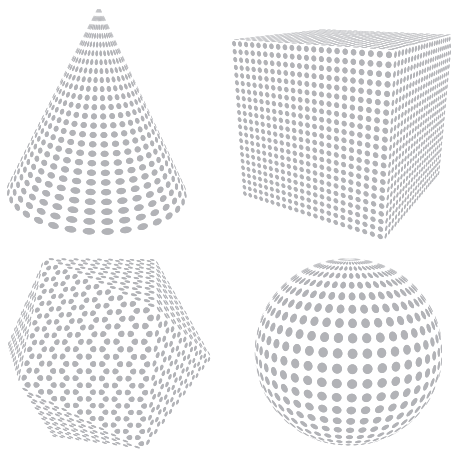


정확하고 구체적인 수학공부법



atom

PREFACE

공부를 열심히 하긴 했는데 성적은 마음대로 안 나왔다. 그래서 고민 끝에 명문대에 진학한 선배가 추천해준 일타강사의 인강을 들었다. 스타 강사들의 엄청난 강의력은 나에게 있어서 신세계였다. 성적도 나름 올랐다. 하지만 성적이 그대로 오르기만 한 것은 아니었다. 스타강사의 강의 덕분에 점수가 어느 정도까지는 올랐지만 일정 점수 이후로는 공부를 아무리 많이 해도 성적이 안 올랐다. 그러던 도중 인터넷의 어떤 공부법 전문가의 칼럼을 봤다. 그 칼럼에서는 성적은 계단식으로 오르니 꾸준히 노력하면 빛을 볼 것이라고 했다. 나는 그 말을 믿고 노력했다. 하지만 노력에 배신당했다. 아무리 공부해도 성적은 그대로였다. 그래서 나에게서는 답답함과 불안함을 날려줄 비기가 필요했다. 그래서 그러한 답답함과 불안함을 날려줄 비기나 공부법을 찾아 인터넷을 헤매는 습관이 생겼다. 그렇게 인터넷을 헤매다가 알아냈던 사실 중에 하나는, 인터넷 수험생 커뮤니티의 멘토들마다 하는 이야기가 거의 비슷하다는 것이었다. 특히 ‘수학은 개념이 중요하다’부터 시작해서 ‘기출분석을 하여라’ 등등 몇 가지 단골멘트는 대다수의 명문대생 멘토마다 똑같이 강조했다. 하지만 그러한 이야기를 들을수록 내가 찾던 시원한 해결방안과는 거리가 멀어졌고 오히려 더더욱 혼란만 커졌을 뿐이었다. 명문대 멘토들이 입을 모아 ‘기출문제를 분석하라’ ‘출제자의 의도를 분석하라~’ ‘다양한 문제를 풀면서 사고력을 키워라!’라는 식의 말을 던져주어도 나는 ‘그걸 어떻게 실천하라는 거야? 기출문제 분석? 출제자의 의도 분석? 그걸 하는 방법이 따로 있나?? 아니면 그냥 대충 하는 건가? 어찌라는 거지?’ 라는 생각만 들었을 뿐이었다.

인터넷이나 시중 도서에서 보이는 공부법들은 뜬구름 잡는 이야기만 하는 것 같았고 정작 나한테 필요한 내용은 하나도 없었던 것 같았다.

이 이야기는 저의 과거 이야기였습니다. 하지만 이것이 저만 겪었던 경험이 아니라는 것은 저도 너무나 잘 알고 있습니다. 지금도 전체 중 삼분의 일 이상의 고등학생이 당시의 저와 비슷한 경험을 하고 있습니다. 이 시간에도 수능 3,4점을 올리기 위해 수많은 상위권 학생들이 피눈물을 쏟으며 공부하고 있지만 마음처럼 안 될 것입니다. 학부모님도 마찬가지입니다. 아이가 마음처럼 성적이 안 나오는데 도대체 어찌 해야 하는지 모르겠고 답답하기만 할 뿐입니다. 이 책은 그러한 여러분의 코치가 되어 줄 것입니다. 노력을 하면 점수는 일정 수준까지는 분명히 오를 것입니다. 하지만 항상 노력하는 족족 성적이 오르지 않을 것입니다. 슬럼프가 오면서 본인 스스로 학습법에 문제를 느끼는 시기가 올 것입니다. 이 책 어딘가에는 그러한 여러분의 문제점이 분명히 있을 것입니다.

저는 수학 공부법의 정도를 깨닫고 나서, 직접 정확한 공부법을 제대로 정리해보자는 생각을 하게 되었습니다. ‘뻘하고 허울만 좋은 공부법 이론 이야기가 아니라 실전에 쓰이는 콘텐츠를 만들어 불안했던 엄마들이나 학생들의 속을 시원하게 해주자.’ 라는 목표로 말이죠. 그 결과가 이 책입니다. 성적을 올리고 싶은 간절함이 있지만 확실한 전략이 없는 학부모님/학생들을 도와주기 위해 이 책을 만들었습니다. 그만큼 이 책은 지나치게 친절하고 자세합니다. 학생이나 학부모님의 눈높이에 딱 맞게 정성들여 만들었습니다.

CONTENTS

1장 | 어설픈 정보는 약이 아니라 독!

공부법? 제발 피상적으로만 생각하지 말자	007
고난도 문제를 풀기 위한 현실적인 전략은 딱 이것만!★	015
수학 선행학습, 본질을 모른 채 아무리 논쟁해봐야 소용없다	024
사고력 수학학원, 잘못알고 다니지 말자	032
유행하는 공부법의 허와 실-메타인지와 가르치기 공부법	039
성적은 반드시 계단식으로 오르는 것은 아니다	048

2장 | 수학 공부법을 배우기 전에 이 정도는 알자

수학을 못하는 학생의 특징	061
경우의 수, 확률, 통계는 개념이 매우 중요하다	064
학생 개개인별 심화 문제풀이 공부의 효율성이 차이를 알자★	067
남에게 의존하지 않고 스스로 수학공부 계획을 짜는 방법	073
수학 시험 문제 출제 방식을 이해하자★	085
수학적 사고의 근원인 추론능력과 문제해결능력을 이해하자★	092

3장 | 본격 수학 공부법, 이것만 알면 끝난다

chapter1. 개념을 탄탄히 다지면 50%가 끝난다	109
개념의 정의를 익혀야 하는 이유★	114
배경과 쓰임새를 익혀야 하는 이유★	119
개념과 개념 사이의 유기적인 관계를 익혀야 하는 이유★	124
공식의 유도과정을 익혀야 하는 이유★	131
chapter2. 풀었던 문제도 내 것으로 만들면 100%가 끝난다.	140
기본문제와 내신형 문제를 푸는 시각	142
체계화된 접근방식을 만든 뒤 숙지한다★	147
틀린 문제를 내 것으로 만드는 방법을 배우자★	157
수능/평가원 기출문제를 올바르게 공부하는 법을 익히자★★★	160
오답관리와 오답노트는 어떻게 해야 할까?	198
실전감각을 다지는 훈련의 목적은 실전감시요원을 만드는 것	202
실수한 걸 전부 수첩에 옮겨 적으면 실수가 줄어든다	207
하지만 실수 수첩을 아무리 잘 이용해도 실수를 줄이는 데 한계가 있다★	210

4장 | 상위권학생이 최상위권으로 도약하기 위한 추가 훈련법

최상위권을 노리면 교과서 내면의 논리자체를 익혀라 ★	217
추론과 문제해결능력은 수학적 탐구를 기본틀로 연습한다	226
구체화를 하는 습관이 발견적 추론능력을 높여준다★	234
가설을 설정하는 습관을 통해 추론연습을 하자★	238
풀이 후에 문항을 복기해보자★	241
직관을 절대 무시하지 말자★	246

수학은 대한민국 학생이 가장 고생하는 과목입니다. 실제 입시에서 여러분의 핵심 역할을 가장 많이 결정짓는 과목이 수학이기도 하죠. 고등학교 야자시간에 대부분 고등학생이 수학문제를 풀고 있는 광경만 봐도 수학의 중요성을 알 수 있습니다. 그만큼 수학 점수를 올리기도 쉽지 않습니다. 하지만 분명한 것은, 시간과 노력의 효율적인 투자가 가능하다면, 수학실력을 확실하게 향상시킬 수 있다는 것입니다.

일단 이 책에서 다루는 모든 수학 공부법은 다음 두 가지를 전제로 합니다.

모든 수학 공부법의 첫 번째 전제

대입 수학시험은, 수학시험의 본질을 파악하고 그에 맞는 연습을 하면 고난도 문제도 해결이 가능합니다.

수학 문제풀이의 능력을 향상시키기 위해서는 기본적인 문제풀이 습관이 잡혀있어야 합니다. 모르는 문제를 나중에 재도전하고 풀이과정에 대해 반성을 해야 합니다. 앞선 문제와 비교해보기도 하고 교과서의 개념을 살펴보며 적용방식에 대해 다시 생각해 보는 것도 좋습니다.

이런 기본적인 습관이 수학을 잘 하는 학생과 수학을 못하는 학생의 가장 눈에 띄는 차이입니다. (물론 이 습관이 수학문제풀이 향상의 전부는 아닙니다. 뒤에 ‘본격 수학 공부법’에서 이와 관련해 충분한 이야기가 있습니다.) 수학에 약한 학생들도 문제에 대해 수학적인 방법으로 깊게 생각해 보고 다양한 기법을 통해 문제에 접근했던 경험을 되새김질 할 때에 많은 것을 배울 것입니다.

모든 수학 공부법의 두 번째 전제

수학은 결국엔 반복과 숙지가 점수를 만듭니다. 한 권의 문제집을 풀더라도 한 번으로 끝내지 않고 여러 번 반복하며 푸는 것이 올바른 방식입니다. 수학 문제들도 어차피 패턴이 있습니다.

수학 공부법이랍시고 암기와 이해를 기본으로 한 반복을 하라는 것은 지루한 발언입니다. 하지만 현실에서는 그마저도 학생들이 잘 안합니다. 초, 중학생은 학원숙제 말고도 따로 시간을 내서 능동적인 태도로, 배운 것을 내 것으로 만들겠다는 마음으로 복습을 하면 아주 큰 경쟁력을 얻을 수 있습니다. 수동적인 학습태도를 가진 학생은 학원에서 하는 수업만 듣고 자기만의 공부시간을 가질 생각은 안합니다. 이러한 태도를 고치지 않으면 어떤 공부방법도 소용없습니다. 참고로 썬 수학 같은 내신대비용 문제집은 전체적으로는 4번 반복/틀린 문제는 8번 반복 정도는 해야 제대로 소화한 것이라고 생각하세요. 문제집을 몇 권 푸느냐는 중요하지 않습니다. 한 권을 풀더라도 내 것으로 만들겠다는 마음가짐으로 여러 번 반복을 많이 하는 것이 중요합니다. 수학을 잘 하고 싶으면 그만큼 반복과 숙지가 기 위해 많은 시간을 투자해야 합니다.

다시 한 번만 더 정리하면, 수학 공부법은 두 가지를 전제로 합니다.

모든 수학 공부법의 첫 번째 전제

대입 수학시험은, 수학시험의 본질을 파악하고 그에 맞는 연습을 충분히 하면 고난도 문제도 해결이 가능합니다.

3 “본격 수학 공부법, 이것만 알면 끝난다”

앞에서는 수학공부법을 제대로 이해하기 위해
바로잡아야 할 지식들을 배웠습니다.
지금부터 그 지식들을 바탕으로
본격적인 수학 공부법을 배워볼까요?

“ chapter1. 개념을 탄탄히 다지면 50%가 끝난다 ”

수학을 잘하기 위한 비법은 무엇일까요?

여기에 대해 소위 전문가들은 백이면 구십은 ‘개념을 탄탄히 다져야 한다.’라고 이야기하죠. 여러분들은 학년이 올라가면서 개념의 중요성에 대해 여러 번 듣게 되고, 교육열이 뜨거운 학부모님들도 개념을 탄탄히 다져야 한다는 말을 자주 들으실 겁니다. 개념공부가 중요하다는 것은 이제 대부분의 학생과 학부모님이 알게 된 사실입니다. 개념공부는 수학공부의 첫 단계다보니 개념을 얼마나 철저히 익히는지에 따라서 수학실력의 완성도가 달라질 수 있습니다.

저는 수학 개념을 익히는 학생의 수준을 4단계로 분류하고 있습니다.

레벨1 교과서 내용을 제대로 이해하지도 않는다.

레벨2 교과서 내용은 잘 이해한 편이지만 공식의 유도나 증명은 잘 못하는 편이다. 목차를 보는 습관이 없다. 정확하게 개념을 익히지 않다보니 머릿속에 오개념이 은근히 많다.

레벨3 교과서의 전체적인 내용뿐만 아니라 공식의 유도나 원리를 잘 파악하고 있다. 목차를 통해서 개념간의 연관관계를 파악한다.

레벨4 바로 앞의 레벨3단계의 학습에 추가적으로 교과서 흐름에 담겨있는 세부적인 수학적 논리까지 잘 빨아드린다.

이 레벨대로 학생을 바라보면 굳이 성적을 물어보지 않아도 몇 점정도 학생인지, 수학공부센스가 어느 정도 되는지 거의 정확하게 맞힐 수 있죠. 4단계 레벨을 조금 추상적으로 설명했는데, 구체적인 이해를 돕기 위해 각 레벨을 차례대로 살펴보겠습니다.

여러분이 이차방정식을 공부하다보면 교과서에서 자연스럽게 다음 유도과정을 마주칠 것입니다.

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x) = -c$$

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} = -c$$

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

개념 공부하는 학생의 레벨을 4가지로 나누어보면 이 공식을 보는 관점이 각각 이렇게 다르다는 것입니다.

레벨1 몰라. 그냥 하기 싫다. 뭐가 이리 어렵지?

레벨2 음... 난 이런 유도과정이나 원리 귀찮아. 넘어가야지. 그냥 공식만 외워야겠다.

레벨3 근의 공식이 중요하다던데 유도과정은 익히고 넘어가야겠다.

레벨4 근의 공식이 중요하다던데 유도과정은 익히고 넘어가야겠다. 그리고 보니 교과서 한참 앞부분에서 이차방정식 근은 $x^2 = a$ 일 때 $x = \sqrt{a}, -\sqrt{a}$ 라고 정의했어. 이 유도과정도 이 정의와 같은 맥락으로 만들어진 식이구나. 그런데 첫 번째 줄에서 좌변을 완전제곱식으로 만들기 위해 $b^2 / 4a$ 를 추가했다가 다시 뺐네? 이 사고방식 유용한 거 같아. 앞으로 문제 풀 때 필요한 항이 있으면 이걸 추가했다가 다시 빼주면 그 식이 그대로 유지 되겠구나.

레벨1은 수학과 거리가 먼 학생들입니다. 특히 초중등부에서 이런 학생은 하위권 학생이라고 볼 수 있죠. 레벨2는 대부분의 평범한 학생입니다. 중하위권~중상위권학생들이 여기 속하고 상위권이상의 학생들 중에서도 적지 않은 인원이 레벨2에 속합니다. 레벨3의 학생은 대체적으로 15프로 내외의 학생이 속합니다.(레벨3의 학생은 대체적으로 성적이 좋습니다.) 레벨4는 숫자가 가장 적는데 퍼센트로 치자면 한 학년에서 1~2%정도 될 것 같습니다.

사실 레벨 3,4가 레벨 1,2에 비해 훨씬 올바른 개념공부법이지만, 대부분의 학생들은 레벨1, 2 방식대로 개념공부를 하고 있습니다. 수많은 자기주도학습 전문가들이 수학은 개념을 잘 다져야 한다고 입을 모아 강조하는 이유도 여기에 있습니다. 수학은 개념으로부터 비롯된 과목입니다.

개념 자체가 수학이고, 수학의 기초기가 개념인데, 대부분의 학생들은 이러한 개념을 무시하고 대충 학습하려고만 하지요.

참고로 레벨4방식을 따르는 학습이 입시에서는 가장 좋은 개념학습방법입니다. 이 레벨4 방식은 주로 최상위권 수험생들(특히 N수생)이 수능이나 논술시험을 공부하면서 시행착오를 겪으며 알아냅니다. 미국 대학의 연구결과라던가 교육학 이론으로부터 생기는 방식이 아닙니다. 그래서 레벨4는 언론이나 방송에서는 등장하지 않고 주로 SKY대학생들이 제작한 칼럼에서 종종 보입니다. 수험생 커뮤니티에서 수학을 잘하는 대학생들이 쓴 칼럼을 보면 ‘교과서 내용의 표면이 아닌 그 내면의 논리를 바라보아라.’라는 식의 알쏭달쏭한 이야기를 가끔 하거든요. 이런 발언도 레벨4를 다룬 것입니다.

개념을 탄탄하게 잡으면 여러 이점이 생깁니다. 특히, 확률, 통계, 기하, 도형 단원은 원리나 식의 유도과정만 정확히 알아도 수학적 시각이 꽤나 풍부해집니다.

이에 따라, 여러분이 수학 개념을 공부하는 단계에서 완료해야 할 것은 크게 다섯 가지가 있습니다.

1. 개념의 정의를 확실히 익힌다.
2. 개념이 등장하게 된 배경과 쓰임새를 익힌다.
3. 개념과 공식이 어떻게 생겨났는지 유도과정을 익힌다.
4. 개념과 개념사이의 유기적인 관계를 익힌다.
5. 교과서의 서술방식에 담겨있는 논리를 익힌다.

이 다섯 가지를 전부 마스터하면 앞에서 이야기한 레벨4의 경지에 다다르게 됩니다.

지금부터 여러분은 5번을 제외한 나머지 네 가지를 하나씩 차근차근히 볼 것입니다. 5번에 관한 이야기는 최상위권을 노리는 고등학생에게만 도움이 되는 이야기입니다. 따라서 5번은 ‘4장. 상위권학생이 최상위권으로 도약하기 위한 추가 훈련법’에 별도로 실어놓았습니다.

까지도 이야기할 수 있습니다. 이렇게 기출문제역사지도를 머릿속에 넣게 되면 문제를 보는 눈이 한층 더 풍부해질 것입니다. 시험장에서 문제를 풀 때 어떻게 풀어야 할지 효율적으로 설계가 가능합니다. 뿐만 아니라 문제를 풀다가 막히면 다시 차근차근히 고민을 할 때 기출문제의 역사지도는 도움을 많이 줄 것입니다.

두 번째 기출공부 원칙, 수능, 평가원 기출문제를 여러 번 반복해야 한다.

기출문제를 반복하라는 말은, 너무나도 식상하고 누구나 지겹게 이야기이지만 워낙에 중요한 사항이니 저도 여기서 한 번 더 강조하고 넘어가려고 합니다. 특히, 여러분이 수능/평가원 기출문제를 푸는 목적이 수능형 접근방식을 숙지하고 문제를 분석하는 것에 있다면, 반복이 필수입니다. 기출문제를 한 번씩만 풀어서는 수능형 접근방식이 체화되지 않으니까 지겹도록 반복해야 합니다.

세 번째 기출공부 원칙, 출제자의 의도를 분석하는 법을 익히자

기출문제를 제대로 분석하려면, 출제자의 의도를 분석하는 행위는 한 번쯤은 시도해 보는 것이 좋습니다. 실제로 입시전문가와 우등생들의 인터뷰자료를 봐도 ‘출제자의 의도를 분석하라’라는 말을 매우 많이 하고 있죠. 하지만 그들의 ‘출제자의 의도를 분석하라’라는 단골멘트는 평범한 학생에게 답답함을 남길 뿐입니다. 전문가들이 입을 모아 출제자의 의도를 분석하라는 말은 해줘도, 출제자의 의도를 어떻게 분석해야 하는지는 아무도 말을 안 해주기 때문입니다. 도대체 출제자의 의도는 무엇일까요? 그리고 출제자의 의도를 분석하는 방법은 무엇일까요??

사실 출제자의 의도를 분석하는 방법은 사람마다 조금씩 다를 수 있습니다. 실제로 서점에 있는 수능기출문제집 해설지를 보면, 똑같은 기출문제 여도 문제집마다 실어놓은 출제자의 의도가 조금씩 다릅니다. 사람마다 출제자의 의도를 분석하는 스타일이 조금씩 달라서 그렇습니다. 그래서 지금부터 제가 알려드리는 방식은 가장 보편적인 방식의 출제자의 의도 분석입니다. 우선 출제자의 의도를 파악할 때는 총 세 가지를 고려합니다.

1. 교과서의 학습목표-해당 문제가 교과서의 어떤 개념을 소재로 만들어진 문제인지 생각한 뒤, 교과서를 펴보세요(시중 기본서가 아니라 교과서!) 교과서에 적혀있는 학습목표 중 그 문제와 가장 어울리는 것을 찾아내면 됩니다.
2. 행동영역- 평가원은 계산능력, 이해능력, 추론능력, 문제해결능력 총 4가지를 수학적 능력에 ‘행동영역’이라는 명칭을 붙여서 여러분의 실력을 평가합니다. 계산능력과 이해능력은 말 그대로 계산을 할 수 있는지, 문제/개념에 대해 이해를 하고 있는지를 뜻하는 간단한 용어이며, 추론능력과 문제해결능력은 조금 복잡하지만 앞에서 자세히 설명했습니다. 이 4가지를 기준으로 분석하고 있는 문제가 어떤 능력을 요구하는지 생각해 보세요.
3. 다른 문제에서 똑같은 풀이방식이 쓰이지 않았는지- 기출문제는 변형에 변형을 거듭합니다. 이 변형은 보통 원형문제의 풀이방식을 그대로 따라가는 경향이 있습니다. 만약에 출제자가 미분연산을 활용하여 그래프 개형을 알아내 해결하는 어떤 문제를 바탕으로 똑같은 풀이방식이 쓰이는 새로운 문제를 만들었다고 가정해보세요. 이때, 출제자는

당연히 우리가 ‘미분과 기본연산을 활용하여 그래프 개형을 알아내어’ 문제를 풀기 원할 것입니다.

교과서의 학습목표, 행동영역, 다른 문제에서 똑같은 풀이방식이 쓰이진 않았는지를 고려하여 출제자가 우리에게 평가하고 싶은 것이 무엇인지 생각해 보세요. 동시에 각 문제를 풀어보면서, ‘이 문제의 출제자가 무슨 생각으로 이 문제를 냈을까?’, ‘어떤 주제를 이해하고 있는지를 묻고자 이 문제를 냈을까?’ 하고 고민을 해 보세요. 여러분이 조금만 신경 써서 찾아내면 출제자의 의도를 분석할 수 있습니다.

분석한 출제자의 의도를 공간도형/벡터 단원을 예를 들어 보여드리면 이런 느낌입니다.

정사영을 이용하여 수학 내적 문제 해결할 수 있는가
넓음 도형을 이용하여 정사영 문제를 해결할 수 있는가
정사영을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가
공간도형의 성질을 이해하고 적용할 수 있는가
정사영의 성질과 평면의 위치관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가
삼수선의 정리를 이용해 선분의 길이를 구할 수 있는가

사실 출제자의 의도를 알아낸다는 것 자체도 말이 안 될 수도 있습니다. 옆에 앉아 있는 친구가 어떤 생각을 하고 있는지도 알기 힘든데, 얼굴도 모르는 출제자가 어떤 의도로 문제를 냈는지 학생이 쉽게 알 수가 있을까

요? 단지 출제자의 의도를 분석하는 행위도 출제자의 의도를 정확하게 알아내다기보다는 일종의 추측을 하는 것뿐입니다.

그럼에도 불구하고 이렇게 출제자의 의도를 분석(정확히 말하면 추측)하는 학습 방식은 분명히 여러분에게 유용합니다. 출제자의 의도를 열심히 분석하고 눈에 익혀놓으면 기출문제 역사지도와 시너지를 일으킬 수 있습니다. 기출문제 역사지도를 더욱 풍부하게 만들어 주기도 하고, 문제를 보는 안목이 높아지는 것이죠.

네 번째 기출공부 원칙, 수능, 모의고사 문제에서 막히는 문제가 생기면 이렇게 대처하자

수능, 평가원 기출문제 중에 고난도 문제를 풀 때는 다수가 벽에 부딪히게 됩니다. 이것은 수학을 공부하는 사람이라면 누구나 겪는 일입니다. 수험생들은 이러한 상황 때문에 수학적 한계를 느끼면서 좌절을 하고 포기하기도 합니다. 하지만 이런 상황이야말로 수학적 탐구를 통해서 추론과 문제해결능력을 키울 수 있는 기회입니다.

여러분이 풀게 되는 대부분의 문제들은 사실 고도의 수학적 사고능력까지는 요구하지 않고, 기존에 풀었던 접근방식과 교과서로부터 끌어낸 접근, 과거 기출문제의 구조 등을 동원하여 머리를 잘 쥐어짜면 풀 수 있습니다. 하지만 일부 문제-모의고사 킬러문제, 신유형 수능문제- 등은 이를 벗어나기도 하고 수학적 사고를 잘 발휘해야 풀 수 있습니다. 이들이야말로 여러분의 수학적 탐구의 중요한 소재입니다. 이러한 고난도 문제들을 풀다보면 필연적으로 풀다가 중간에 막히는 부분이 생길 텐데, 이 벽에 부딪혔을 때 여러분이 해야 하는 행동을 알아봅시다.

“구체화를 하는 습관이 발견적 추론능력을 높여준다” 

최상위권을 노리면, 설계가 끝나고 진행하는 풀이는 설계대로 계속 진행을 하다가 중간에 구체화를 통해 중요 규칙을 찾는 대응방식도 중요하게 여겨야 합니다. 이러한 구체화를 다양하게 시도 하는 습관이 수학적 감각을 키우는데 크게 도움을 줄 것입니다. 구체화를 하는 방법은 예를 들어서 보여드릴 테니 반드시 연습하세요.

아래는 수학과 학생들이 많이 보는 유명한 문제입니다.

구체화 연습문제

회문(Palindrome)은 앞으로 읽으나 뒤로 읽으나 차이가 없는 단어들을 뜻한다. 예를 들어서 level, bob와 같은 단어들은 회문에 속한다. 이런 회문은 한국어에도 있다. 기러기도 회문이 된다. 때로는 숫자도 회문에 포함된다. 2565445652 같은 숫자도 앞으로 읽으나 뒤로 읽으나 차이가 없기 때문에 회문이다. 다음 명제의 참, 거짓을 판단해라.
'숫자 회문은 11로 나누어떨어진다.'

이 문제는 난이도가 높군요. 이렇게 막히거나 복잡한 상황을 마주치게 되면 겁먹지 말고 차근차근히 생각하세요. 일단 가장 먼저 할 것은 구체화입니다. 직접 회문을 구체적으로 나열해보는 것입니다. 그래서 제가 생각한 풀이의 사고방식은 아래처럼 됩니다.

〈사고방식〉

1661, 2002, 4554, 6116 등이 구체적인 회문 일 것이다. 위의 숫자를 11로 나누어보니 모두 나누어떨어진다. 이렇게 구체화를 해서 11로 나누어떨어지는지 확인을 해 보니 대충 맞는 것 같다. 그렇다고 여기서 끝내면 안 될 것 같다. 구체화가 의미가 없는 것 같다. 구체화의 진짜 목적은 ‘규칙’을 찾아내는 것이다. 회문 이라는 것을 1661, 2002, 4554, 6116 라는 수로 구체화 한 뒤, 11로 나눴을 때를 생각해보자. 저 4가지 숫자를 11로 나누는 행위를 하고 나서, 나머지 모든 회문도 11로 나누어떨어질 수 있는 패턴을 발견한다면 문제에서 주어진 명제의 참, 거짓을 알 수 있다. 그런데 아쉽게도 이 문제에서는 그런 일이 일어나지 않았다. 이렇게 무작위로 구체화를 시키는 방식이 문제의 내용을 파악하는데 도움은 될 수 있지만, 패턴을 찾으려 할 때는 쓸모없는 경우도 많다. 이럴 땐 체계적으로 구체화해야 한다. 1661, 2002, 4554, 6116 같이 아무 규칙성이 없는 구체화. 즉 체계적이지 못한 구체화보다는 규칙성이 있는 체계적인 구체화를 시도해 보는 게 사고력을 키우는데 중요한 축을 차지한다.

바로 체계적인 구체화를 시도해보자. 체계적인 구체화란, 말 그대로 체계가 있는 구체화이다. 예를 들면 회문의 숫자를 체계를 잡아 가장 작은 숫자부터 써보자.

1001, 1111, 1221, 1331.... 이렇게 된다.

이걸 11로 나누면 각각 91, 101, 111, 121이 된다. 이렇게 쓰고 보니 그런데 규칙이 보인다. 회문 숫자는 110씩 증가하고 나눈 몫은 10씩 증가한다. 그런데 저렇게 되는 원리를 잘 생각해보면.... 웬지 모르게 의심이 든다.

‘정말 그럴까? 여기까지가 모든 케이스를 다룬 건가??? 모든 회문 숫자

가 무조건 110씩 증가하진 않을 것 같기도 한데..'라는 생각이 든다. 이 때 회문 숫자가 110씩 증가하는 과정을 잘 생각해보면 이런 상황이 보인다. 1991→2002로 넘어갈 때 숫자가 11이 증가했고 2002→2112→2222로 회문이 증가 할 때는 110이 증가한다. 아! 그러니까 회문에서 맨 앞자리 숫자가 증가할 때만 11이 증가하는구나. 드디어 규칙을 찾았다. 즉, 두 수의 차이인 110과 11은 11로 나누어떨어지고, 가장 작은 네 자리의 회문 숫자 1001은 11로 나누어떨어지므로 모든 회문 숫자는 11로 나누어떨어진다. '숫자 회문은 11로 나누어떨어진다.' 라는 명제는 결국 참이다.

제가 실어놓은 풀이에서 보이듯이, 구체화를 하는 이유는 바로 '핵심 규칙 찾기'입니다. 예를 들면 위에서 풀어본 회문 문제에서는 회문의 크기가 작은 수부터 110또는 11씩 증가한다는 것입니다. 이 규칙을 파악하면 많은 상황의 문제의 답을 구할 수 있습니다. 또한, 회문 문제를 통해 확인했듯이 1661, 2002, 4554, 6116처럼 중구난방으로 구체화하기 보다는 1001, 1111, 1221, 1331처럼 체계적으로 구체화를 시도하면 규칙을 보다 쉽게 파악할 수 있습니다.

체계적인 구체화를 이용한 풀이는 정말 많은 수학문제에 적용이 됩니다. 특히 문제가 고난도일수록 더더욱 그렇습니다. 여기서 주목해야 할 점은, 체계적인 구체화라고 명명한 이 풀이방법은 결코 저만의 팁이나 비결은 아니라는 것입니다. 구체화는 교육과정 평가원에서 발행한 학습방법안내 문서에서 다루는 추론과 똑같은 맥락의 풀이방법입니다. 평가원에서 밝힌 행동영역에는 '나열하기 세어보기 관찰 등을 통해 문제해결의

핵심 원리를 발견하는 능력'이라는 말이 나와 있습니다. 이 사고방식과 일맥상통 하는 것이 구체화입니다. 따라서 문제를 설계한 대로 풀면서, 중간 중간에 구체화 하면서 돌파구를 찾는 행위는 추론능력을 키우기 위한 몇 안 되는 뚜렷한 방법 중 하나입니다.

지금까지 이야기한 나열하기 세어보기 관찰 등을 통해 문제해결의 핵심 원리를 발견하는 능력을 이 책의 한참 앞에서 발견적 추론이라고 정의했던 것도 기억날 것입니다. 발견적 추론이 중요한 수학단원 중 대표적으로 수열이라고 많이 알려져 있습니다. 실제로는 수열뿐만 아니라 위의 회문 문제에서 보듯이 모든 문제 풀이의 아이디어를 떠올리는데 알게 모르게 영향을 주는 것이 발견적 추론입니다.

참고) '회문은 11로 나누어떨어진다.' 라는 명제의 참, 거짓을 판단하라는 형태였죠? 즉, 이 문제는 명제의 참, 거짓을 판단하는 연역적 추론능력을 요구하는 문제입니다. (한참 앞에서 추론과 문제해결능력은 설명했던 내용을 잘 기억할 것이라 믿습니다.) 하지만 우리는 이 연역적 추론문제의 풀이를 발견적 추론으로 접근한 것입니다. 이렇게 연역적 추론을 요구하는 문제도 발견적 추론을 통해 문제를 풀 수도 있습니다. 연역적 추론과 발견적 추론은 완전히 분리된 사고가 아니라 상보적인 관계가 되는 것이죠.