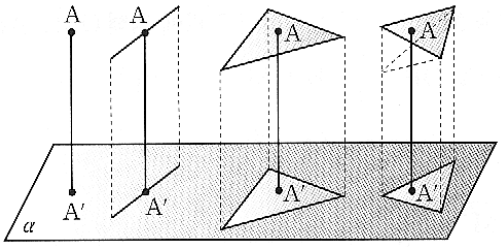
개념 5. 정사영

01 정사영

공간도형 F의 각 점에서 평면α 에 내린 수선의 발이 그리는 평면도형 F'을 도형 F의 평면α 위로의 정사영이라 한다. 이 때, 평면α 를 투영면이라고 한다.

참고 :



두 평면 α와 β가 수직이 아닐 때, 평면 β위에 있는 점, 직선, 삼각형의 평면 α위로이 정사영은 각각 점, 직선, 삼각형이 된다.

02 정사영의 길이와 넓이

(1) 평면α 와 이루는 예각이θ 인 선분 AB의 평면α 위로의 정사영을 선분 $A'B'$이라 하면

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$$

(2) 두 평면α , β 가 이루는 예각이θ 일 때, 평면α 위에 있고, 넓이가 인 도형S인 도형F의 평면 β 위로의 정사영F'의 넓이S'은

$$S' = S\cos\theta$$

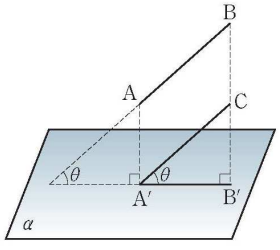
해설 : (1) 선분의 길이와 그 선분의 정사영의 길이 사이의 관계에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $\mathrm{A'B'}$이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

이때 $\overline{\mathrm{AA'}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{BB'}} \perp \alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AA'}} /\!/ \overline{\mathrm{BB'}}$이다.

또 점 $\mathrm{A'}$을 지나고 직선 AB와 평행한 직선을 그어 $\overline{\mathrm{BB'}}$과 만나는 점을 C라고 하면 사각형 $\mathrm{AA'CB}$는 평행사변형이다.

따라서 $\overline{\mathrm{A'C}} = \overline{\mathrm{AB}}$이므로 $\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{A'C}}\cos\theta = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$
가 성립한다.



*** 문제에 적용시키는 메커니즘**

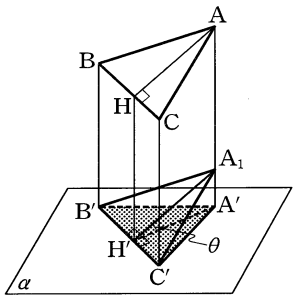
① 직선 또는 평면의 평행이동

② 교점잡기 **③ 수선의 발 내리기**

④ 직각삼각형 잡기 : 정사영 길이 구하기

해설 : (2) 평면α 와 예각 θ 로 만나는 평면 위에 있는 △ABC 의 넓이를 S라 하고, 이 삼각형의 α 위로의 정사영인△A′B′C′의 넓이를 S′이라고 하면 $S' = S\cos\theta$ 임을 증명해보자.

(ⅰ) 변 BC가 평면 α 에 평행한 경우(다른 한 변이 평행한 경우도 같다.)
변$B'C'$을 지나 평면 ABC에 평행한 평면과 직선 AA'의 교점을 A_1 이라고 하면 $\triangle A_1B'C' \equiv \triangle ABC$
점A_1에서 변 $B'C'$에 내린 수선을 A_1H'이라고 하면



삼수선의 정리에 의하여 $\overline{A'H'} \perp \overline{B'C'}$

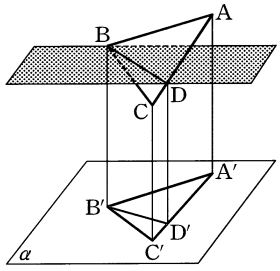
$$\therefore S' = \frac{1}{2}\overline{B'C'} \cdot \overline{A'H'}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{B'C'} \cdot \overline{A_1H'}\cos\theta = S\cos\theta$$

곧, $S' = S\cos\theta$

(ⅱ) 평면 α 에 평행한 변이 없는 경우
꼭짓점 A, B, C 에서 각각 α 에 그은 수선 AA', BB', CC' 의 길이는 어느 두 개도 같지 않다. 꼭짓점 B를 지나 α 에 평행한 평면이 직선AC와 만나는 점을 D라 하고, D의 정사영을 D'이라고 하면 ⅰ)로부터

$$\triangle A'B'D' = \triangle ABD\cos\theta$$
$$\triangle B'C'D' = \triangle BCD\cos\theta$$



점D가 변 AC 위에 있으면

$$S' = \triangle A'B'C' = \triangle A'B'D' + \triangle B'C'D'$$
$$= \triangle ABD\cos\theta + \triangle BCD\cos\theta$$
$$= (\triangle ABD + \triangle BCD)\cos\theta = \triangle ABC\cos\theta = S\cos\theta$$

곧 $S' = S\cos\theta$

점 D가 변 AC 의 연장선 위에 있을 때도 같은 방법으로 증명할 수 있다.

*** 위 증명과정을 반드시 숙지해 두어야 한다. 정사영 문제를 해결하는 메커니즘이 바로 위 증명과정이기 때문이다.**

보기 선분l 과 평면α 가 이루는 예각이θ 이고,l 의α 위로의 정사영을 선분l'이라 할 때, 다음을 구하여라.

(1 $l = 20$, $\theta = 30^\circ$일 때, 선분l'의 길이

(2)$l' = \sqrt{3}$, $\theta = 45^\circ$일 때, 선분l 의 길이

(3 $l = 6$, $l' = 3\sqrt{3}$일 때, 각θ 의 크기

풀이

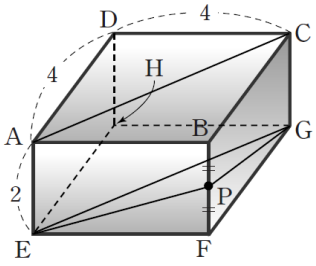
(1) $l' = 20\cos 30^\circ = 10\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{3} = l\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}l$ $\quad\therefore\ l = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

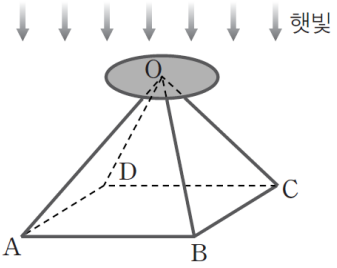
(3) $\cos\theta = \frac{l'}{l} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore\ \theta = 30^\circ$

예제

그림과 같이 $\overline{AD}=\overline{DC}=4$, $\overline{AE}=2$인 직육면체 ABCD－EFGH가 있다. 선분 BF의 중점을 P라 하자. 삼각형 PGE의 평면 AEGC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하여라.[1)]



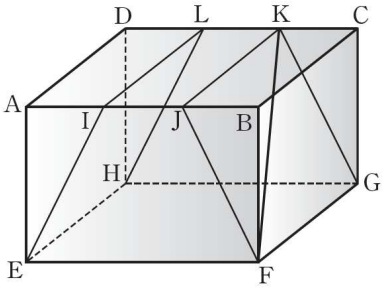
◎ 유제 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 정사각뿔 O－ABCD와 중심이 점 O이고 반지름의 길이가 1인 원판이 평면 ABCD와 평행하게 놓여 있다. 평면 ABCD에 수직인 방향으로 햇빛이 비출 때, 정사각뿔의 4개의 옆면에 생기는 이 원판의 그림자의 넓이의 합은?[2)]



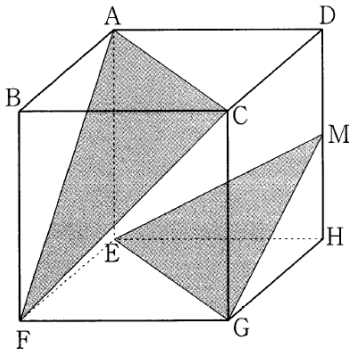
① $\sqrt{2}\pi$ ② $\sqrt{3}\pi$ ③ 2π ④ $\sqrt{5}\pi$ ⑤ $\sqrt{6}\pi$

예제 **평면의 평행이동**

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=\overline{AE}=2$ 인 직육면체 ABCD－EFGH 에서 선분 AB 와 선분 CD 의 삼등분점을 각각 I, J, K, L 이라 하자. 선분 FK 의 평면 EILH 위로의 정사영의 길이를 l이라 할 때, $25l^2$의 값을 구하시오. [3]



◎ 유제 [4]그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육면체 ABCD－EFGH에대하여 모서리 DH의 중점을 M이라 하자. 삼각형 EGM의 세 점 A, F, C를 포함하는 평면 위로의 정사영의 넓이가 S일 때, $12S^2$의 값을 구하시오. [4점]

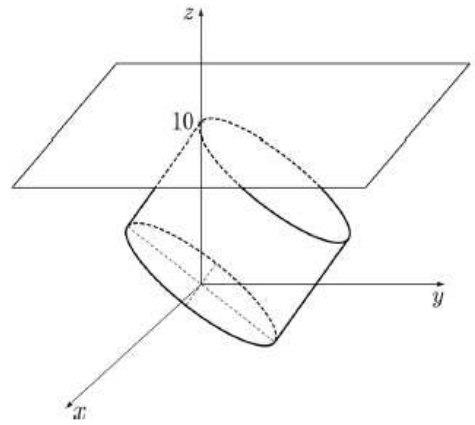


1. 좌표공간에 있는 원기둥이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 높이는 8이다.
> (나) 한 밑면의 중심은 원점이고 다른 밑면은 평면 $z=10$과 오직 한 점 $(0,0,10)$에서 만난다.

이 원기둥의 한 밑면의 평면 $z=10$위로의 정사영의 넓이는?[5)]

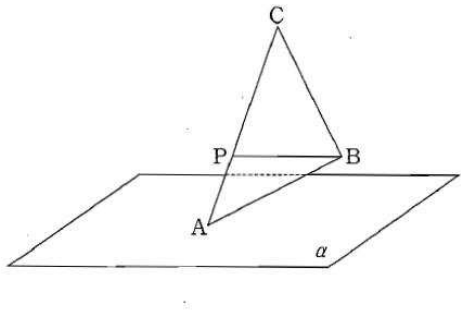
[4점] [2013학년도 9월 평가원]



① $\frac{139}{5}\pi$ ② $\frac{144}{5}\pi$ ③ $\frac{149}{5}\pi$ ④ $\frac{154}{5}\pi$ ⑤ $\frac{159}{5}\pi$

2. 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고 α로부터의 거리가 각각 $1, 3$인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{BP}=4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. [6]

[4점] [2012학년도 9월 평가원]

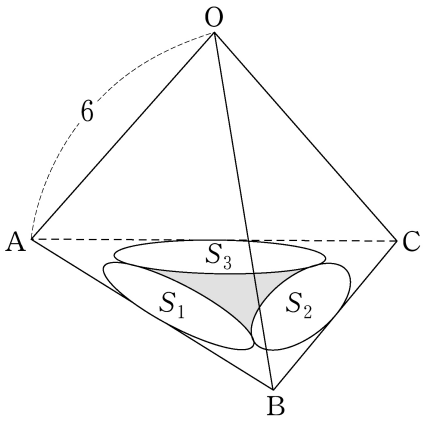


3. 좌표공간에서 x축을 포함하고 xy평면과 이루는 각의 크기가$\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 평면을 α라 하자. 평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 만나서 생기는 도형의 xy평면위로의 정사영이 영역 $\{(x, y, 0)|x+3y-2\leq 0\}$에 포함되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 최댓값을 M이라 하자. $60M^2$의값을 구하시오. [7]

[4점] [2010학년도 수능기출]

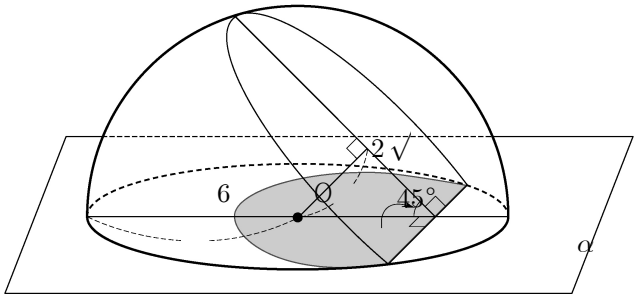
4. 한 변의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 세 삼각형 △OAB, △OBC, △OCA에 각각 내접하는 세 원의 평면ABC 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. 그림과 같이 세 도형 S_1, S_2, S_3으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 할 때, $(S+\pi)^2$의 값을 구하시오.[8]

[4점] [2008학년도 수능기출]



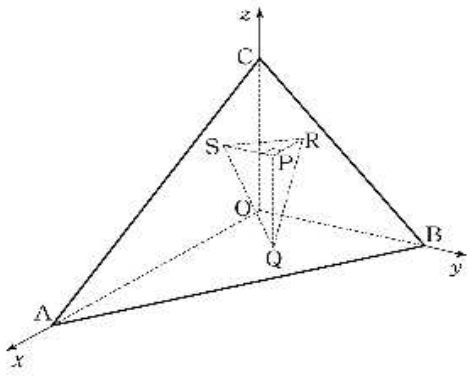
5. [9]반지름의 길이가 6인 반구가 평면 α 위에 놓여 있다. 반구와 평면 α가 만나서 생기는 원의 중심을 O라 하자. 그림과 같이 중심 O로부터 거리가 $2\sqrt{3}$ 이고 평면 α와 $45°$의 각을 이루는 평면으로 반구를 자를 때, 반구에 나타나는 단면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{2}(a+b\pi)$이다.
$a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.)

[4점] [2008학년도 9월 평가원]



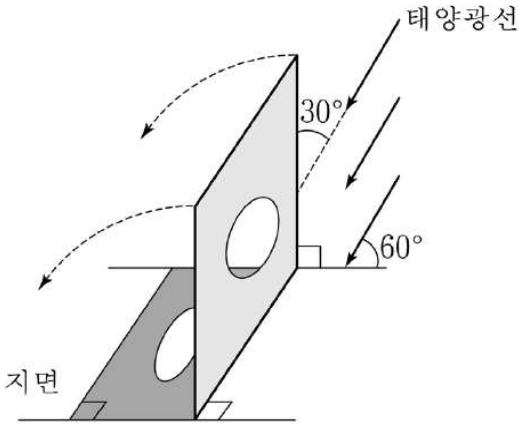
6. [10]좌표공간에서 평면 $x+2y+2z=54$ 위의 세 점 $A(54,0,0)$, $B(0,27,0)$, $C(0,0,27)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 내부에 점 $P(x, y, z)$가 있다. 점 P의 xy평면 위로의 정사영을 Q, yz 평면 위로의 정사영을 R, zx평면 위로의 정사영 을 S라 하자. $\overline{QR}=\overline{QS}$일 때, 사면체 QPRS의 부피의 최대값을 구하시오.

[4점] [2007학년도 수능기출]



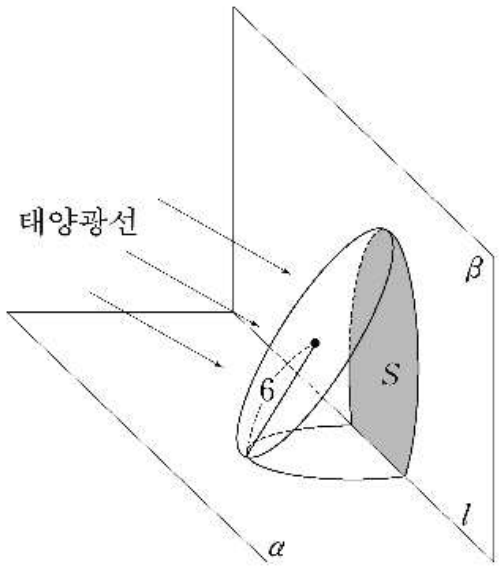
7. 그림과 같이 태양광선이 지면과 $60°$의 각을 이루면서 비추고 있다. 한 변의 길이가 4인 정사각형의 중앙에 반지름의 길이가 1인 원 모양의 구멍이 뚫려 있는 판이 있다. 이 판은 지면과 수직으로 서 있고 태양광선과 $30°$의 각을 이루고 있다. 판의 밑변을 지면에 고정하고 판을 그림자 쪽으로 기울일 때 생기는 그림자의 최대 넓이를 S라 하자. S의 값을 $\frac{\sqrt{3}(a+b\pi)}{3}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이고 판의 두께는 무시한다.)[11]

[4점] [2009학년도 9월 평가원]



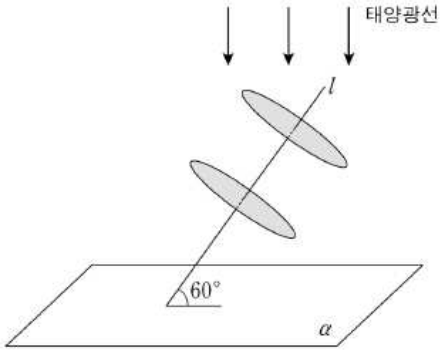
8. 서로 수직인 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 반지름의 길이가 6인 원판이 두 평면 α, β와 각각 한 점에서 만나고 교선 l에 평행하게 놓여 있다. 태양광선이 평면 α와 $30°$의 각을 이루면서 원판의 면에 수직으로 비출 때, 그림과 같이 평면 β에 나타나는 원판의 그림자의 넓이를 S라 하자. S의 값을 $a+b\sqrt{3}\pi$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이고 원판의 두께는 무시한다.) [12)]

[4점] [2007학년도 9월 평가원]



9. 그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 60°이다. 태양 광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 원판의 두께는 무시한다.)[13]

[4점] [2011학년도 수능기출]

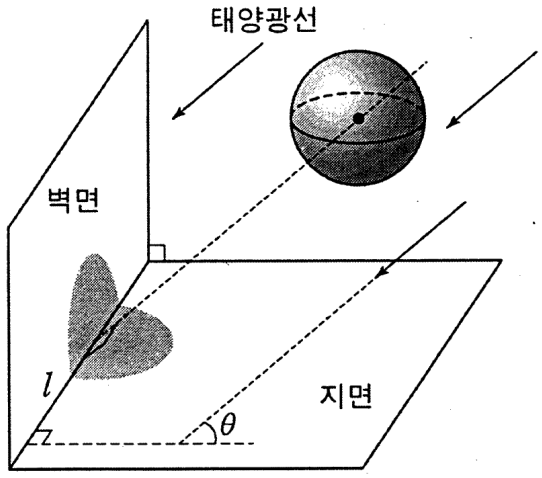


① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{8}$ ② $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{1}{8}$

④ $\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$

10. 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다. 벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 a라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 b라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[14)]

[4점] [2010학년도 9월 평가원]



[보 기]

ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다.

ㄴ. $\theta = 60°$이면 $a < b$이다.

ㄷ. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

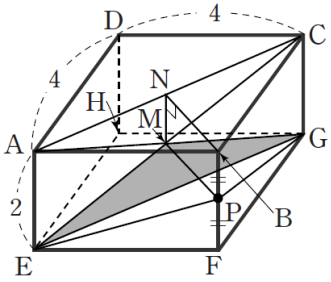
1) 정답 : 8

직사각형 AEGC 의 두 대각선의 교점을 M 이라 하고, 선분 AC 의 중점을 N 이라 하면 $\overline{AE} /\!/ \overline{BP}$, $\overline{AE} /\!/ \overline{NM}$ 이므로 $\overline{BP} /\!/ \overline{NM}$

이때, $\overline{BP}=\overline{NM}=\frac{1}{2}\times\overline{AE}=1$ 이므로 $\overline{BN} /\!/ \overline{PM}$ …… ㉠

(평면 ABCD) $\perp \overline{AE}$ 이므로 $\overline{BN} \perp \overline{AE}$ 이고, 정사각형 ABCD 에서 $\overline{BN} \perp \overline{AC}$ 이므로

$\overline{BN} \perp$ (평면 AEGC) …… ㉡



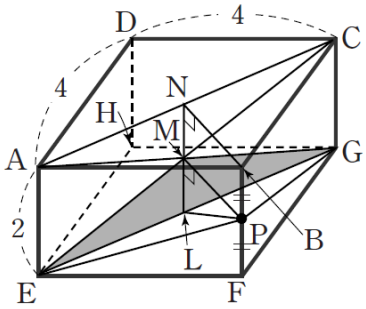
㉠, ㉡ 에서 $\overline{PM} \perp$ (평면 AEGC)

따라서 삼각형 PEG 의 평면 AEGC 위로의 정사영은 삼각형 MEG 이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이는 S는 $S=\triangle MEG=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 1=2\sqrt{2}$

$\therefore\ S^2=(2\sqrt{2})^2=8$

(다른풀이)



선분 EG 의 중점을 L 이라 하면 $\overline{LM} \perp \overline{EG}$, $\overline{LP} \perp \overline{EG}$ 이므로 평면 PGE 와 평면 AEGC 가 이루는 각의 크기는 $\angle PLM$ 의 크기와 같다.

위의 풀이에서 $\overline{LM}=\overline{MN}=1$, $\overline{PM}=\overline{BN}=\frac{1}{2}\times\overline{BD}=2\sqrt{2}$ 이고 $\overline{PM} \perp \overline{LM}$ 이므로

$\overline{PL}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

$\cos(\angle PLM)=\frac{\overline{LM}}{\overline{PL}}=\frac{1}{3}$

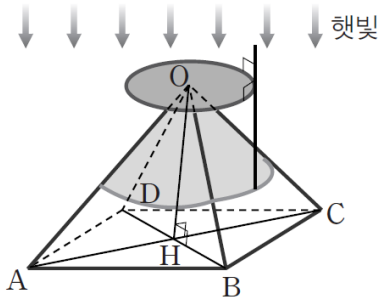
이때, $\triangle PGE=\frac{1}{2}\times\overline{EG}\times\overline{PL}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 3=6\sqrt{2}$ 이므로

구하는 정사영의 넓이 S 는

$S=\triangle PGE\times\cos(\angle PLM)=6\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ S^2=8$

2) 정답 : ②



주어진 정사각뿔의 밑면과 네 옆면이 이루는 각은 모두 같다.

점 O 에서 밑면에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형 OBC 의 평면 ABCD 위로의

정사영은 삼각형 HBC 이다. 이때, 삼각형 OBC 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4^2\times\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$

이고, 삼각형 HBC 의 넓이는 $\frac{1}{4}\times 4^2=4$ 이므로 평면 OBC 와 평면 ABCD 가

이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\cos\theta=\frac{\triangle HBC}{\triangle OBC}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

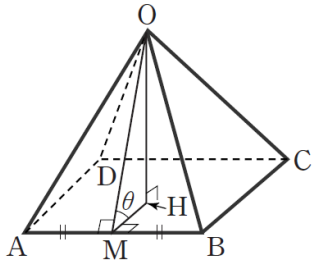
한편, 원판은 평면 ABCD 와 평행하므로 원판을 포함하는 평면 α 와 네 옆면이 이루는

예각의 크기는 모두 θ 이다. 이때, 햇빛이 원판에 수직인 방향으로 비추므로 정사각뿔의 옆면에 생긴 그림자의 평면 α 위로의

정사영은 원판과 같아진다. 따라서 원판의 넓이는 $\pi\times 1^2=\pi$ 이고 구하는 그림자의 넓이의 합을 S 라 하면

$S\times\cos\theta=\pi$ 이므로 $S=\frac{\pi}{\cos\theta}=\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}\pi$

(다른풀이)



정사각뿔의 네 옆면에 나타나는 원판의 그림자의 넓이는 모두 같다.

면 OAB 에 나타나는 그림자의 넓이를 S' 이라 하자.

평면 OAB 와 원판이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 θ 는 평면 OAB 와 평면 ABCD 가 이루는 각의 크기와 같다.

따라서 정사각뿔의 꼭짓점 O 에서 밑면에 내린 수선의 발을 H , 선분 AB 의 중점을 M 이라 하면 $\theta=\angle OMH$ 이다.

이때, $\overline{HM}=2$, $\overline{OM}=2\sqrt{3}$ 이고, 삼각형 OHM 은 직각삼각형이므로 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

한편, 면 OAB 에 그림자가 나타나도록 하는 원판의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 면 OAB 에 있는

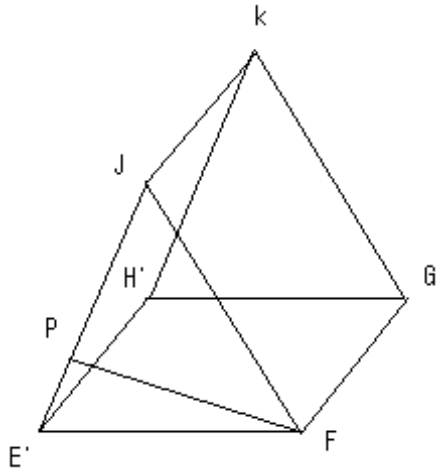
그림자의 원판 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

따라서 $S' \times \cos\theta = S' \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $S' = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

그러므로 구하는 그림자의 넓이의 합은 $4S' = \sqrt{3}\,\pi$

3) 정답 : 145

선분 IL이 선분 KJ와 일치하도록 평면 $EILH$를 평행이동시키면 다음 그림과 같다.



점 F에서 $\overline{JE'}$에 내린 수선의 발을 점 P라고 하면,

선분 FK를 평면 $EILH$위로 정사영 시킨 선분이 선분 PK이다.

$\overline{JF} = \overline{JE'} = \sqrt{5}$, $\overline{E'F} = 2$이므로 $\triangle JE'F$의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \overline{FP}$

$\overline{FP} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$이므로 $\overline{JP}^2 = \overline{JF^2} - \overline{PF^2} = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$

$\therefore \overline{PK^2} = \overline{JK^2} + \overline{JP}^2 = 2^2 + \frac{9}{5} = \frac{29}{5}$ 이므로 $25l^2 = 145$

4) 정답 : **64**

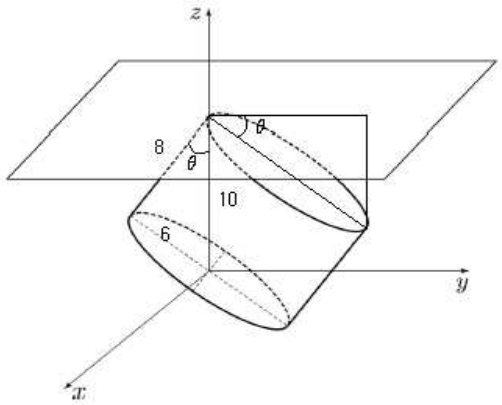
면 ACF와 면 DEG는 평행하므로 문제는 면 ACF를 면 DEG로 바꾸어 생각하면 된다.

꼭짓점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 DIM에서 제2코사인법칙에 의하여

$\cos\angle \mathrm{DIM} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

따라서 $\mathrm{S} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$이고 $12\mathrm{S}^2 = 64$이다.

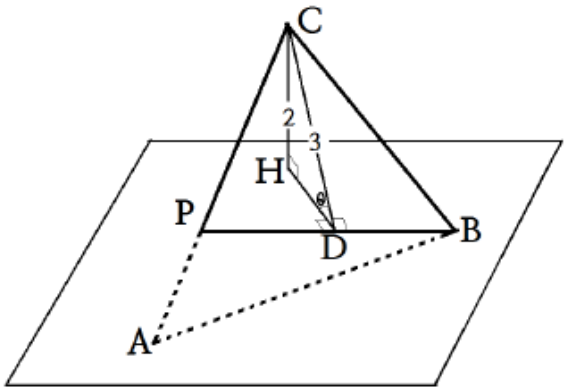
5) 정답 : ②



원기둥의 한 밑면과 평면 $z=10$이 이루는 각을 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\pi \cdot 6^2\times\frac{4}{5}=\frac{144}{5}\pi$

6) [정답] : 45



점 C에서 평면 α까지의 거리가 3이고, 점 P가 선분 AC를 $1:2$로 내분하므로 점 P에서 평면 α까지의 거리는 1이다. 따라서 $\overline{PB}$는 평면 α와 평행하다.

평면 α를 선분 PB를 지나도록 평행이동 시킨 평면을 평면 β,
점 H = 점 C에서 평면 β에 내린 수선의 발
점 D = 점 C에서 선분 PB에 내린 수선의 발이라고 하면,
$\overline{CD}\perp\overline{PB}$, $\overline{CH}\perp$평면 β 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CH}\perp\overline{HD}$이다.

$CH=2$, $BP=4$, $\triangle ABC=9$ 이므로 $\triangle CPB=9\times\frac{2}{3}=6$

한편, $\triangle CPB=\frac{1}{2}\overline{BP}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\overline{CD}=6$이므로 $\overline{CD}=3$

$\therefore \overline{CH}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ 이므로 $\cos\angle CDH=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore S=9\times\frac{\sqrt{5}}{3}=3\sqrt{5}$ 이므로 $S^2=9\times 5=45$