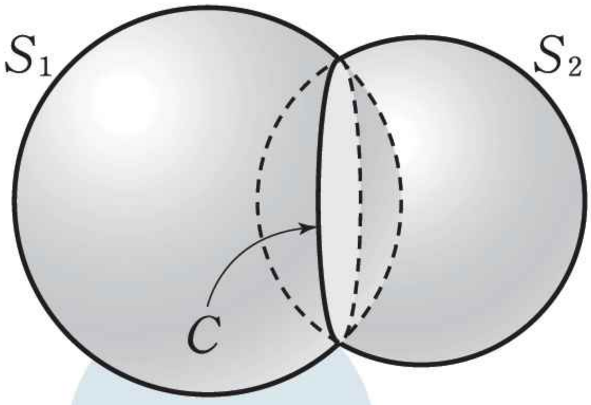
$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 6,\ \ S_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 6x = 2$가

만나서 생기는 원 C위의 임의의 점을 P라 하자.

점 $A(a,\ b,\ c)$에 대하여 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ 라고 할 때,

원 C위의 모든 점 P에 대하여 항상 $|\vec{p} - \vec{a}| = 4\sqrt{2}$ 가 성립한다.

$a + b + c$ 의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)



⇒ 원래 좌표공간에서 구와 평면은 좌표평면상에서 원과 직선이랑 흡사해

그래서 구와 평면사이의 관계를 접근할때 그냥 원과 직선으로 생각하고
풀면 훨씬 편해 모든 식이나 공식이 다 일치하거던 ㅎ

두 원의 교선은 원이 되는데 이 원을 포함하는 평면을 구할 때

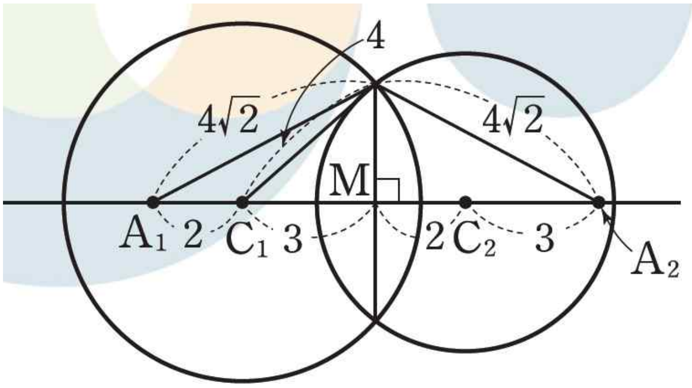
이건 좌표 평면에서 교점을 지나는 직선 구하는 방법이랑 일치해

그냥 빼면돼지 $S_1 - S_2 : 8x - 6z = -4$

그리고 구 S_1의 중심은 $C_1(1,\ 0,\ -3)$ 이고 반지름은 $\sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2 + 6} = 4$ 이고

구 S_2의 중심은 $C_2(-3,\ 0,\ 0)$ 이고 반지름은 $\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 0^2 + 2} = \sqrt{11}$ 이야

이제 위의 상황을 단면화 시켜서 볼게 ㅎ



위의 오른쪽 그림에서 각 구의 중심과 평면사이의거리를 구해보면

$8x-6z+4=0$과

$C_1(1,\ 0,\ -3)$ 사이의거리 : $\overline{C_1M} \quad = \dfrac{|8-6(-3)+4|}{\sqrt{8^2+6^2}} = \dfrac{30}{10} = 3$

$C_2(-3,\ 0,\ 0)$ 사이의거리 : $\overline{C_2M} \quad = \dfrac{|8(-3)+4|}{\sqrt{8^2+6^2}} = \dfrac{20}{10} = 2$

교원 C의 반지름은 $\sqrt{4^2\left((=\text{왼쪽 큰원의 반지름 : 빗변})^2\right)-3^2\left(=\left(\overline{C_1M}\right)^2\right)} \ = \ \sqrt{7}$

그니깐 위의 그림에서 교원 C는 중심이 M이고 반지름이 $\sqrt{7}$ 인 원이지

그담에 $|\vec{p}-\vec{a}| = 4\sqrt{2}$ 를 해석해야 하는데 이건
점 P의 자취가 점 $A(a,\ b,\ c)$를 중심으로 하고 반지름이 $4\sqrt{2}$ 인 구가 되는거야
근데 점 P는 또 두 구의 교원 C에도 있어야 돼

문제에서는 $a+b+c$가 최대가 되는 $A(a,\ b,\ c)$ 를 구하는것이기 때문에
A의 위치에 대해서 생각해 봐야 하는데

$4\sqrt{2}$가 빗변이 되고 C의 반지름$(=\sqrt{7})$이 높이가 되는 직각 삼각형을 생각해보면

$\overline{AM} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2-(\sqrt{7})^2} \ = \ \sqrt{25} \ = 5$ 즉, M과의 거리가 5인 A를 생각해야돼

위의 그림을 보면 세 점 A와 M과 C_1, C_2가 일직선상에 있을 때
A가 최대로 있을 가능성이 있는 점이 $\overline{C_1C_2}$를 2 : 7로 외분하는 점(A_1)
이거나 $\overline{C_1C_2}$ 를 8 : 3 으로 외분하는 점(A_2)일때 최대일 가능성이 있어

각각을 구해보고 $a+b+c$가 더 큰게 최댓값이 되겠지
$C_1(1,\ 0,\ -3)$과 $C_2(-3,\ 0,\ 0)$을

$$2:7\text{로 외분한점 } A_1=\left(\frac{2\times(-3)-7\times1}{2-7},\ 0,\ \frac{2\times0-7\times(-3)}{2-7}\right)=\left(\frac{13}{5},\ 0,\ -\frac{21}{5}\right)$$

$$8:3\text{로 외분한점 } A_2=\left(\frac{8\times(-3)-3\times1}{8-3},\ 0,\ \frac{8\times0-3\times(-3)}{8-3}\right)=\left(-\frac{27}{5},\ 0,\ \frac{9}{5}\right)$$

$a+b+c$를 계산해보면 A_1은 $\frac{13-21}{5}=\frac{-8}{5}$이고 A_2는 $\frac{-27+9}{5}=\frac{-18}{5}$이니깐

최댓값은 $-\frac{8}{5}$이돼 ㅎ