지은이의 말

“수학은 정직하게 공부하는 자만이 결국 승리를 쟁취하는 과목입니다.”
이 책의 모토입니다. 논리적인 단어인 ‘수학’과 감정적인 단어인 ‘정직’이 서로 어울리지 않는 조합으로 느껴지나요? 속세에는 수학 문제를 풀기 위한 온갖 편법들이 난무합니다. 편법을 쓰면 생각을 덜 하고도 문제가 쉽게 풀리고, 수학에 진절머리가 난 학생들에게는 이런 편법이 마법과도 같이 다가옵니다. 그러나 수학은 생각 하는 학문입니다. 수학을 정복하기 위해서는 결국에는 정직하게 공부해야만 합니다.

수학을 정직하게 공부한다는 것은 무슨 뜻일까요? 바로 모든 문제를 1논리적으로 2교과과정 내의 지식으로 푸는 것입니다. 정직하게 공부한다는 것은 가장 정통한 방법으로 공부하는 것입니다.
정말 어렵습니다. 이렇게 공부를 하는 동안 ‘이 방향이 맞나..’ 라는 의구심이 계속 들 것이고, 풀이를 보면 ‘내가 시험장에서 이렇게 까지 할 수 있을까?’ 란 생각을 계속 하게 될 겁니다. 실제로 수험생 중에 수학을 제대로 공부하려는 학생들은 2%도 되지 않습니다. 그리고 그 2%의 학생 중 끝까지 열심히 한 학생들이 상위 1%안에 들어 수학에서 100점 을 받죠.

수학을 어렵게 공부해서 얻는 것이 무엇일까요? 수학은 어렵게 수련하여 마침내 단련된 여러분을 배신하지 않습니다. 여러분은 시험이 쉽든 어렵든 언제나 안정적으로 1등급을 쟁취할 수 있는 실력을 갖추게 됩니다. 이것이 모든 수험생들이 원하는 바가 아닐까요? 수능까지의 기간은 긴 것 같으면서도, 막상 실력이 올랐나 싶을 때면 시험은 어느새 목전에 닥쳐있습니다. 그렇기에 수능에서는 선택과 집중을 제대로 한 사람만이 마지막에 빛을 볼 수 있습니다.

저희는 이 책이 기존의 어느 책보다도 진보적인 명작이라고 감히 자부합니다.
한국교육과정평가원에서 나온 수능 출제 매뉴얼, 수능 학습 방법 안내서 및 수능과 관련된 모든 논문 자료, 교사용 지도서, 교육과정 해설서 와 7종의 교과서를 모두 비교 분석하여 책을 집필한 경우는 ‘수학의 명작’ 시리즈가 유일한 것 같습니다. 1994년도부터 출제된 모든 평가원 기출문제들을 철저히 분석하여 다각도에서 풀이를 개발하며, 그 중 가장 필연적인 풀이를 본서를 통해 여러분에게 선사 해드리려 합니다.

하지만 아무리 이 책이 전국에서 가장 좋은 책이라 한들, 여러분이 열심히 함께 해주지 못한다면 반쪽짜리 명작에 불과합니다. 이제 여러분이 따라줄 일만 남았습니다. 여러분의 가슴 속 뜨거운 열정을 진심으로 응원합니다.

누구를 위한 책인가?

이 책은 수능 수학영역에서 만점을 받기 원하는 모두를 위한 책입니다. 여러분의 끈기와 노력만 있다면 이 책을 통해 누구나 수학영역 만점을 받을 수 있습니다. 가능합니다.

하지만 이 책의 권장 학습 대상은 존재합니다. 이 책은 개념 학습을 적어도 한 번은 하고 온 학생들을 독자로 가정합니다. 개념 학습을 제대로 하지 않았다면 교과서를 최소 한번은 보고 와야 합니다. 평소에 모의고사에서 3등급 이상을 받았다면 괜찮지 않을까 합니다.

그럼 본인은 4등급 이하인데 책을 볼 수 없을까요? 볼 수 있습니다. 하지만 고난의 길을 걸을 준비는 하고 와야겠습니다. 책을 보는 속도도 현저하게 떨어질 것이고 중간에 책을 집어 던지고 싶을 수도 있습니다. '내가 이 문제를 굳이 이렇게까지 풀어야 되나' 하는 부분도 남들보다 더욱 많을 것이고, 한 번 봐서는 이해되지 않는 부분이 대부분일 수도 있습니다.

그럼 본인이 1등급이라고 해서 얻어갈 것이 없는 책인가? 절대 그렇지 않습니다. 여러분은 지금까지 잘못된 방법으로 공부를 했을 확률이 매우 높습니다. 아마 Stage 0 만 읽어보아도 많은 분들이 그동안 얼마나 잘못 된 방법으로 공부를 해왔는지 느낄 겁니다. 책을 계속 보다 보면 지금까지 여러분이 알던 것은 빙산의 일각이었다는 것을 알게 될 것입니다.
여러분의 목표는 1등급이 아니라 안정적인 100점을 맞는 것입니다. 수능이 어떻게 나와도 안정적인 점수를 받기 위한 비법은 간단합니다. 아주 정직하고 끈기 있게 공부하는 것, 그 뿐입니다.
본인이 수학실력이 조금 된다고 해서 건성으로 책을 볼 거면 차라리 빨리 책을 덮는 것을 추천합니다. 그럴 바에는 본인이 좋다고 생각 하는 원래의 공부 방법으로 밀고 나가세요. 그것이 성적 향상에 도움이 더 될 테니까요.

여러분의 현재 등급대가 어찌됐던 겸손한 자세로 책의 모든 부분을 곱씹을 만큼 열심히 본다면 여러분은 남부럽지 않은 수학실력을 가지게 될 것입니다. 다시 한 번 강조를 하지만 수학영역은 뜨거운 열정과 많은 노력을 요구합니다. 그리고 본인이 얻게 되는 보상은 결국 노력을 저버리지 않을 것임을 명심하세요.

이 책이 "명작(名作)" 인 이유

1. 내용 서술이 어느 책보다도 자세합니다.

학생의 공부 편의를 위하여 시중에서 여러 권의 교과서를 구해 비교 · 분석했습니다. 수능에서 강조되는 단원, 학생들이 어려워하는 단원은 특히 더욱 자세히 서술하였고, 수능에 나오지 않는 부분들은 과감히 축소시켰습니다. 또한 가독성을 높이기 위해 개념서나 참고서의 양식에서 탈피해 마치 책을 읽는 듯한 느낌을 주었습니다. 그동안 많은 학생들은 관찰하며 학생들이 어떤 부분을 어려워하는지 분석했습니다. 문제를 해결하는 알고리즘이 책 곳곳에 숨어 있으며, 학생들이 어려워하거나 헷갈려 하는 부분, 많이 실수하는 부분은 반복적으로 표기하여 강조했습니다.

2. 단원을 Topic으로 나누었습니다.

책의 구성단위가 'Topic(토픽)'으로 되어있습니다. 수능에는 문제들이 패턴화되어 출제됩니다.
따라서 교과서의 단원을 그대로 따르는 것보다 수능 문제가 출제되는 방향에 맞추어 공부하는 것이 올바른 방법입니다. 자주 출제되는 영역이나 중요한 이론을 묶어 하나의 토픽으로 분류하였고, 각 토픽별로 문제를 푸는 알고리즘과 논리의 흐름을 습득하도록 합니다.

3. 기출문제와 개념을 유기적으로 연결시켜주는 최초의 책입니다.

'배운 개념을 사용해서 문제를 풀어라.' 많이들 들어보셨지만, 막상 배운 개념을 문제에 곧바로 적용해 보라고 하면 난감한게 현실입니다. 이러한 개념과 문제 사이의 괴리감을 해결하기 위해 이 책에는 평가원 기출문제를 대부분의 예제(EXAMPLE)로 활용하였고, 그 토픽에서 배운 내용들로 문제를 분석하였습니다. 각 토픽 마지막에는 토픽에서 배운 내용을 직접 적용해볼 수 있는 VIP 문항을 수록하였습니다.

4. 기출문제뿐만이 아닙니다.

기출문제를 완벽하게 분석한 이들을 위해, 수능 100점을 넘어선 실력을 갖추고 싶은 이들을 위해 고난도 자작문제를 책 곳곳에 심었습니다. 또한 Stage 02에는 여러분의 상상을 초월할 최고난도 문제들이 실려 있습니다. 이 중 수능 21, 30번에 버금가는 문제, 혹은 그 이상의 난도를 자랑하는 문제 또한 많습니다. Stage 01에서 연습한 내용을 완벽하게 소화시켜줄 문제들이 여러분들을 기다리고 있습니다.

책의 구성과 학습방법

미적분I은 총 3개의 Stage(0~2) 와 14개의 Topic으로 구성되어있습니다.
Stage 00은 수학공부의 갈피를 잡아주는 부분입니다. 본격적인 내용은 Stage 01부터 시작하며, Stage 01은 본문과 VIP문제로 구성됩니다. 본문에는 개념설명과 EXAMPLE 문제가 있습니다.

1. Stage 1 – 본문

– **개념설명** : 교과서에 있는 모든 내용을 수능의 형태에 알맞게 재구성 하였습니다. 서술의 논리적 흐름을 강조하였으며, 이해하기 쉽도록 서술하였습니다. 한 개념을 설명한 다음에는 개념 이해를 위한 예제(EXAMPLE)를 넣었고, 곳곳에 내용을 압축하여 보여주는 정의, 정리, 알고리즘과 같은 박스를 실었습니다.

– **EXAMPLE 문제** : 교과서 예제, 평가원 기출문제가 주를 이룹니다. 난이도는 문제마다 다르며, 개념 설명과 유기적으로 연결되어 있습니다. 개념을 충분히 숙지하려면 모든 예제 문제를 완벽하게 풀 수 있을 때까지 반복하여 연습해야 합니다.

– **EXAMPLE 분석** : 배운 개념이 실제로 문제 속에 어떻게 적용되었는지 유기적으로 보여줍니다. 일반 해설보다는 훨씬 자세하며 개념 설명과 연결되어 있다고 생각해도 무방합니다. 처음 문제를 봤을 때 자신이 구사한 풀이와 비교해 봅시다.
또한, 단순한 해설이 아니고 본문 내용이니 문제를 풀었다고 하더라도 반드시 보고 넘어가야 합니다.

이제 본문에 등장하는 박스 속 용어를 알아봅시다.

– **정의** : 어떤 개념이나 용어의 뜻을 명확하게 정한 문장. 수학의 가장 밑바닥이다.

– **성질** : 정의나 정리로부터 파생되는 대상의 특징

– **정리** : 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 앞으로 여러 가지 성질을 증명할 때 활용 되는 것. 정리로 표현된 것 역시 반드시 정의나 성질을 이용하여 증명할 수 있어야 하며, 암기 하고 있어야 한다.

– **따름정리(COROLLARY)** : 정리나 성질로부터 파생된, 정리보다는 덜 중요한 내용이다. 반드시 알고 있어야 하는 것은 아니지만 문제를 풀 때 도움을 줄 수 있는 선에서 수록하였으며, 따름정리를 암기하려면 증명까지 같이 숙지해 두어야 한다.

– **Mini Lecture** : 학생들이 많이 하는 실수나 자주 쓰이는 스킬을 정리해 둔 부분이다. 꼭 체크하고 넘어가자.

– **알고리즘(ALGORITHM)** : 여러 가지 성질들과 정리가 연계되는 방식이 이미 유형화된 문제들이나, 특별히 머릿속에 도식화하여 정리했으면 하는 부분들을 묶어서 나타낸 박스이다.

– **Caution!** : 말 그대로 학생들이 많이 실수하는 부분이나, 주의해야할 내용을 적어놓은 박스이다.

2. Stage 1 – VIP

Very Important Problems의 약자로 무조건 풀고 가야 하는 기출문제들과 일부 자작 문제들로 구성이 되어 있습니다. 연습문제 정도로 생각하면 됩니다. VIP 문제를 풀기 전에 개념이 이미 탄탄하게 학습되어 있어야 하며, EXAMPLE 문제를 완벽히 풀 줄 알아야 합니다. VIP 문제의 해설은 해설지에서 찾아볼 수 있습니다.

3. Stage 2 - 자작 문제

Stage 2에서는 Stage 1에서 했던 내용들을 적용시키고, 수학적 사고력을 신장시킬 수 있도록 연습하는 문제들을 수록해놓았습니다. 고난도 자작 문항, 단원 통합 고난도 기출 등 문제들을 엄선하여 앞서 Topic들에서 배웠던 내용들을 어떻게 새로운 문제들에 적용시킬 수 있는지 배워 가시면 됩니다. 그리고 모든 문제의 해설마다 이 문제에서 얻어갔으면.. 하는 내용이 담겨있기 때문에, 만약 문제를 풀어냈더라도 해설을 꼭 봐주시면 감사하겠습니다.

Topic 13. 최고난도 기출과 활용

이 Topic에서는 이과 기출문제이지만, 현재의 미적분1의 내용으로 풀 수 있는 고난도 기출 문제, 또 만약 풀 수 없다면 좋은 아이디어만 뽑아서 내용만 미적분1에 맞춘 기출변형 문제가 포함되어 있습니다. 간혹 있는 '지적 유희 문제'는 미적분1의 내용으로 풀 수는 있으나 출제되지 않는 스타일의 기출문제를 의미합니다. 그 이유는 해설을 통해서 확인할 수 있습니다.

Topic 14. Special Exercise

이것은 기출문항의 트렌드에 맞춰서 저자들이 직접 출제한 문항, 리듬농구 모의평가에 수록되었었던 문항 중 우수한 문항만을 뽑아서 만든 Topic입니다. 정말 어려운 문제가 있을 수도 있고, 한 문제지만 논리의 호흡이 정말 긴 문제가 있을 수도 있습니다. 이 Topic을 풀기 전에 우선 Stage 1과 Stage 2의 Topic 13을 완벽하게 체화하는 것을 강력하게 권고합니다. 또, 간혹 있는 '지적 유희 문제'는 미적분1의 내용으로 풀 수는 있으나 정말 어렵고 수능스럽지 않기 때문에, 심장이 약하신 분이나 노약자분들은 푸는 것을 삼가야 할 문제입니다. 모든 문제의 해설에 문항 comment를 추가하였으며, 마찬가지로 문제를 풀었더라도 꼭 읽고 넘어가시면 좋겠습니다.

Exercise를 포함한 본 교재의 모든 문제들에서 난이도에 대한 선입견을 갖는 것을 막기 위해 배점은 삭제하였으며, Stage 02에 실린 문제들의 순서는 단원과 무관합니다.

이 책을 학습하는 방법을 알아보겠습니다.

– 책을 처음 보시는 분들을 위해 –

Stage 01을 풀기 전에 꼭 Stage 00을 2회 정도 정독하시기 바랍니다. Stage 01의 각 Topic에서 본문을 한 번 읽었다고 곧바로 VIP 문제로 넘어가지 말고, 본문과 EXAMPLE 문제를 반복하여 숙지한 후에 넘어가시기 바랍니다. 특히 익숙하지 않은 Topic일수록 한 Topic을 여러 번 반복하는 것이 중요합니다. 하지만 처음 봤을 때 모든 것을 다 이해하고 넘어가는 것은 불가능하므로, 해당 Topic에 있는 내용을 90% 정도 숙달하면 다음 Topic으로 넘어가세요.

– Stage 01을 1회독한 후 –

Stage 01을 위에 설명한 방법대로 1회독을 마쳤다면 Stage 02로 가지 말고 Stage 01을 많게는 네 번까지 반복하여 보시기 바랍니다. Stage 02의 Topic 13에는 평가원 기출문제 중 미적분1 범위에 맞추어 변형한 고난도 기출문제들이 실려 있고, Topic 14에는 역대 기출문제들보다도 어려울 수 있는 새로운 문제들이 실려 있습니다.
하지만 여러분이 기출문제를 완벽히 풀 수 없다면 새로운 문제들을 푸는 것은 아무런 의미가 없습니다. Stage 01까지 완벽히 소화를 한 분들만 Stage 02, 특히 Topic 14를 보기 바랍니다. 어떤 시중의 문제보다도 기출문제를 학습하는 것이 우선입니다. 1등급을 받기 위해서 Topic 14를 꼭 풀어야 하는 것도 아니며, 수능 전까지 Topic 14를 꼭 보고 시험장에 들어가야 하는 것도 아닙니다. 다시 한 번 강조하지만, 기출문제를 완벽하게 학습하는 게 항상 우선입니다. 또한 Stage 00은 수학 공부법의 기초이므로 내용을 잊어버릴 때쯤이면 다시 읽어주도록 합시다.

– 저자와 소통할 수 있는 커뮤니티 –

학생은 오탈자 제보, 정오표 확인 및 책에 대한 여러 가지 Q&A 를 Laplace Club 이라는 네이버 카페에 들어와서 할 수 있습니다. 주소는 cafe.naver.com/laplaceclub 입니다.

Laplace Club
cafe.naver.com/laplaceclub

저자와 바로 피드백을 주고 받을 수 있는
Laplace Club QR 코드

cafe.naver.com/laplaceclub

“

목차

”

Stage. 0 선택과 집중

Stage. 1 건축의 시작

Stage. 2 수학을 완성하다

정리를 하면, 우리가 개념공부를 할 때에는 현재 배우고 있는 내용이 정의인지, 성질인지, 정리인지를 구별하고, 그것이 어떤 개념으로부터 파생되었는지를 알고 넘어가야 합니다. 앞으로 각 Topic을 공부할 때 이런 부분을 잘 유의해서 공부하시기 바랍니다.

실제로 교과서에서 제시하고 있는 '내용 자체'는 별로 많지 않습니다. 그 내용만큼은 이 책에 모두 나와 있으며 A4용지 몇 장에 완벽하게 요약할 수 있을 정도로 충분히 암기를 해야 합니다. 당연히 암기에는 이해가 선행되어야 하겠죠. 만약 어떤 개념이나 내용이 잘 이해되지 않는다면, 일단 외우고 넘어 갔다가 다시 돌아오는 것이 좋습니다. 나중에 다시 보면 더 큰 맥락에서 저절로 이해가 되는 경우가 많기 때문입니다.

이 책은 위와 같이 막막하게만 느껴지는 논리적으로 공부하는 과정을 쉽게 할 수 있도록 도와줄 것입니다.

5. 해석의 중요성과 풀이의 필연성

이제까지 논리적으로 공부를 하는 법을 알아보았습니다. 그런데 공부를 하다보면 한 문제에 논리적으로 가능한 풀이가 여러 가지인 경우가 존재합니다. 주로 여러 개념이 복합적으로 얽혀있는 고난도 문제들이 그렇습니다. 이럴 땐 어떤 풀이를 선택하는 게 맞을까요?

이 부분은 사실 사람마다 의견이 갈릴 수 있습니다. 물론 평가원이 의도한 풀이가 있을 것입니다. 하지만, 문제는 평가원은 완벽한 풀이를 공개하지 않는다는 것입니다. 가끔씩 논문에 몇 문제에 대한 풀이법을 기재하는 것이 전부입니다.

따라서 우리는 어떤 풀이가 더 **필연**적인지를 분석하고 선택해야 합니다.

여기서 풀이가 필연적이란 것은 무슨 뜻일까요? 필연성의 사전적인 의미는 "사물의 관련이나 일의 결과가 반드시 그렇게 될 수밖에 없음"입니다. 수학영역에서 필연성 있는 풀이란 교과과정에 근거한 당위성이 있는 풀이, 충분히 여러분이 생각해낼 수 있는 풀이 정도로 치환할 수 있겠습니다.

가장 이상적인 것은 여러분이 기출문제를 직접 분석하면서 많이 나오는 방법과 풀이들을 익혀 여러분만의 필연성을 찾는 것입니다. 하지만 현실적으로 혼자서 교과서와 기출문제집 한권을 들고서 모든 기출문제를 분석하는 것은 굉장히 어렵습니다. 게다가 기출문제집마다 풀이가 천차만별일 뿐더러 책마다 풀이를 보면 일관성이 없는 경우가 많아 혼란을 줍니다.

따라서 Stage 01에는 각 토픽별로 핵심이 되는 중요한 기출문제들과 필연성 있는 해설 및 분석을 달아두었습니다. 물론 여러 가지 풀이가 존재하는 문제들이 있지만, 그 중에서도 필연성이 더 높다고 판단되는 풀이를 토픽에 맞게 제시하였습니다. 여러분이 처음 풀이를 보았을 때 납득이 되지 않는다면, 여러분의 실력은 아직 부족한 것입니다. 풀이가 어느 정도 필연적이라고 느끼려면 일단 다음이 전제되어야 합니다.

1. 머릿속에 탑재된 정확한 개념
2. 문제의 정확한 해석

일단 우리가 논리적으로 공부하는 방법에 대해서 배웠으니 1번은 어느 정도 해결한 것 같습니다. 그럼 2번에 대해서 한 번 알아봅시다. 문제를 해석한다는 건 어떤 것을 의미할까요? 그냥 문제를 읽고 이해를 할 수 있으면 끝 아닌가요?

일단 문제 해석의 중요성에 대해서 강조하기 위해서 다음 말부터 하고 들어가겠습니다.

"문제를 제대로 해석해내는 것이 수학 실력의 70% 이상을 좌지우지한다."

신기하지 않나요? 여러분이 문제를 제대로 해석만 할 줄 알면 사실 여러분은 어느 정도 실력이 있다는 뜻입니다. 아쉽게도 대부분 학생들은 이를 제대로 못합니다. 여기서 해석이란 단순이 읽고 이해하는 것에 그치지 않습니다. 어떤 조건을 어떻게 활용해야 하는지에 대한 이해까지 포함됩니다. 보통 문제를 해석하는 과정을 '**조건을 분해한 후 재결합한다**.'라고 말합니다.

문제를 일단 해석하려면 일상용어로 쓰인 문제의 설명을 수학적 표현으로 바꾸는 능력이 필요합니다. 우리가 배운 개념과 정리가 수학적 표현으로 바꾸는 과정에서 주로 이용됩니다. 여기까지가 문제를 해석하는 **첫 번째 단계인 조건을 분해하는 것**입니다. 조건을 다 분해했다면, 혹은 더 이상 분해할 만한 상황이 아니라면 **두 번째 단계는 조건들을 재결합 하는 것**입니다. 대부분 고난도 문제는 두 번째 단계에서 많이 막힙니다. 재결합을 제대로 해야 새로운 수학적 사실을 알아낼 수 있고 이를 통해서 새롭게 문제를 돌파할 수 있습니다. 한 문제를 풀 때 조건 분해와 재결합을 여러 번 해야 할 수도 있습니다.

그렇다면 비교적 쉬운 기출문제로 문제를 제대로 해석하는 방법(분해와 재결합)을 알아봅시다. 여기 있는 문제들을 꼭 혼자 생각해본 다음 본문을 읽어나가세요. 아직은 이런 문제들을 못 풀어도 괜찮습니다.

> 함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 개구간 $(0,\ 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오.

이 문제의 경우 문제에 쓰인 말을 <u>그대로</u> 수학적 표현으로 옮기기만 하면 재결합은 쉽게 할 수 있습니다.

"함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식 - 조건 1"이 등장했으니 접선의 방정식을 구해봅시다. 접선의 방정식 공식을 사용하기 위해 $f'(x)$를 구하면 $f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$ 입니다. 따라서 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} y &= (3t^2-2(a+2)t+a)(x-t)+t^3-(a+2)t^2+at \\ &= (3t^2-2(a+2)t+a)x-2t^3+(a+2)t^2 \end{aligned}$$

접선의 y절편이 $g(t)$이므로 $x=0,\ y=g(t)$를 대입하면 $g(t)$가 나옵니다.

$\therefore\ g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$

여기까지가 **문제의 조건을 수학적 표현으로 바꾼 것**입니다.

문제에서

"함수 $g(t)$가 개구간 $(0,\ 5)$에서 증가한다. - 조건 2"

라고 했습니다. 그럼 이로부터 새로운 수학적 사실을 도출해내기 위해서 우리가 지금까지 알고 있는 사실들을 재결합하는 과정이 필요합니다.

일단 우리는 $g(t)$라는 함수를 구했습니다. ($g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$) 함수 $g(t)$가 열린 구간 $(0,\ 5)$에서 증가하는데, $g(t)$는 해당 구간에서 미분가능하므로 $g'(t)\geq 0$ 인지만 확인하면 됩니다.

$$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t=-2t(3t-(a+2))$$

에서 $g'(t)$가 개구간 $(0,\ 5)$에서 0 이상의 값을 가지려면

$$\frac{a+2}{3}\geq 5 \Leftrightarrow a\geq 13$$

이면 충분함을 알 수 있습니다.

여기까지 문제의 상황을 알맞게 바꾼 수학적 표현을 다른 조건과 결합하여 새로운 수학적 사실 $\frac{a+2}{3}\geq 5$ 를 도출했습니다. 이 과정이 바로 **조건을 재결합 하는 것**입니다.

두 번째 문제로 한 번 더 연습해봅시다.

> 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고,
> $$\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$$
> 를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하시오.

일단 문제에 $f(x)$에 대한 조건이 주어져 있습니다. 이를 수학적 표현으로 바꾸면

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$라 둘 수 있고, $f(3)=0$ 이라 했으니

$$f(3)=9+3a+b=0 \Rightarrow 3a+b=-9 \ \cdots\cdots \ \boxed{ㄱ}$$

를 구할 수 있습니다. 그다음 조건인

$$\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$$

는 도대체 어떻게 해석할지 고민해보아야 합니다.

이럴 때 제대로 된 해석을 하기 위해서는 충분한 개념학습이 필요합니다. **Topic 9**의 정적분의 성질을 제대로 공부 했다면 저 식을 어떻게 손봐야할지 감이 올 겁니다.

우변의 정적분을 좌변으로 이항해주면 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{2013} f(x)\,dx-\int_3^{2013} f(x)dx=\int_0^{2013} f(x)\,dx+\int_{2013}^{3} f(x)\,dx$$

$$\therefore\ \int_0^{3} f(x)\,dx=0$$

그럼 아까 우리가 구한 조건인 $f(x)=x^2+ax+b$ 에다가 정적분을 씌우면

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3(x^2+ax+b)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^3$$

$$=9+\frac{9}{2}a+3b=0\cdots\cdots\ \boxed{ㄴ}$$

이 나옵니다.

아하! 그럼 이제 a와 b에 관한 식 두 개가 나왔으니 a와 b의 값을 구할 수 있습니다.[3)]
여기까지가 문제의 해석이라고 볼 수 있습니다. 나머지는 단순한 계산입니다.

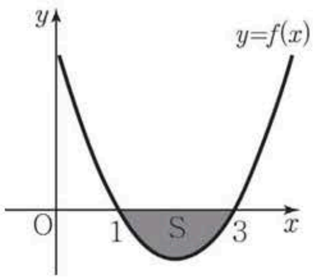
$$3a+b=-9\ \cdots\cdots\ \boxed{ㄱ}$$

$$3a+2b=-6\ \cdots\cdots\ \boxed{ㄴ}$$

따라서 $\boxed{ㄴ}-\boxed{ㄱ}$을 해주면, $b=3$을 얻고, $a=-4$임도 알 수 있게 됩니다.

$$\therefore\ f(x)=x^2-4x+3$$

그런데 문제에서 구하라는 것은 함수 $f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이입니다.
앞의 조건을 재결합하는 과정에서 $f(x)=(x-1)(x-3)$임을 알았으니 넓이를 구하면 다음과 같습니다.



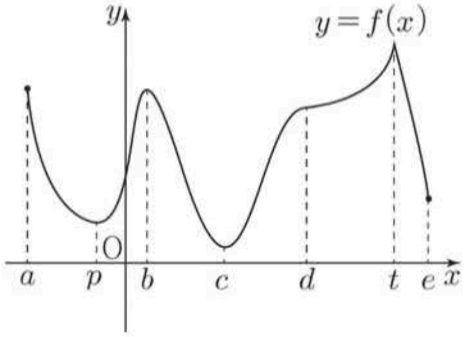
$$S=\int_1^3|f(x)|\,dx=\int_1^3 -f(x)\,dx$$

$$=\int_1^3(-x^2+4x-3)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

마지막으로 최고난도 문제를 한번 살펴보겠습니다. 이 문제는 상당히 어려우므로 대부분 이걸 처음 보는 학생들은 이해가 안 갈 수도 있습니다. 그냥 건너 뛰셔도 무방합니다.

3) 이 과정이 조건을 재결합하는 과정입니다.

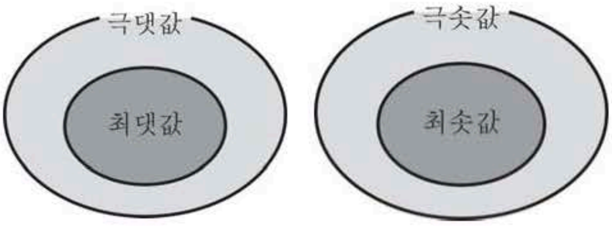
다음과 같은 함수 $y=f(x)$는 $a \le x \le e$에서 정의되어 있을 때, 극댓값과 극솟값은 각각 몇 개일까요?



정답은
'$x=a,\ b,\ t$에서 함수 $y=f(x)$가 극댓값을 갖고
$x=p,\ c,\ e$에서 함수 $y=f(x)$가 극솟값을 갖는다.'
여서 극댓값과 극솟값은 모두 세 개씩이 됩니다.

추가로 $f(t)$는 이 함수의 최댓값이고, $f(c)$는 이 함수의 최솟값이 되는데,
이렇듯이 모든 최댓값과 최솟값은 각각 극댓값과 극솟값의 부분집합이 됨을 확인할 수 있습니다.
따라서 우리는 나중에 문제에서 '최댓값을 구하시오.' 또는 '최솟값을 구하시오.'
라는 문제를 만났을 때, '극댓값 중 가장 큰 것을 구하시오.' 또는 '극솟값 중 가장 작은 것을 구하시오.'라고
바꿔서 풀 수도 있는 것입니다.

집합으로 보면 다음과 같은 관계를 가지고 있습니다.



최댓값은 극댓값이라는 집합의 부분집합이고,
최솟값은 극솟값이라는 집합의 부분집합입니다.

극대와 극소를 다시 한 번 정의하면 다음과 같습니다.

정의

극댓값과 극솟값
함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
$\Leftrightarrow$ $x=a$를 포함하는 **어떤 열린 구간** 내의 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$를 만족시킨다.
함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.
$\Leftrightarrow$ $x=a$를 포함하는 **어떤 열린 구간** 내의 모든 실수 x에 대하여
$f(x) \ge f(a)$를 만족시킨다.

그리고 이 때 극대점과 극소점을 합쳐서 **극점**이라 하고, 극댓값과 극솟값을 합쳐서 **극값**이라 합니다.

그런데! 만약 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지고 미분가능하다면,
각각 $x=a$를 포함하는 열린 구간에서

$$f(x) \le f(a) \text{ 또는 } f(x) \ge f(a)$$

를 만족하므로 최대최소와 미분계수에 의하여

$$f'(a)=0$$

임을 알 수 있습니다. 따라서 다음과 같은 정리를 알게 됩니다.[43)]

THEOREM

극값과 미분계수
함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지고, 미분가능하면

$$f'(a)=0 \text{ 이다.}$$

극값과 미분계수의 정리를 이용하여 다음 기출문제를 한번 풀어봅시다.

EXAMPLE 15 [2015 수능]

두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

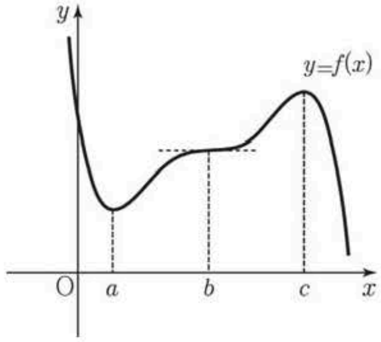
$$g(x)=(x^3+2)f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가질 때,
$f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오.

43) 이는 사실 앞의 최대최소에서 살펴본 정리와 거의 차이가 없습니다.

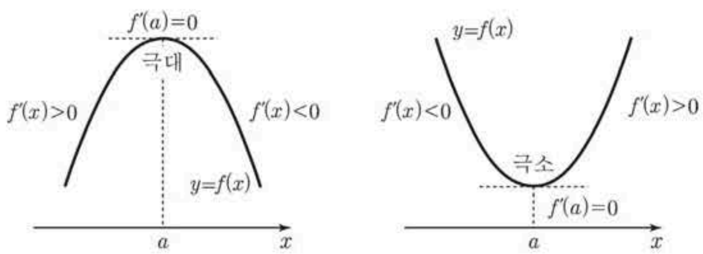
* EXAMPLE 16 분석)

$x<a$일 때 $f'(x)<0$라는 것은 $x<a$에서 함수 $f(x)$가 감소한다는 뜻,
$a<x<b$일 때 $f'(x)>0$라는 것은 $a<x<b$에서 함수 $f(x)$가 증가한다는 뜻,
$b<x<c$일 때 $f'(x)>0$라는 것은 $b<x<c$에서 함수 $f(x)$가 증가한다는 뜻,
$x>c$일 때 $f'(x)<0$라는 것은 $x>c$에서 함수 $f(x)$가 감소한다는 뜻입니다.
이를 토대로 개략적인 $f(x)$의 모양을 완성해보면 다음과 같습니다.



따라서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간을 적당히 잡아 $f(a)$가 최솟값이 되도록 만들 수 있고, $x=c$를 포함하는 어떤 열린 구간을 적당히 잡아 $f(c)$가 최댓값이 되도록 만들 수 있으므로 $x=a$에서 극소이고 $x=c$에서 극대임을 알 수 있습니다. 그러나, $x=b$를 포함하는 어떤 열린 구간을 잡아도 절대로 $f(b)$가 최댓값이거나 최솟값이 되도록 만들 수 없죠?

이 예제에서 추론할 수 있듯이 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\underline{f'(x)=0\text{인 } x\text{가 연속적이지 않으면서}}$ $x=a$에서 극값을 가지면 $x=a$의 좌우에서 함수의 증가와 감소가 바뀌게 됩니다. 따라서 도함수 $f'(x)$의 부호가 변하게 되는데, 그래프를 통하여 알아보면 다음과 같습니다.



따라서 우리는 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$의 극대와 극소를 다음과 같이 판정하기로 합니다.

5. 그래프 알고리즘

이제 우리는 함수의 그래프를 그리기 위한 준비과정을 모두 거쳤습니다.
이제부터 본격적으로 다항함수의 그래프를 어떻게 그리는지 한번 알아보겠습니다.
교과서에서는 다항함수를 그리기 위해서 **증감표** 라는 개념을 도입하고 있습니다.

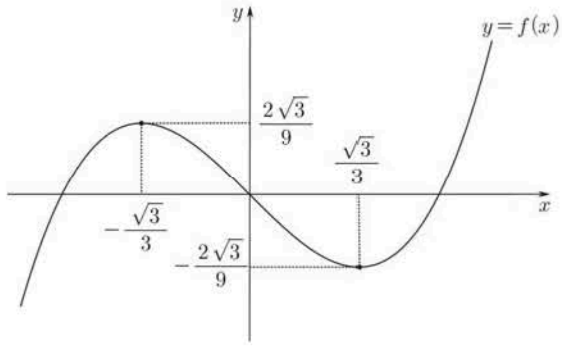
쉬운 함수부터 시작해봅시다.
삼차함수 $f(x)=x^3-x$의 그래프의 개형을 추론해 볼까요?
그래프를 그리기 위해 가장 먼저 해야 되는 과정은 함수를 **미분**하는 것입니다.

$$f'(x)=3x^2-1=3\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

이므로 이를 바탕으로 증감표를 작성해보면,

x의 범위	$x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x>\frac{\sqrt{3}}{3}$
$f(x)$		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$		$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$의 모양	↗	•	↘	•	↗

입니다. 증감표로부터 우리는 함수의 그래프의 **특성**들을 파악 할 수 있지요. 표에 나타난 그래프의 특성들을 바탕으로 그래프를 다음과 같이 매끄럽게 그리면 됩니다.
(우리는 미술을 하는 것이 아닙니다. 너무 예쁘게 그릴 필요는 없습니다.)



(위의 함수는 원점을 지나는 것이 너무 잘 보여서 지나도록 그려주었습니다.)

그런데..
매번 증감표를 그리는 것은 매우 귀찮습니다. 어차피 여러분이 안 그릴 것 같습니다. 시험시간에 이러한 증감표를 그리고 있기는 싫으니 우리는 증감표의 축소판인 **부호표**만을 이용하여 그래프를 그려보도록 하겠습니다.

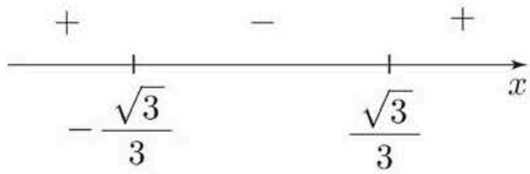
함수 $f(x)=x^3-x$ 에 대하여

도함수 $f'(x)=3x^2-1=3\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 는 x가 엄~청 커지면 ∞를 향해 점점 커집니다.

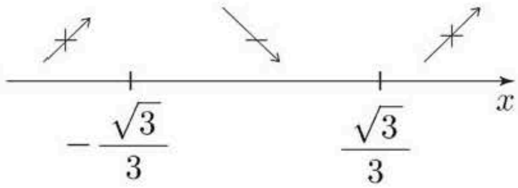
($\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$) 그렇기 때문에 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $f'(x)>0$ 임을 쉽게 알 수 있습니다.

또한 $f'(x)$의 부호는 두 인수 $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$에 의하여 결정됩니다.

그런데 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$의 부호가 변하고, $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$의 부호가 변하므로 $f'(x)$의 부호 변화는 $+\ \ -\ \ +$ 가 됩니다. 이를 수직선에 나타내보면,



과 같이 쓸 수 있습니다. 도함수가 양수이면 함수가 증가하고, 도함수가 음수이면 함수가 감소하므로 다음과 같이 표 위에 화살표로 함수의 개형을 대강 나타내봅니다.

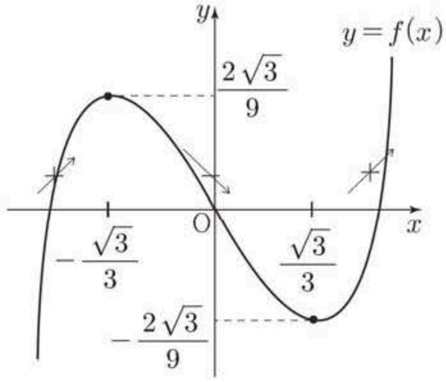


이렇게 수직선 위에 도함수의 부호만을 표시한 것을 **부호표**라고 합니다.

이제 함수 $f'(x)=0$ 인 x 에서의 함숫값을 조사하여 찍고, 그 위에 함수를 그립니다.

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

이므로



짠! 하고 위와 같이 매끄럽게 함수를 이어주면 됩니다.

위의 함수는 원점을 지나는 것이 너무 당연하게 보여서 특별히 찍어주었습니다.

어렵지 않죠? 우리는 이제부터 모든 함수를 위와 같은 방식으로 그리도록 연습할 것입니다. 그리고 이렇게 개형을 그리는 방법을 '부호표를 이용한 그래프 그리기'라고 이름붙이겠습니다. 알고리즘을 제시해줘야겠죠?

알고리즘

함수의 부호표를 이용한 개형그리기

(1) 도함수 $f'(x)$를 구한다.

(2) $f'(x)=0$를 만족하는 x의 값을 구한다.

(3) $f'(x)$의 부호 변화를 수직선에 나타내준다.

(4) 함수의 증감을 부호 위에 선으로 표시한다.

(5) $f'(a)=0$인 a에 대하여 $f(a)$의 값을 구하고 점을 찍는다.

(6) 함수 $y=f(x)$가 지나는 특정점이 보인다면 그 점을 찍는다. (원점, y절편, x절편 등) (선택)

(7) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

이 알고리즘을 '반드시' 이용하여 앞의 방법과 같이 밑의 함수의 그래프들을 그려보세요.

(내가 혹여 다른 방법을 알고 있더라도, 도구의 통일화를 위하여 반드시 연습하세요.)

(1) $f(x)=x^3-6x^2+2$

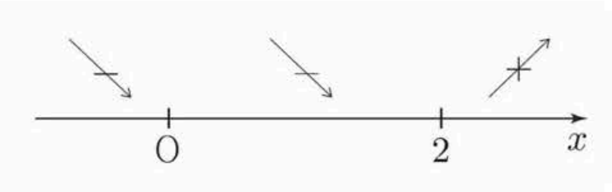
(2) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x^3$

(3) $f(x)=-x^3-3x^2+1$

(4) $f(x)=3x^5-5x^3-1$

특강. 도함수의 부호 변화를 파악하는 Tip

도함수의 부호 변화를 쉽게 파악할 수 있을까요?
당연히 있습니다.
예를 들어 $f'(x)=x^2(x-2)$ 일 때,
x가 엄~청 커질 때 $f'(x)$는 양수이고$\left(\lim_{x\to\infty} f'(x)>0\right)$,
$x=2$ 에서 $(x-2)$ 의 부호가 바뀌고
$x=0$ 에서 x^2 의 부호는 바뀌지 않으므로 다음과 같이 부호표를 그릴 수 있습니다..



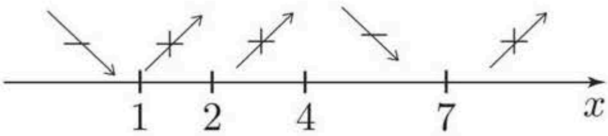
그런데 잘 생각해보면 x^2, $(x-3)^4$ 과 같이 **차수가 짝수인 인수가 0이 되는 x에서는 부호가 변하지 않고,** $(x-2)$, x^3 과 같이 **차수가 홀수인 인수가 0 이 되는 x 에서는 부호가 변한다는 것을 알 수 있습니다**.

그래서 우리는 이제부터 부호 변화를 표시할 때 다음과 같은 방법을 사용하기로 합시다.

THEOREM

부호 변화를 표현하는 방법 – 부호표
(1) 짝수차수의 인수가 0 이 되는 x 에서는 부호가 변하지 않는다.
(2) 홀수차수의 인수가 0 이 되는 x 에서는 부호가 변한다.

예를 들어 어떤 다항함수의 도함수 $f'(x)$가
$f'(x)=(x-1)^3(x-2)^2(x-4)^3(x-7)$
이라 주어졌습니다.
이 함수는 $x=2$ 일 때 짝수 차수의 인수인 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로 $x=2$에서 부호가 변하지 않지요?
$x>7$ 에서 양수이므로 부호만 번갈아 표시해주다가 $x=2$ 에서는 부호를 똑같이 표시해주면 됩니다.



이렇게 하면 아무리 복잡한 함수라도 부호 변화를 표시할 자신이 생기지요?
다음 연습문제들을 풀어보면서 그래프 그리기 연습을 한다면 여러분은 그래프 그리기에 통달할 것입니다.

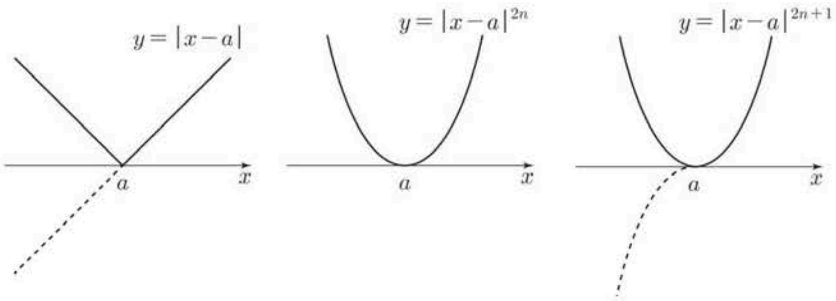
따름정리(Corollary)

다항함수 $f(x)$에 대하여 $|f(x)|$가 미분가능하면 $f(a)=0$을 만족하는 모든 실근 a에 대해 $f'(a)=0$이다. 즉 $f(x)$가 항상 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

위의 정리를 이용하여 풀게 됩니다. 아니 어떻게...?

문제를 해결하기 전에 이와 관련된 정리 하나를 배운 후에 다시 문제풀이로 돌아오도록 하겠습니다. 우선 배우려는 상황을 직관적으로 이해해보겠습니다.

세 그래프 $y=|x-a|$, $y=|x-a|^{2n}$, $y=|x-a|^{2n+1}$는 다음과 같습니다.
(단, n은 자연수)



그러면 미분가능하지 않아 보이는 개형은 $y=|x-a|$ 뿐이라는 것을 알 수 있습니다.

이렇게 직관적으로 얻어낸 어떤 것을 증명하는 것이 바로 수학의 목표 중 하나입니다.
(약하게 말하고 있지만 **반드시 따라하세요.**)

어떤 미분가능한함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$ 일 때, 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능할 조건은 무엇일까요?

$x=a$에서 함수 $y=|f(x)|$가 미분가능하기 위해서는 다음의 두 극한값이 같아야 합니다.

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a},\quad \lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$$

그런데 이 극한값을 구하기 위해서는 $x=a$의 근방에서의 $f(x)$의 부호를 알아야 합니다.
따라서 다음과 같은 네 가지 경우로 분류할 수 있습니다.

(1) $+ \Rightarrow a \Rightarrow +$ ($f(x)$의 부호의 변화)[61]

$x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에서 $f(x)\ge f(a)$라는 뜻이므로 $x=a$에서 미분가능하면 최대 최소와 미분계수에 의하여 $f'(a)=0$이 됩니다. ($\because$ $|f(x)|=f(x)$)

61) 충분히 작은 양수 h에 대하여 $f(a-h) \Rightarrow f(a) \Rightarrow f(a+h)$의 부호 변화를 의미합니다.

(2) $- \Rightarrow a \Rightarrow +$ ($f(x)$의 부호의 변화)

$f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{x-a}=f'(a)$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{-f(x)}{x-a}=-f'(a)$$

이므로 $f'(a)=-f'(a) \Rightarrow f'(a)=0$ 이어야 합니다.

그런데 여기서 추가로 $f'(a)\neq 0$ 이면 미분가능하지 않다는 것을 알 수 있습니다.

(3) $+ \Rightarrow a \Rightarrow -$ ($f(x)$의 부호의 변화)

$f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{-f(x)}{x-a}=-f'(a)$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{x-a}=f'(a)$$

이므로 $f'(a)=-f'(a) \Rightarrow f'(a)=0$ 이어야 합니다.

그런데 여기서 추가로 $f'(a)\neq 0$ 이면 미분가능하지 않다는 것을 알 수 있습니다.

(4) $- \Rightarrow a \Rightarrow -$ ($f(x)$의 부호의 변화)

$x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에서 $f(x)\le f(a)$라는 뜻이므로 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=0$ 이 됩니다. ($\because$ $|f(x)|=-f(x)$)

따라서 (1), (2), (3), (4) 모두 $x=a$에서 함수 $y=|f(x)|$가 미분가능하려면 $f'(a)=0$ 이어야 함을 보여주고 있습니다.

즉, 다음과 같은 따름정리를 얻어낼 수 있습니다.

따름정리 1 (Corollary)

둘은 각각 필요충분조건입니다. (단, $f(x)$는 미분가능한 함수[62])

- $f'(a)=0$ 인 절댓값 함수 $y=|f(x)|$에 대하여 $f(a)=0$일 때, $x=a$에서 미분가능하다.
- $f'(a)\neq 0$ 인 절댓값 함수 $y=|f(x)|$에 대하여 $f(a)=0$ 일 때, $x=a$에서 미분가능하지 않다.

그런데 이 따름정리1을 '다항함수'에만 적용시켜보겠습니다.

인수정리의 확장에서 $f(a)=f'(a)=0$ 이면 $(x-a)^2$의 인수를 갖는다고 했고,

$f(a)=0$ 인 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능할 조건은 $f'(a)=0$ 인 것이므로

$(x-a)^2$의 인수를 반드시 가져야 합니다. 이것은, 인수의 차수가 2 이상이면 미분가능하겠지만, 차수가 1 이면($x-a$의 인수만을 가지면) 미분가능하지 않다는 것도 의미합니다.

우리는 이것을 통해서 따름정리 2 를 얻을 수 있습니다.

62) 사실 우리는 $f'(x)=0$인 x가 연속적인 함수 $f(x)$에 대하여는 증명하지 않았지만(예를 들면 부호 변화가 $0 \Rightarrow a \Rightarrow +$같은 함수), a에서 미분가능하려면 좌극한과 우극한이 모두 0이 되어야 미분가능 하다는 것은 모두 증명한 셈이니, 추가로 적지 않겠습니다.

Topic 08. Very Important Problems

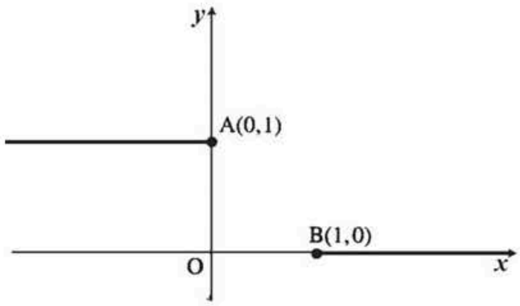
정답 및 해설 072pg

다음 중요 기출들을 앞에서 배운 개념들만을 이용하여 풀어보세요.

01

[1997 수능]

다음 그림은 함수 $y=1$과 함수 $y=0$의 그래프의 일부이다. 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$ 사이를 $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$ 의 그래프를 이용하여 연결하였다. 이렇게 연결된 그래프 전체를 나타내는 함수가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 미분 가능 하도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하시오.



02

[2011 06 평가원]

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$는 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03

[자작 문항]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 1} \frac{|f(x)|}{x-1} = f(2)$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

04

[2015 수능]

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0) = f'(0)$
(다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38 ④ 43 ⑤ 48

05

[자작 문항]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 n의 개수는?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)(x-3) \leq 0$이다.
(나) $x = n$에서 극댓값을 가진다.
(다) $f(n) = 0$

06

[2013 06 평가원]

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq mx) \\ mx & (f(x) < mx) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은?

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

07

[자작 문항]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서만 미분가능하지 않다.
(나) $f'(1)=0$, $f(1)=f(4)$

08

[2011 수능]

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{가 } x=a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

09

[자작 문항]

서로 다른 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^2) \le g(x) \le f(x)$$

를 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f(0)=g(0)$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

ㄷ. $g'(0)=g'(1)=0$

ㄹ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 삼차함수인 $f(x)$, $g(x)$가 존재한다.

10 [2010 06 평가원]

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a$ $(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

11 [2016 수능]

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은?

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌 구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{2}{15}$ ④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

Topic 13. 이과 기출 씹어먹기

정답 및 해설 108pg

[2013 09 평가원 변형]
Stage 1 관련 Topic
Topic 6

1. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(3)=3$, $f(3)=g(3)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 3$이다.

$f(4)$의 값을 구하시오.

[2009 수능]
Stage 1 관련 Topic
Topic 3, Topic 5

2. 다항함수 $f(x)$와 두 자연수 m, n이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b,\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$$

를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

〈보 기〉

ㄱ. $m\geq n$
ㄴ. $ab\geq 9$
ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am=bn$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 접할 때, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a \neq b$이다.)

[2007 수능 변형]
Stage 1 관련 Topic
Topic 6, Topic 7

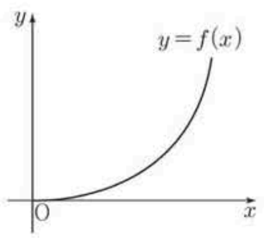
〈보 기〉

ㄱ. $h'(b)=0$
ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.
ㄷ. $x=a$에서 함수 $h(x)$는 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 다항함수 $y=f(x)$의 $x>0$에서의 그래프는 그림과 같다.

[2015 09 평가원 변형]
Stage 1 관련 Topic
Topic 9



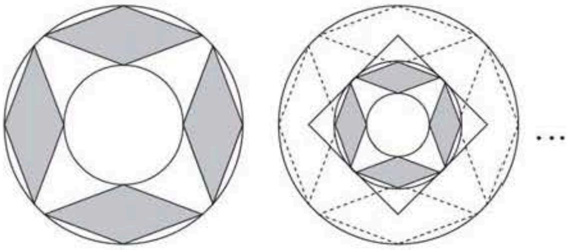
함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\displaystyle\int_{10}^{11}\frac{f(x)}{x}dx$ 값을 구하시오.

(가) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{1}{2}t(t+1)(t+2)$이다.

(나) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{1}{2}$

47. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원을 그리고, 이 원의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$크기의 반지름을 가지는 동심원을 그린 후, 두 원에 동시에 일정한 간격으로 큰 원과 세 점, 작은 원과 한 점에서 만나서 내접하는 네 마름모를 그리고 R_1이라 하자. R_1의 네 마름모의 중심을 이은 정사각형을 그리고, 이 정사각형에 내접하는 원을 그린다. 이 원의 반지름의 길이의 $\frac{1}{2}$크기의 반지름을 가지는 동심원을 그린 후, 두 원에 동시에 일정한 간격으로 큰 원과 세 점, 작은 원과 한 점에서 만나서 내접하는 네 마름모를 그리고 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[2015 리듬농구]
Stage 1 관련 Topic
Topic 2



R_1 R_2

① $\frac{128\sqrt{7}}{23}$ ② $\frac{160\sqrt{7}}{23}$ ③ $\frac{192\sqrt{7}}{23}$
④ $\frac{224\sqrt{7}}{23}$ ⑤ $\frac{256\sqrt{7}}{23}$

48. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, a의 최솟값을 m이라 하자. a가 최소가 되게 하는 함수 $f(x)$에 대해 $f(m)$의 값은?

[무소속]
Stage 1 관련 Topic
Topic 9, Topic 11

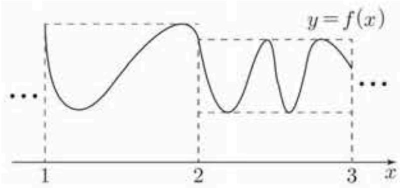
(가) $f(0)=0$
(나) $x \geq a$인 모든 실수 x에 대하여
$\int_1^x f(t)\,dt \geq 0$이다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

54. 10 이하의 자연수 n에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 닫힌 구간 $[n,\ n+1]$의 두 실수 $a,\ b$와 $n \le x \le n+1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(a) \le f(x) \le f(b)$를 만족시키는 서로 다른 $a,\ b$의 개수가 각각 $n,\ n+1$이다.

예를 들어 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 다음과 같이 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$를 만들 수 있다.



$f'(k)=0$을 만족시키는 서로 다른 k값의 개수를 m이라 할 때, m의 최솟값을 구하시오.

[지적 유희 문제]

– 수능적이지 않은 어려운 문제입니다. 괜히 시간 뺏기기 싫으신 분은 풀지 마시고, 심심하신 분만 푸세요.

[2016 리듬농구]

Stage 1 관련 Topic
Topic 6

55. 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\left(\int_1^x f(t)dt\right)^2 = \{f(x)\}^3$$

일 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

[무소속]

Stage 1 관련 Topic
Topic 6, Topic 8,
Topic 9

70. $-10 \le a \le 10$, $-10 \le b \le 10$인 두 정수 a, b에 대하여 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 양수 t의 개수가 단 하나 존재할 때, 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

(가) $0 < x \le t$일 때, $f(x) = a(x^3 - 4x^2)$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) + bt = f(x+t)$이다.

[2016 리듬농구 변형]
Stage 1 관련 Topic
Topic 6

Topic 13. 분석

1.

$f'(3)=3$이면서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 3$이라고 합니다. 그러면 우리는 도함수 $f'(x)$의 입장에서 생각해보면, $x=3$에서 $f'(x)$가 최솟값을 가지는 것이니 $f''(3)=0$(편의상 $f'(x)$의 도함수를 $f''(x)$로 쓴다고 했었죠?)임을 알 수 있습니다.
이제 $f(3)=g(3)$이라는 것을 해석해야하는데, 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 왠지 $y=x$ 위에서 교점을 가질 것만 같습니다. 그래서 $f(3)=g(3)=3$임을 보이기 위해,
우선 $f(3)=g(3)=k$ (단, $k\neq 3$) 이라고 가정해보겠습니다.
그렇다면 역함수의 정의에 의하여 $f(3)=k$이고 $f(k)=3$이 되는데, 이 말인 즉 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(3,\ k)$와 $(k,\ 3)$을 동시에 지난다는 말이 됩니다. 그런데 두 점 $(3,\ k)$와 $(k,\ 3)$사이의 평균변화율은

$$\frac{f(k)-f(3)}{k-3}=\frac{3-k}{k-3}=-1$$

이므로 (나) 조건의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 3$이다라는 조건에 모순입니다.
따라서 $k\neq 3$일 때 항상 모순이므로 $f(3)=3$이 됩니다.
이제 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 놓으면 $f(3)=3$, $f'(3)=3$, $f''(3)=0$으로 식 세 개 문자 세 개이니 답이 나오겠죠? $f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$이므로 $x=3$을 각각 대입하면, $a=-9$, $b=30$, $c=-33$임을 구할 수 있습니다.

$$\therefore\ f(x)=x^3-9x^2+30x-33 \quad \Rightarrow f(4)=7$$

문항 comment

그런데 우리는 여기에서만 그치지 않습니다. 우리가 아까 $f(3)=g(3)$이면 $f(3)=3$임을 알았는데, 그렇다면 원함수와 역함수는 항상 $y=x$에서 만날까요?

당연히 아닙니다. 반례는 간단하게 $y=-x^3$, $y=-x$, $y=\frac{1}{x}$같은 함수를 들 수 있죠.

그러면 어떤 경우에서 원함수와 역함수가 $y=x$ 위에서 만나는 것일까요? 정답은 바로 미분가능한 함수 $f(x)$가 증가함수이면 항상 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 $y=x$에서 교점을 가진다는 것입니다.[1] 증명은 우리가 앞서 문제풀이를 했던 방식과 동일합니다. 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 $x=a$에서 교점을 가진다고 합니다. 그러면 $f(a)=g(a)$죠? 여기서 $f(a)=g(a)=b$ $(a\neq b)$라고 가정하면, 역함수의 정의에 의하여 $f(b)=a$가 됩니다. 따라서

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a-b}{b-a}=-1$$

이 될테고, 함수 $f(x)$가 증가함수라면 $f'(x)\geq 0$이어야 하니, 증가함수라는 가정에 모순이 나오겠죠? 따라서 다음과 같은 결론을 얻습니다.

'증가함수인 원함수가 그 역함수와 교점을 가지면 $y=x$ 위에 있다.'[2]

답 : 7

1) 물론 교점이 존재한다는 전제 조건이 있어야겠죠?
2) 연속함수라는 전제조건이 있어야겠죠? (연속함수일때는 증명방식이 약간 다르나, 이 책에서는 다루지 않겠습니다.

$$\int_8^9 f(x)\,dx = 3+\frac{1}{2}(9-3)=6$$

$$\int_9^{10} f(x)\,dx = \frac{13}{2}$$ (규칙을 파악하셨으리라 믿습니다.)

$$\int_{10}^{11} f(x)\,dx = \frac{15}{2}$$

$$\int_{11}^{12} f(x)\,dx = 8$$

$$\therefore \int_5^{12} f(x)\,dx = 41$$

문항 comment

이 문제를 해결할 때, 함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 마치 삼각형의 넓이를 구하는 것처럼 해결했는데, 그 이유는 Topic 11에서 배웠습니다. 바로 모든 삼차함수는 극대점과 극소점의 중심에 대하여 대칭이라는 성질 때문이죠. 아마 그것을 떠올리지 못했다면 그냥 쌩 계산을 통해서 규칙을 파악해야 하기 때문에 굉장히 어려운 문제가 되었을 것이고, 그런 측면에서 이 문제는 좋은 문제는 아닙니다.

답 : 41

70.

풀이1) 연속의 정의

구간별로 정의된 연속함수가 나왔네요. 그럼 경계점만을 살펴보면 충분할 텐데요, 일단 조건부터 봅시다. 구간 $(0,\ t)$에서는 $f(x)$가 다항함수로 주어졌으니 항상 연속입니다. 그리고 조건 (나)는 $f(x+t)$와 $f(x)$의 관계를 설명하고 있으니, 구간을 오른쪽이나 왼쪽으로 t의 배수만큼 움직여도 여전히 함수는 연속입니다. 즉, 개구간 $(kt,\ (k+1)t)$에서는 함수가 항상 연속이라는 뜻이죠. 그럼 연속인지 아닌지 아직 알 수 없는 점이 어딘가요? 바로 $x=kt$들입니다.

$$\lim_{x\to kt-} f(x) = \lim_{x\to t-} f(x+(k-1)t) = (k-1)bt + \lim_{x\to t-} f(x) = (k-1)bt + a(t^3-4t^2)$$

$$\lim_{x\to kt+} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x+kt) = kbt + \lim_{x\to 0+} f(x) = kbt$$

이 두 값이 일치해야 연속이므로 조건은

$$(k-1)bt + a(t^3-4t^2) = kbt \iff at^3-4at^2-bt=0$$

입니다. 이 값은 k와 무관하므로, $at^3-4at^2-bt=0$를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$와 실수 t에 대해 항상 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이 됩니다.

위 방정식을 만족하는 양수 t의 개수가 단 하나 존재해야 합니다. $t=0$은 조건과 관련 없는 근이므로 $at^2-4at-b=0$의 양수인 근이 하나일 때를 찾으면 충분합니다. $at^2-4at=b$로 변형하여 그래프의 교점의 위치를 파악해 보겠습니다.

1) $a<0$: $at(t-4)=b$입니다. 이 그래프는 구간 $(0,\ 4)$에서 양수이므로, 양수인 근이 단 하나만 존재하려면 근의 범위가 $t\ge 4$가 되어야 합니다. 따라서 $b\le 0$이면입니다. 이 때 경우의 수는 110가지입니다.
한편, $t=2$일 때, $b=-4a$를 만족하는 b가 존재해도 되니, $b=-4a$를 만족하는 순서쌍의 개수는 $(-1,\ 4)$, $(-2,\ 8)$로 2가지입니다.

2) $a=0$: 방정식이 $0=b$가 되는데, $b\ne 0$이면 근이 없고 $b=0$이면 모든 실수가 근이 되어 양수인 근이 단 하나 존재할 수 없습니다.

3) $a>0$: $at(t-4)=b$입니다. 이 그래프는 구간 $(0,\ 4)$에서 음수이므로, 양수인 근이 단 하나만 존재하려면 근의 범위가 $t\geq 4$가 되어야 합니다. 따라서 $b\geq 0$입니다. 이 때 경우의 수는 110가지입니다.
한편, $t=2$일 때, $b=-4a$를 만족하는 b가 존재해도 되니, $b=-4a$를 만족하는 순서쌍의 개수는 $(1,\ -4)$, $(2,\ -8)$로 2가지입니다.

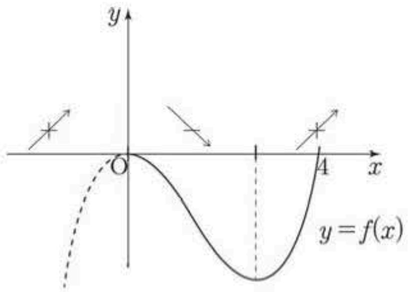
$\therefore\ 2+110+2+110=224$

풀이2) 그림을 이용한 풀이

우선 $a>0$이라 가정한 후에

$$f'(x)=3ax^2-8ax=ax(3x-8)$$

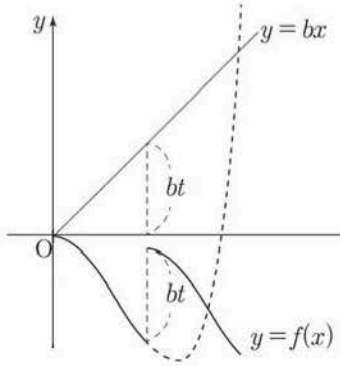
이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 개형을 그려보면 다음과 같습니다.



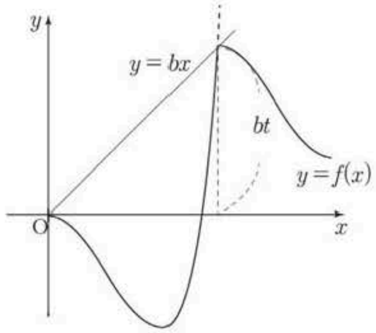
이제 $f(x)+bt=f(x+t)$라고 했으니, 함수 $f(x)$의 개형이 $t<x\leq 2t$에서 어떻게 그려질 것인지 살펴봐야 합니다. 함수 $f(x+t)$는 함수 $f(x)$에 bt만큼을 더한 것이니, t의 값을 하나하나 대입해보면서, 함수 $f(x+t)$를 추론해봅시다.

i) $b\geq 0$

만약 t의 값이 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 x좌표보다 작다면 함수 $f(x+t)$는 다음과 같이 그려질 것입니다.



따라서 함수 $f(x)$는 연속함수가 될 수 없습니다.
마찬가지의 논리로 t의 값이 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 x좌표보다 크다면 $f(x)$가 연속함수가 될 수 없습니다.
따라서 함수 $f(x)$가 연속함수가 되려면, t의 값이 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 x좌표가 되어야 합니다.

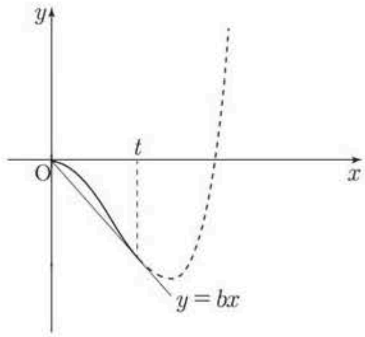


따라서 $a>0$, $b\geq 0$인 경우에서는 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 개수가 1개이므로 만족시키는 t의 개수도 1개입니다. 따라서 조건을 항상 만족시킵니다.

$\therefore\ a=1\sim10,\ b=0\sim10 \Rightarrow 110$개

ii) $b<0$

$b>0$에서 살펴보았듯이, 함수 $f(x)$가 조건을 만족시키도록 하는 t의 개수가 단 하나 존재한다는 것은 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 개수가 1이라는 말과 동일합니다. 따라서 그림과 같은 상황입니다.



따라서 $x=t$에서 $y=bx$와 $y=ax^3-4ax^2$이 접하므로

$$\begin{cases} at^2(t-4)=bt \\ a(3t^2-8t)=b \end{cases}$$

를 만족시켜야 합니다. 두 식을 나눠주면,

$$\frac{t-4}{3t-8}=1 \quad\Rightarrow\quad t=2$$

이므로 다시 대입하면, $b=-4a$를 만족시키는 $a>0$, $b<0$인 순서쌍의 개수입니다.

$(1,\ -4)$, $(2,\ -8)$

뿐이므로 총 2개가 됩니다.

따라서 $a>0$일 때 만족하는 총 순서쌍의 개수는 112개이고, $a<0$일 때도 완전히 그 규칙이 같으므로 112개가 됩니다.

그런데 $a=0$이라면 만족하는 t가 무수히 많이 존재하게 되므로 조건을 만족하지 않습니다.

$\therefore\ 224$

문항 comment

이 문제는 $f(x)$와 $f(x+t)$의 관계가 주기함수와 비슷하면서도 약간 다른 형태입니다. 이런 형태가 아직 기출 된 적이 없기 때문에 해석하기가 어려우셨을 수 있는데, $x=0,\ 1,\ 2$하나하나 대입해보면서 $f(x+t)$의 개형을 추론하기 위해 점을 하나하나 찍어보시면, 좀 더 조건이 와 닿으실 것 같습니다.

답 : 224

지은이의 말

"수학은 정직하게 공부하는 자만이 결국 승리를 쟁취하는 과목입니다."

이 책의 모토입니다. '수학'과 '정직'이 서로 어울리지 않는 조합으로 느껴지나요? 속세에는 수학 문제를 풀기 위한 온갖 편법들이 난무합니다. 편법을 쓰면 생각을 덜 하고도 문제가 쉽게 풀리고, 수학에 진절머리가 난 학생들에게는 이런 편법이 마법과도 같이 다가옵니다. 그러나 수학은 생각하는 학문입니다. 수학을 정복하기 위해 여러분은 끊임없이 생각을 해야 하며, 정직하게 공부해야만 합니다.

수학을 정직하게 공부한다는 것은 무슨 뜻일까요? 바로 모든 문제를 ①논리적으로, 그리고 ②교과과정 내의 지식으로 푸는 것입니다. 정직하게 공부한다는 것은 가장 정통한 방법으로 공부하는 것입니다. 정말 어렵습니다. 이렇게 공부를 하는 동안 '이 방향이 맞나..'라는 의구심이 계속 들 것이고, 길고 긴 풀이를 보면 '내가 시험장에서 이렇게까지 할 수 있을까?'란 생각을 계속 하게 될 겁니다. 실제로 수험생 중에 수학을 제대로 공부하려는 학생들은 2%도 되지 않습니다. 그리고 그 2%의 학생 중 끝까지 열심히 한 학생들이 상위 1%안에 들어 수학영역에서 100점을 받죠.

수학을 어렵게 공부해서 얻는 것이 무엇일까요? 수학이라는 과목은 어렵게 수련하여 마침내 단련된 여러분을 배신하지 않습니다. 여러분은 시험이 쉽든 어렵든 언제나 안정적으로 1등급을 쟁취할 수 있는 실력을 갖추게 됩니다. 이것이 모든 수험생들이 원하는 바가 아닐까요? 수능까지의 기간은 긴 것 같으면서도, 막상 실력이 올랐나 싶을 때면 시험은 어느새 목전에 닥쳐 있습니다. 그렇기에 수능에서는 선택과 집중을 제대로 한 사람만이 마지막에 빛을 볼 수 있습니다.

저희는 이 책이 기존의 어느 책보다도 진보적인 명작이라고 감히 자부합니다. 한국교육과정평가원에서 나온 수능 출제 매뉴얼, 수능 학습 방법 안내서 및 수능과 관련된 수많은 논문 자료, 교사용 지도서, 교육과정 해설서와 7종의 교과서를 모두 비교 분석하여 책을 집필한 경우는 '수학의 명작' 시리즈가 유일합니다. 1994년도부터 출제된 모든 평가원 기출문제들을 철저히 분석하여 다각도에서 풀이를 개발하였고, 그 중 가장 필연적인 풀이를 본서를 통해 여러분에게 선사해 드리려 합니다.

하지만 아무리 이 책이 전국에서 가장 좋은 책이라 한들, 여러분이 열심히 함께 해주지 못한다면 반쪽짜리 명작에 불과합니다. 이제 여러분이 따라올 일만 남았습니다. 여러분의 가슴 속 뜨거운 열정을 진심으로 응원합니다.

–저자진 일동–

수학의 명작

누구를 위한 책인가?

이 책은 수능 수학영역에서 만점을 받기 원하는 모두를 위한 책입니다. 여러분의 끈기와 노력만 있다면 이 책을 통해 누구나 수학영역 만점을 받을 수 있습니다. 가능합니다.

하지만 이 책의 권장 학습 대상은 존재합니다. 이 책은 **개념 학습을 적어도 한 번은 하고 온 학생들을 독자로 가정합니다.** 개념 학습을 제대로 하지 않았다면 교과서를 최소 한 번은 보고 와야 합니다. 평소에 모의고사에서 3등급 이상을 받았다면 괜찮지 않을까 합니다.

그럼 만약 본인이 4등급 이하라면 이 책을 볼 수 없을까요? 볼 수 있습니다. 하지만 고난의 길을 걸을 준비는 하고 와야겠습니다. 책을 보는 속도도 현저하게 떨어질 것이고 중간에 책을 집어 던지고 싶을 수도 있습니다. '내가 이 문제를 굳이 이렇게까지 풀어야 되나' 하는 부분도 남들보다 더욱 많을 것이고, 한 번 봐서는 이해되지 않는 부분이 대부분일 수도 있습니다.

그럼 본인이 1등급이라고 해서 얻어갈 것이 없는 책인가? 절대 그렇지 않습니다. 여러분은 지금까지 잘못된 방법으로 공부를 했을 확률이 매우 높습니다. 아마 Stage 0 만 읽어보아도 많은 분들이 그동안 얼마나 잘못된 방법으로 공부를 해왔는지 느낄 겁니다. 책을 계속 보다 보면 지금까지 여러분이 알던 것은 빙산의 일각이었다는 것을 알게 될 것입니다.

여러분의 목표는 1등급이 아니라 안정적인 100점을 맞는 것입니다. 수능이 어떻게 나와도 안정적인 점수를 받기 위한 비법은 간단합니다. 아주 정직하고 끈기 있게 공부하는 것, 그 뿐입니다. 본인이 수학실력이 조금 된다고 해서 건성으로 책을 볼 거면 차라리 빨리 책을 덮는 것을 추천합니다. 그럴 바에는 본인이 좋다고 생각하는 원래의 공부 방법으로 밀고 나가세요. 그것이 성적 향상에 도움이 더 될 테니까요.

여러분의 현재 등급대가 어찌됐든 겸손한 자세로 책의 모든 부분을 곱씹을 만큼 열심히 본다면 여러분은 남부럽지 않은 수학실력을 가지게 될 것입니다. 다시 한 번 강조하지만 수학영역은 뜨거운 열정과 많은 노력을 요구합니다. 그리고 본인이 얻게 되는 보상은 결국 노력을 저버리지 않을 것임을 명심하세요.

이 책이 "명작(名作)" 인 이유

1. 내용 서술이 어느 책보다도 자세합니다.

학생의 공부 편의를 위하여 시중에서 여러 권의 교과서를 구해 비교 · 분석했습니다. 수능에서 강조되는 단원, 학생들이 어려워하는 단원은 특히 더욱 자세히 서술하였고, 수능에 나오지 않는 부분들은 과감히 축소시켰습니다. 또한 가독성을 높이기 위해 개념서나 참고서의 양식에서 탈피해 마치 책을 읽는 것 같은 느낌을 주었습니다. 그동안 많은 학생들은 관찰하며 학생들이 어떤 부분을 어려워하는지 분석했습니다. 문제를 해결하는 알고리즘이 이 책 곳곳에 숨어 있으며, 학생들이 어려워하거나 헷갈려 하는 부분, 많이 실수하는 부분은 반복적으로 표기하여 강조했습니다.

2. 단원을 Topic으로 나누었습니다.

책의 구성단위가 'Topic(토픽)'으로 되어있습니다. 수능에는 문제들이 패턴화되어 출제됩니다. 따라서 교과서의 단원을 그대로 따르는 것보다 수능 문제가 출제되는 방향에 맞추어 공부하는 것이 올바른 방법입니다. 자주 출제되는 영역이나 중요한 이론을 묶어 하나의 토픽으로 분류하였고, 각 토픽별로 문제를 푸는 알고리즘과 논리의 흐름을 습득하도록 합니다.

3. 기출문제와 개념을 유기적으로 연결시켜주는 최초의 책입니다.

'배운 개념을 사용해서 문제를 풀어라.' 많이들 들어보셨지만, 막상 배운 개념을 문제에 곧바로 적용해 보라고 하면 난감한 게 현실입니다. 이러한 개념과 문제 사이의 괴리감을 해결하기 위해 이 책에는 평가원 기출문제를 대부분의 예제(EXAMPLE)로 활용하였고, 그 토픽에서 배운 내용들로 문제를 분석하였습니다. 각 토픽 마지막에는 토픽에서 배운 내용을 직접 적용해볼 수 있는 VIP 문항을 수록하였습니다.

4. 기출문제뿐만이 아닙니다.

기출문제를 완벽하게 분석한 이들을 위해, 수능 100점을 넘어선 실력을 갖추고 싶은 이들을 위해 고난도 자작 문제를 책 곳곳에 심었습니다. 또한 Stage 2에는 여러분의 상상을 초월할 최고난도 문제들이 실려 있습니다. 이 중에는 수능 21, 30번에 버금가는 문제, 혹은 그 이상의 난도를 자랑하는 문제 또한 많습니다. Stage 1에서 연습한 내용을 완벽하게 소화시켜줄 문제들이 여러분들을 기다리고 있습니다.

책의 구성과
학습방법

미적분II는 (상)권 (하)권 두 개로 나뉩니다.
총 3개의 Stage(0~2) 와 많은 숫자의 Topic으로 구성되어 있습니다.
Stage 0은 수학공부의 갈피를 잡아주는 부분입니다. 본격적인 내용은 Stage 1부터 시작하며, Stage 1은 **본문**과 **VIP문제**로 구성됩니다. 본문에는 개념설명과 EXAMPLE 문제가 있습니다.
Stage 2는 기출문제 외의 새롭게 풀어볼 수 있는 문제들도 구성이 돼있습니다. 각 파트에 대해 상세하게 알아봅시다.

1. Stage 1의 본문

– **개념설명** : 교과서에 있는 모든 내용을 수능의 형태에 알맞게 재구성하였습니다. 서술의 논리적 흐름을 강조하였으며, 이해하기 쉽도록 서술하였습니다. 한 개념을 설명한 다음에는 개념 이해를 위한 예제(EXAMPLE)를 넣었고, 곳곳에 내용을 압축하여 보여주는 정의, 정리, 알고리즘과 같은 박스를 실었습니다.

– **EXAMPLE 문제** : 교과서 예제, 평가원 기출문제와 이를 변형시킨 문제들이 주를 이룹니다. 난이도는 문제마다 다르며, 개념 설명과 유기적으로 연결되어 있습니다. 개념을 충분히 숙지하려면 모든 예제 문제를 완벽하게 풀 수 있을 때까지 반복하여 연습해야 합니다.

– **EXAMPLE 분석** : 배운 개념이 실제로 문제 속에 어떻게 적용되었는지 유기적으로 보여줍니다. 일반 해설보다는 훨씬 자세하며 개념 설명과 연결되어 있다고 생각해도 무방합니다. 처음 문제를 봤을 때 자신이 구사한 풀이와 비교해 봅시다. 또한, 분석은 단순한 해설이 아니고 엄연한 본문의 일부이니 문제를 풀었다 하더라도 반드시 보고 넘어가야 합니다.

이제 본문에 등장하는 박스 속 용어들에 대해 알아봅시다.

– **정의** : 어떤 개념이나 용어의 뜻을 명확하게 정한 문장. 수학의 가장 밑바닥입니다.

– **성질** : 정의나 정리로부터 파생되는 대상의 특징들입니다.

– **정리 :** 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 앞으로 여러 가지 성질을 증명할 때 활용 되는 것. 정리로 표현된 것 역시 반드시 정의나 성질을 이용하여 증명할 수 있어야 하며, 암기하고 있어야 합니다.

– **따름정리(COROLLARY) :** 정리나 성질로부터 파생된, 정리보다는 덜 중요한 내용입니다. 반드시 알고 있어야 하는 것은 아니지만 문제를 풀 때 도움을 줄 수 있는 선에서 수록하였으며, 따름정리를 암기하려면 증명까지 같이 숙지해 두어야 합니다.

– **Mini Lecture :** 학생들이 많이 하는 실수나 자주 쓰이는 스킬을 정리해 둔 부분입니다. 꼭 체크하고 넘어가도록 합니다.

– **Algorithm :** 여러 가지 성질들과 정리가 연계되는 방식이 이미 유형화된 문제들이나, 특별히 머릿속에 도식화하여 정리했으면 하는 부분들을 묶어서 나타낸 박스입니다.

– **Caution! :** 학생들이 많이 실수하는 부분이나 주의해야 할 내용을 적어놓은 박스입니다.

– **각주 :** 가끔식 내용을 읽다보면 [1] 와 같은 주석이 달려 있고 이는 페이지의 하단에 더 추가적인 설명이 되어 있습니다. 여기에는 이해를 돕는 내용뿐만 아니라 중요한 내용도 있으니 자세히 살펴보길 바랍니다.

1) 여기 이런식으로 각주가 달립니다.

2. Stage 1 – VIP 문제들

Very Important Problems의 약자로, 무조건 풀고 가야 하는 중요한 기출문제들과 일부 자작 문제들로 구성이 되어 있습니다. 자작 문제들은 연습문제 정도로 생각하면 됩니다. VIP 문제를 풀기 전에 개념이 이미 탄탄하게 학습된 상태여야 하며, EXAMPLE 문제를 완벽히 풀 줄 알아야 합니다. VIP 문제의 해설은 해설지에서 찾아볼 수 있습니다.

3. Stage 2 – 새롭게 보는 문제들

Stage 2는 고난도 자작 문제를 엄선해, Stage 1에서 배운 내용들을 적용하고 수학적 사고력을 신장시킬 수 있는 코너입니다. 앞선 Topic에서 배운 것을 새로운 문제에 어떻게 적용하는지를 배워 가시면 됩니다. 모든 문제의 해설마다 "이 문제에서 얻어갔으면.."하는 내용이 담겨있기 때문에, 문제를 풀어냈더라도 **해설을 한 번쯤은 읽어주시기 바랍니다**.

Stage 2에 있는 문제들은 기출문항의 트렌드에 맞춰서 저자들이 직접 출제한 문항, 리듬농구 모의평가에 수록되었었던 문항 중 우수한 문항만을 뽑아서 만든 Topic입니다. 정말 어려운 문제가 있을 수도 있고, 한 문제지만 논리의 호흡이 정말 긴 문제가 있을 수도 있습니다. 이 Topic을 풀기 전에 우선 Stage 1를 완벽하게 체화하는 것을 강력하게 권고합니다. 또, 간혹 있는 '**지적 유희 문제**'는 미적분II의 내용으로 풀 수는 있으나 정말 어렵고 수능과 거리가 어느정도 있기 때문에, 심장이 약하신 분이나 노약자분들은 푸는 것을 삼가야 할 문제입니다. 모든 '**지적 유희 문제**'의 **문항 comment에** 해당 문제가 수능스럽지 않은 이유를 적어놓았습니다. 모든 문제의 해설에 **문항 comment**가 있으며, 문제를 풀었더라도 꼭 읽고 넘어가시면 좋겠습니다.

Exercise를 포함한 본 교재의 모든 문제들에서 난이도에 대한 선입견을 갖는 것을 막기 위해 배점은 삭제하였으며, Stage 2에 실린 문제들의 순서는 단원 및 난이도와 무관합니다.

이제 이 책을 학습하는 방법을 알아보겠습니다.

– 책을 처음 보는 학생들을 위해–

Stage 1을 풀기 전에 꼭 **무조건** Stage 0을 2회 정도 정독하시기 바랍니다. Stage 1의 각 Topic에서 본문을 한 번 읽었다고 곧바로 VIP 문제로 넘어가지 말고, 본문과 EXAMPLE 문제를 반복하여 숙지한 후에 넘어가시기 바랍니다. 특히 익숙하지 않은 Topic일수록 한 Topic을 여러 번 반복하는 것이 중요합니다. 하지만 처음 봤을 때 모든 것을 다 이해하고 넘어가는 것은 불가능하므로, 해당 Topic에 있는 내용을 90% 정도 숙달하면 다음 Topic으로 넘어가세요. 여기서 90% 정도의 숙달이라고 했다고 해서, 대충 보란 뜻은 절대 아닙니다. 얼마나 상세하게 공부를 해야 하는지는 Stage 0에서 자세하게 다룹니다.

– Stage 1을 1회독한 후 –

Stage 1을 위에 설명한 방법대로 1회독을 마쳤다면 Stage 2로 가지 말고 Stage 1을 많게는 4번까지 반복하여 보시기 바랍니다. Stage 2에는 역대 기출문제들보다도 어려운 새로운 문제도 실려 있습니다. 하지만 여러분이 기출문제를 완벽히 풀 수 없다면 새로운 문제들을 푸는 것은 아무런 의미가 없습니다. Stage 1까지 완벽히 소화를 한 분들만 Stage 2를 보기 바랍니다. 어떤 시중의 문제보다도 기출문제를 학습하는 것이 우선입니다. 1등급을 받기 위해서 Stage 2를 꼭 풀어야 하는 것도 아니며, 수능 전까지 Stage 2를 꼭 보고 시험장에 들어가야 하는 것도 아닙니다. 다시 한 번 강조하지만, 기출문제를 완벽하게 학습하는 게 항상 우선입니다. 또한 Stage 0은 수학 공부법의 기초이므로 내용을 잊어버릴 때쯤이면 다시 읽어주도록 합시다. Stage 1를 2회독 할 때부터는 본인이 헷갈리는 개념이나 증명, 까먹었던 내용, 그리고 어렵게 다가오는 문제들을 꼭 체크하고 보시기 바랍니다. 나중에 시간을 단축시켜줄 수 있는 유용한 공부 방법입니다.

– 수능이 가까워졌을 때 책의 활용법 –

모든 Stage를 적어도 3~4번가량 정독한 경우, 본인이 모르는 문제와 헷갈렸던 개념들이 무엇인지 충분히 알 수 있습니다. 이를 바탕으로 계속 훑어보면서, 중요한 기출문제와 멀어지지 않도록 연습을 지속적으로 해줍니다. 해당 연도에 나온 6월, 9월 모의평가가 어떤 Topic과 연관이 되어 있는지, 어떤 개념, 그리고 전에 나왔던 어떤 기출문제와 연결이 되어 있는지 자세히 살펴봅니다.

“

목차

”

Stage. 0 위대한 가이드라인

Stage. 1 건축의 시작

미적분 II (상)

Stage. 2 완벽을 넘어서

STAGE.

0

“

위대한 가이드라인

”

1. 미적분 I 을 꼭 공부해야 하나요?
2. 수학을 대하는 이과생의 자세
3. 도구의 수의 정리
4. 논리적 접근법
5. 발문에 따른 풀이의 필연성
6. 기출문제의 분석

1. 미적분 I 을 꼭 공부해야 하나요?

"저는 학교나, 학원, 혹은 인강으로 이미 미적분I을 한 번 훑었는데 굳이 또 해야 될까요?"
"저는 미분계수의 정의가 뭔지도 알고, 미적분의 기본정리가 뭔지도 다 아는 것 같은데 미적분I을 다시 봐야 할까요?"

수능 간접 범위 학습의 필요성은 예전부터 논란이 많았습니다. 다른 과목들에도 시간을 많이 투자해야 해 1분 1초가 아까운 이과생 입장에서는 충분히 고민해볼 수 있는 문제죠. 시간이 아까운 수험생들을 위해 일단 이 문제에 대한 대답부터 드리고 그 이유를 구구절절 설명해보겠습니다.

"네, 무조건 하세요. 그리고 수학의 명작 미적분II를 보고 싶다면 미적분I도 수학의 명작으로 공부할 것을 적극 추천 합니다."

저 답에 대한 이유는 다음 문제 하나로 종결할 수 있습니다.

> $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)
>
> (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다.
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.
>
> $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [2017 수능 30]

2011수능 이후로 미적분에서 최고난도 문제로 꼽을 수 있는 정답률 1% 미만의 문제입니다.
수능 역사상 가장 어려웠다고 평가받는 미적분 문제인 2011학년도 수능 가형 24번의 정답률이 4%였음을 감안하면 굉장히 낮은 수치입니다.

30번으로 출제된 이 문제는 어려운 문제이고 엄청나게 많은 논리가 얽혀 있기 때문에 이 책을 처음 볼 시점에서 풀 줄 알아야 하는 건 아니며, 풀이를 한 번에 이해할 필요도 없습니다.

문제를 한 번 음미해보세요. 기출문제를 어느 정도 학습한 학생들은 눈치 챘을 겁니다. 이 문제의 풀이과정 중 대부분은 미적분I의 '핵심', 그 중에서도 수학의 명작 Topic 8의 인수정리 내용과 Topic 6의 도함수의 활용에 대한 내용입니다.

혹시 해설을 스포일러 당하지 않고 나중에 본인의 힘으로 풀고 싶은 학생은 다음 풀이를 건너뛰길 바랍니다.

2017 수능 문제를 한번 분석해 보겠습니다.
가장 먼저 짚고 넘어가야 할 조건들을 살펴봅시다.
- $f(x)$는 어떤 함수의 형태를 띠고 있는지 모르고, 정의역은 $\{x|x>a\}$입니다.
- $g(x)=-x^4+\ldots$의 형태를 띤 다항함수이기 때문에 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능합니다.

(가) 조건부터 천천히 봅시다. 식

$$g(x)=f(x)(x-a)$$

을 통해 알 수 있는 사실은, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 때문에 당연히 $x>a$에서도 미분가능하고, $f(x)$ 또한 정의역 내에서 미분가능한 함수임을 알 수 있습니다.

여기서 잠시 (나) 조건으로 가기 전에 (가)의 식으로부터, $g(x)$를 $f(x)$의 형태를 통해 추론하거나 그 반대로 $f(x)$를 $g(x)$를 통해 추론해 봐야겠다는 생각을 해볼 수 있습니다.
$\alpha<\beta$라고 해도 일반성을 잃지 않습니다.

(나) 조건을 곧바로 수학적 표현으로 치환하면 다음과 같은 결과를 얻습니다.

$$f(\alpha)=f(\beta)=M\ \ (M>0)\ \cdots\cdots\ \boxed{ㄱ}$$

$$f'(\alpha)=f'(\beta)=0\ \cdots\cdots\ \boxed{ㄴ}$$

이제 이를 (가) 조건과 엮어봅시다.
일단 f'에 대한 조건이 있기 때문에 (가)의 양변을 x에 대해 미분해보면

$$f(x)+(x-a)f'(x)=g'(x)$$

가 나오고, 이 식에 $\boxed{ㄱ}$ 과 $\boxed{ㄴ}$ 을 이용하면

$$g(\alpha)=M(\alpha-a),\ g(\beta)=M(\beta-a)\ \cdots\cdots\ \boxed{ㄷ}$$

$$g'(\alpha)=g'(\beta)=M\ \cdots\cdots\ \boxed{ㄹ}$$

이 나옵니다.

여기서 다시 $f(x)$의 식/그래프를 통해 문제를 풀어 나갈지, $g(x)$를 통해 파악해 나갈지 곰곰이 생각을 해봅니다. 하지만 문제에서 $g(x)$는 다.항.함.수 라고 주었습니다. 즉 우리는 $g(x)$를 '가정' 하기가 더 편리하다는 뜻입니다.

(가) 조건과 (나) 조건을 이용하여 $g(x)$를 추론하기 위해선 빼기함수와 인수정리를 이용하는 것이 용이해 보입니다.

$h'(x)=g'(x)-M$ 으로 두면 $\boxed{ㄹ}$에 의해 $h'(\alpha)=h'(\beta)=0$ 입니다. 빼기함수의 성질을 제대로 이용하기 위해선 $h(\alpha)=h(\beta)=0$ 를 만들어 주어야 합니다.

$$h(x)=g(x)-M(x-a)$$

라 하면, $\boxed{ㄷ}$ 에 의해 $h(\alpha)=h(\beta)=0$ 또한 성립합니다.
$g(x)$는 사차함수, $M(x-a)$는 일차함수이므로 다음을 얻습니다.

"$h(x)$또한 최고차항의 계수가 -1인 사차함수이다."

다항함수 $h(x)$가 $h(\alpha)=h'(\alpha)=0$ 이고 $h(\beta)=h'(\beta)=0$ 이면, 인수정리와 미분의 활용에서 배웠던 따름정리에 의해

$$h(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2Q(x)$$

로 둘 수 있습니다. $h(x)$는 사차함수고 최고차항의 계수가 -1이므로 $Q(x)=-1$입니다.
아까 $h(x)=g(x)-M(x-a)$로 두었죠? 즉,

$$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+M(x-a)$$

를 얻습니다.

(다) 조건에 의해
(함수 $f(x)$의 극점의 개수) > (함수 $g(x)$의 극점의 개수)입니다.
그런데 (나) 조건을 통해서 $f(x)$의 극댓값이 2개 이상인 것을 확인할 수 있네요.

하지만 여기서 알 수 있는 것이 한 가지 더 있죠. 극대에서 $f'(x)$의 부호는 $(+)\rightarrow(-)$로 변합니다.
$f'(x)$는 정의역 내에서 연속함수 이므로, 사이값 정리와 극댓값의 성질에 의하여
"$f'(x)$는 α와 β 사이에 부호가 $(-)\rightarrow(+)$로 변하는 지점 γ를 가진다"
는 사실을 알 수 있습니다. 즉, $f(x)$는 극솟값 $f(\gamma)$를 가지게 되고, $f(x)$의 극값은 최소 3개임을 알 수 있습니다.

여기서 다시 (가) 조건을 볼 필요가 있습니다. 아까는 그냥 양변을 미분해줬던 $(x-a)f(x)=g(x)$를 $f(x)$의 입장에서 다시 서술해 봅시다. $x \neq a$이므로 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}$이고, 이를 양변 x에 대해 미분하면

$$f'(x)=\frac{g'(x)(x-a)-g(x)}{(x-a)^2}$$

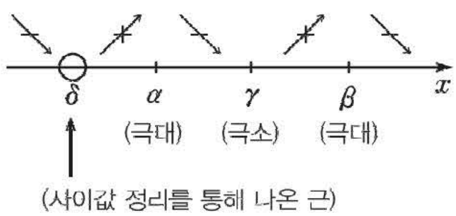
입니다. $f(x)$의 정의역이 $x \neq a$ 이고 $(x-a)^2>0$ 이므로 $f(x)$의 극점을 찾으려면 $f'(x)$의 분자의 부호만 따지면 됩니다. 분자를 새로운 함수 $I(x)=g'(x)(x-a)-g(x)$로 두면
$I(x)$는 최고차항의 계수가 -3인 사차함수입니다.

또한 (나) 조건에 의해 $I(\alpha)=I(\beta)=I(\gamma)=0$이고 다항함수의 성질에 의해

$$\lim_{x\to\infty} I(x)=\lim_{x\to-\infty} I(x)=-\infty$$

이므로 이를 $I(x)$의 부호표에 나타내면 다음과 같습니다.

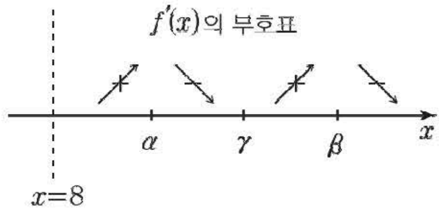
I(x)의 부호표



즉, 사이값 정리에 의하여 방정식 $I(x)=0$은 $x=\delta$라는 근을 하나 더 갖는다는 사실을 알 수 있습니다.

이 때 δ의 값이 a보다 큰지 작은지에 따라서, 즉 δ가 정의역에 포함되는지에 따라서 $f(x)$의 극값의 개수가 결정됩니다. $I(x)$에 $x=a$를 대입해보면 $I(a)=-g(a)=(a-\alpha)^2(a-\beta)^2>0$이므로 $\delta<a$입니다.
따라서 δ는 정의역 밖에 있는 수고, $I(x)$에 따른 $f'(x)$의 부호표는 최종적으로 다음과 같아집니다.

f'(x)의 부호표



이를 보면 $f(x)$의 극값의 개수는 3이고, $g(x)$의 극값의 개수는 2 이하가 되어야 합니다.

최종 단계입니다. $g(x)$를 그리기 위해 $g'(x)$를 구하면

$$g'(x) = -4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

이고, $g'(x)$의 근의 개수는 M의 값에 따라 달라짐을 알 수 있습니다.

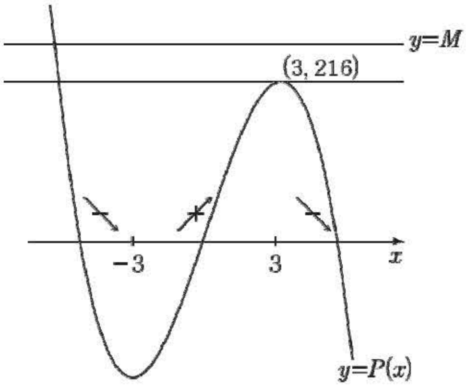
따라서 $y=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$와 $y=M$의 그래프를 비교해야 합니다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$이니까 $\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$이라 하면[2],

$p(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$에서

$$p(x)=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})=-4x(x^2-27)$$

$$p'(x)=-12x^2+108=-12(x-3)(x+3)$$



이므로 함수 $p(x)$의 극댓값은 216이고, $M \geq 216$입니다. 따라서 M의 최솟값은 216입니다.

답 : 216

굉장히 긴 분석이었습니다. 분석을 해본 결과 역시 수능문제는 아름답습니다.

가장 중요하게 쓰인 성질을 순서대로 나열하면

1. 삼차함수 및 사차함수의 개형
2. 극값과 도함수의 활용
3. 빼기함수를 이용한 인수정리의 활용

문제의 풀이과정 중에서 몫의 미분법[3]을 제외한 나머지는 모두 다 미적분I의 핵심 내용입니다. 이것이 의미하는 바는 말하지 않아도 알겠죠? 미적분I도 성실히 공부해야 풀 수 있는 문제가 수능 최고난도인 30번에 출제되었다는 이야기입니다.

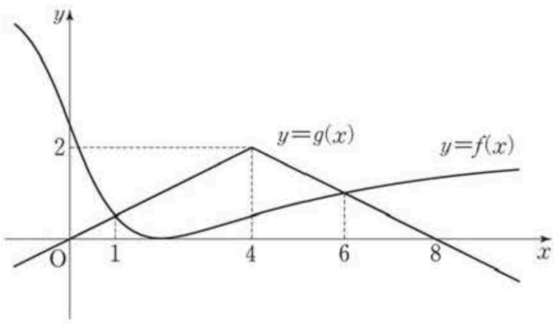
2) 계산의 편의성을 위함입니다. 이것은 계산을 편리하게 하기 위한 스킬이고, $b=\alpha+6\sqrt{3}$을 그냥 때려 넣어 계산해도 됩니다. $g(x)$의 극값의 개수 및 극값과 이를 평행이동 한 그래프인 $g(x+k)$의 극값의 개수 및 극값은 동일하므로 이렇게 가정해도 아무런 문제가 없는 것입니다.

3) 그나마도 단순 계산.

이렇게 놓고 봐도 미적분I을 해야 될 이유는 차고 넘치지만 여러분이 미적분I을 해야 되는 이유는 수능 30번에 미적분I 문제가 나왔기 때문만은 아닙니다. 2017학년도 수능에서야 미적분I의 인수정리의 활용에 대한 내용이 나왔지만, 평가원은 우리의 예상을 벗어나는 30번 문제를 내기 때문에 내년에도 미적분I 고난도 문제가 나온다는 보장은 그 어디에도 없습니다. 여러분이 미적분I을 공부해야 하는 더 중요한 이유는 따로 있습니다. 미적분II는 미적분I 위에 쌓아가는 과정이기 때문입니다. 수학의 명작 미적분I을 공부하신 분들은 이 책이 왜 수학을 "건축"에 비유했는지 알 것입니다. 다시 한 번 상기시켜 보자면, 건물은 기초 토목의 단계를 거치고, 기둥을 세우고, 그 기둥을 기반으로 하여 비로소 세워지는 것이기 때문에 어느 한 부분이 부실하면 건축물 전체가 위험해지는 사태가 발생합니다. 수학도 마찬가지입니다. 여러분이 논리적으로 문제를 풀려면 정의와 정리, 그리고 성질들을 제대로 익혀야 합니다. 그래야 그 위에 새로운 논리를 쌓아갈 수 있는 거고요. 미적분I은 미적분II를 공부하기 위한 기둥과도 같습니다.

매 수능의 최고난도 문항이 미적분에서 출제되고 있기에 미적분이 이과 수학의 꽃이라는 말이 있습니다. 그러나 미적분의 핵심 내용은 모두 미적분I에 있습니다. 그리고 이를 제대로 알지 못한 상태에서 미적분II을 공부하는 것은 큰 의미가 없습니다. 계속 여러분에게 논리적으로 공부하라고 강조하고 있는데, 도대체 논리적으로 공부하는 게 무엇이고 미적분I의 내용이 부족하면 뭐가 문제인지 기출문제의 예시로 역추적을 한번 해보겠습니다.

함수 $f(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{10x}{x^2+4}$와 함수 $g(x)=\dfrac{4-|x-4|}{2}$의 그래프가 그림과 같다.



$0 \le a \le 8$인 a에 대하여 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값은? [2017 06 평가원]

이 문제는 2017학년도 6월 모의평가에 20번으로 나왔던 문제이며 난이도는 그리 높지 않습니다. 이 문제의 범위는 미적분II지만, 사실 문제의 핵심은 여러분이 미적분I을 제대로 공부했는지에 있습니다. 미적분의 기본정리와 도함수와 극값에 대한 관계를 제대로 알지 못하면 계산이 매우 복잡해지기 때문이죠. 미적분I의 내용을 제대로 모르면 애초에 문제에서 구하라고 하는 적분식의 최솟값을 어떻게 구해야 할 지 감이 오지 않을 것입니다.

이 문제를 보고 미적분I의 내용이 잘 체화되어 있지 않은 여러 경우를 살펴보겠습니다.

1. 문제에 주어진 그림에다 직선 $x=a$ 를 그어보면서 직선이 어디에 있어야 적분식의 값이 최소가 될 지를 찾아 헤매는 경우. 문제 자체를 **아예 잘못 접근한 경우**입니다.

2. 미적분의 기본정리를 제대로 활용하지 못하는 경우. 저 $f(x)$와 $g(x)$가 실제 함수로 주어졌으므로, 적분식에 각 함수를 대입한 후 정적분을 하여 a에 대한 식으로 정리하는 것입니다. 이는 a에 대한 함수 $h(a)$이므로 이를 다시 미분해서 $h'(a)=0$이 되는 지점을 찾습니다. 이 또한 매우 돌아가는 풀이입니다. 식을 굳이 쓸데없이 적분한 후 다시 미분하고 있죠. 이 정도면 거의 계산 폭탄입니다.

그러면 이 문제를 정확하게 해석해 봅시다.

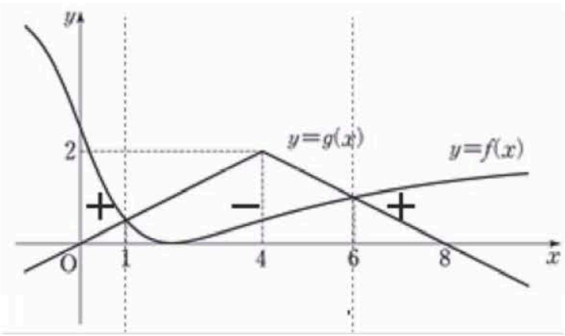
$\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$ 에서 변수는 a이므로 이는 결국 a에 대한 함수 $h(a)$로 나타낼 수 있습니다.

따라서

$$h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$$

이고 $h(x)$의 정의역은 $0 \le a \le 8$입니다. $h(a)$의 최솟값을 구하기 위해서는 도함수 $h'(a)$의 부호표를 구하여 $h'(a)=0$이 되는 점 중 극값을 찾아야 합니다.

$h'(a)$는 **미적분의 기본정리에** 의하여 $h'(a)=f(a)-g(a)$이고, 주어진 그림을 활용하여[4] 부호표를 그리면



(현장감을 위해 화질을 포기했습니다.)

입니다. 따라서 함수 $h(x)$는 $x=6$에서 극솟값을 가집니다.

즉, 최솟값은 $h(0)$ 또는 $h(6)$에서 발생하는데, 계산해보면 $h(6)$이 더 작으므로

$$h(6)=\int_0^6 f(x)dx+\int_6^8 g(x)dx$$ [5]

를 구하면 됩니다.

4) 평가원은 절대로 그림을 그냥 주지 않습니다. 그림이 주어져 있으면 활용을 합시다.

5) 구체적인 계산은 이후에 나올 VIP에서 끝까지 해 봅시다.

여러분 모두 마지막 풀이처럼 해석을 잘 하셨나요? 만약에 그렇지 못했다면 미적분I을 다시 보고 오시는 것을 추천해 드립니다. 미적분 기출문제의 다수는 미적분I의 개념을 문제풀이의 핵심으로 삼고 있습니다. 이 책을 읽으면서 잘 살펴보시면 알게 될 겁니다. 이 정도면 미적분I을 꼼꼼히 공부해야 하는 이유를 충분히 설명한 것 같습니다.

그러나 아직 맨 처음 질문에 대한 완벽한 답이 나온 것 같지는 않습니다.
“그럼 미적분I을 보는데 왜 굳이 수학의 명작으로 보라고 하나요? 책장사 하는 것 같은데요?”

일단 가장 큰 이유는, 이 책에 나오는 대부분의 알고리즘이 수학의 명작 미적분I로부터 이어지기 때문입니다. 수학의 명작 미적분I을 본 학생과 보지 않은 학생은 실제로 이 책에서 받아들이는 내용의 깊이와 받아들이는 속도가 상당히 다를 겁니다.

미적분I만 따로 공부할 시간이 없다면, 미적분II를 보면서 체화되지 않은 미적분I 내용이 보일 때마다 미적분I을 틈틈이 찾아보는 것을 추천합니다. 이미 수학의 명작 미적분I을 공부한 학생도 수험기간 동안 절대로 미적분I을 소홀히 해서는 안 됩니다. 이 책을 보다가도 본인이 미적분I의 어떤 개념을 헷갈리거나 잊어버리면 바로 찾아보는 습관을 길러야 하고, 일정한 기간마다 주기적으로 복습해 주어야 합니다.

‘미적분I을 공부했다.’ 함은 다음을 모두 할 수 있음을 말합니다.

1. 미적분I의 개념이 주어지면 A4에 그 개념이 의미하는 바를 정확한 수학적 표현으로 써내려갈 수 있으며, 증명까지 완벽하게 할 수 있다.
2. 미적분I 범위의 기출문제를 논리적으로 풀 수 있다.
3. 미적분II 문제를 풀면서 미적분I의 어떤 내용이 쓰였는지 모두 뽑아낼 수 있다.

분명 이것을 제대로 할 수 있는 학생은 많지 않을 것입니다.
만약 이 척도가 너무 애매하게 느껴지거나 이 셋에 모두 자신 있는 학생들을 위하여 다음 페이지에 미적분I 문제 몇 개를 준비했습니다.

이 문제들은 모두 수학의 명작 미적분I에 수록되어 있는 문항들입니다.

1. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{|f(x)|}{x-1}=f(2)$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

2. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{2k}{n}\right)=15$를

만족시킬 때, $\int_1^{10} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

3. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, a의 최솟값을 m이라 하자. a가 최소가 되게 하는 함수 $f(x)$에 대해 $f(m)$의 값은?

(가) $f(0)=0$
(나) $x \geq a$인 모든 실수 x에 대하여
$\int_1^x f(t)\,dt \geq 0$이다.

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$
④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

4. 함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2$ 의 극점의 개수가 1일 때, $f(1)$의 최솟값은? (단, $a \geq -1$이고, a, b는 상수이다.)

① 0　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{4}{9}$

5. 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $|ak|$ 의 값을 구하시오.
(단, k 는 양수이고, $a \neq 4$ 이다.)

(가) 모든 실수 x 에 대하여
$$\left(\int_1^x f(t)dt\right)^2 + 2k\int_{-2}^x f(t)dt + k^2 \geq 0 \text{ 이다.}$$
(나) x 에 관한 방정식
$$\left(\int_1^x f(t)dt\right)^2 + 2k\int_{-2}^x f(t)dt + k^2 = 0$$
의 실근은 $x=4$, a 뿐이다.

미적분I의 꽤나 핵심적이고 어려운 내용들이 녹아들어가 있는 문항들을 수록한 것이니 이 5문항을 적당한 시간 내에 막힘없이 잘 풀 수 있다면 미적분I 학습이 잘 되어 있다고 생각할 수 있습니다.

번호	1	2	3	4	5
정답					

수학의 명작은 원래 이과생들을 위해 미적분I의 중요한 내용을 죄다 미적분II에 넣으려고 시도했고, 미적분I 책 없이도 최대한 미적분II를 공부할 수 있도록 노력했습니다. 하지만 책을 두 권으로 분리해야 할 정도로 교재의 양이 눈덩이처럼 불어났습니다. 결국 어느 정도의 선에서 타협을 보아야 했고, 학생들이 많이 놓치는 부분, 그리고 미적분I의 핵심적인 내용만 제한적으로 미적분II에 복습용으로 담기로 했습니다. 그리고 그 내용 중 일부는 문제에 별도로 녹여두었습니다. 따라서 미적분I을 충실히 공부한 학생은 어떤 방식으로 이 책을 보든 미적분I 내용을 복습할 수 있을 뿐만 아니라 수학 실력에 발전이 있을 것입니다.

이 부분은 원래 있던 글을 갈아엎고 2016년 11월 18일부로 다시 새롭게 썼습니다. 2017학년도 수능이 끝난 후 미적분I을 보다 더 강조하기 위해서입니다. 처음부터 일부러 엄청나게 강렬한 문제를 넣은 것도 그런 이유에서입니다.

이 정도로 미적분I을 강조했으면 이 책을 보는 학생들도 그 중요성을 이해했을 거라고 생각합니다. 이제 여러분이 나아갈 앞길은 여러분에게 달려 있습니다.

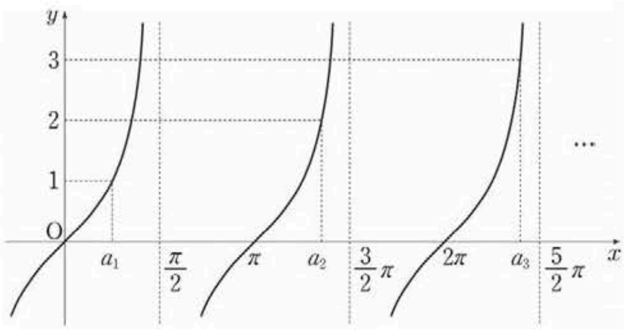
2. 수학을 대하는 이과생의 자세

문과생이든 이과생이든 수학은 일관된 자세로 공부하는 것이 가장 중요합니다. 책 소개에서도 언급했던 '정직하게 공부하는 자세' 말입니다. 하지만 수학 가형을 응시하는 여러분은 문과생들보다도 더 진지한 자세로 수학을 대해야 합니다. 이번 글에서는 이과생 여러분이 수학을 왜 논리적으로 공부해야 하고, 논리적인 학습이 수리논술과는 어떤 관계가 있는지에 대해 알아보겠습니다.

일단 수학 가형은 나형보다 범위도 많을 뿐더러 난이도도 훨씬 높습니다. 수학 나형의 경우 범위가 작기 때문에 어떤 방식으로든 문제를 많이 풀다 보면 일정 수준까지는 성적이 빨리 오릅니다. 하지만 수학 가형은 마구잡이로 공부해도 성적이 쉽게 오르지 않습니다. 이과 범위인 미적분II, 기하와 벡터는 내용이 방대하기 때문에 아무 생각 없이 문제만 풀다 보면 개념들이 머릿속에 정리되지 않고 흩어져 있게 됩니다.

많은 학생들이 흩어져 있는 개념을 정리하기 위해 유형화 학습을 합니다. 그러나 유형화 학습은 이해보다는 암기에 더 초점을 두는 학습법이며, 학생이 스스로 '사고'하는 영역을 줄여버리기 때문에 굉장히 위험합니다. 쉬운 문제들은 분명히 어느 정도의 유형화가 가능합니다. 하지만 수능 4점 문제 정도만 돼도 유형화가 불가능한 문제들이 꾸준히 등장합니다. 꼭 초고난도 문항이 아니더라도 말이죠. 유형화 학습을 하다 보면 새로운 발상을 요구하는 문제나, 오히려 개념 그 자체를 명확히 알아야 하는 문제에서 막혀버릴 수 있습니다. 다음 문제가 좋은 예시입니다.

> 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=\tan x$의 그래프가 제 1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [2014 수능]
>
> ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$



해당 문제는 2014학년도 수능에 출제된 문제로, 기본적인 삼각함수의 성질[6]과 수열의 극한의 대소 관계[7]가 핵심입니다. 즉, 아주 기초적인 원리가 사용되는 문제입니다. 하지만 대다수의 학생들이 접근조차 힘들어했고, 결국 이 문제를 직관에 의존해서 풀었습니다. tan함수의 점근선과 주기적 성질, 그리고 극한에 관한 기본적인 도구 중 '샌드위치 정리'를 제대로 알고 있지 않아서 대충 π 정도로 극한값이 수렴할 것 같다는 '느낌'에 의존했습니다. 그 직관마저 없는 학생은 틀릴 수밖에 없는 문제였죠.

6) 점근선
7) 샌드위치 정리

"느낌 만으로라도 맞추면 되는 것 아닌가요?"
라고 질문할 수도 있는데, 대답은
"맞습니다만, 그렇게 모든 문제를 느낌으로 맞출 수 있을까요?"
입니다. 직관에 의존한 풀이는 논리적인 풀이에 비해 길이도 상당히 짧고 쉽게 느껴집니다. 하지만 직관으로 문제를 막 풀다가 막상 시험장에서 직관적으로 느낌이 안 오는 문제를 마주친다면 멘탈이 흔들려 시험을 말아먹을 가능성이 높습니다. 반면, 개념을 바탕으로 한 논리적인 풀이를 연습해 두면 새로운 문제가 나와도 시험장에서도 이미 연습해 두었던 접근법을 시도해 보면서 당황하지 않고 풀어낼 수 있습니다.

그리고 수능에서 1등급, 혹은 100점의 당락을 결정하는 고난도 킬러 문항은 결코 유형화 될 수 없음을 이미 대부분이 알고 있으리라 믿습니다. 시중에 있는 수많은 킬러 문제들은 결국 사후에 기출문제를 변형한 문제들이며, 수능은 기존의 패러다임을 벗어난 새로운 킬러 문제를 출제할 겁니다. 이를 푸는 근본적인 바탕은 머릿속에 견고하고 체계적으로 정립된 개념과 그를 논리적으로 풀어내는 사고력입니다.

개념의 체계성을 갖추려면 앞으로 문제를 풀 때 사용하는 도구를 명확히 한정해야 하며, 사고력을 기르기 위해서는 정한 도구를 기반으로, 논리적으로, 그리고 아주 열심히 기출문제를 풀어야 합니다. 도구를 정하는 법은 다음 단원에서 자세히 다루겠습니다.

중요한 사항. 문제를 편식하면 안 됩니다. 물론 교과과정 외의 내용을 묻는 문항은 과감히 버려도 됩니다. 하지만 "요즘 수능에 다항함수는 안 나올 것이다. 올해 30번에는 삼각함수와, 합성함수가 나올 것이다, 도함수와 이계도함수에 대한 극한이 나올 것이다." 등 이전 년도 수능, 혹은 당해 모의평가를 기준으로 수능 문제에 대해 나오는 온갖 추측은 과감히 무시하고 골고루 공부하십시오. 항상 수능은 여러분의 생각을 능가합니다. 앞 단원에서 본 2017 수능에서도, 6월과 9월 모의고사에 삼각함수가 등장해 수능에는 무조건 삼각함수가 등장할 거란 예측을 깨고 보기 좋게 미적분I 범위의 다항함수가 핵심인 문제가 초특급 킬러로 등장하였죠. 굳이 그 정도 문제가 아니더라도, 매해 30번을 보면 도대체 이런 문제를 어떻게 냈는지 싶을 정도로 이전에 볼 수 없었던 신박한 문제들이 많습니다. 그리고 설상 찍어서 예상했던 유형이 나온다 하더라도, 30번 정도의 고난도 문항은 접근 자체가 굉장히 어렵기 때문에 해당 유형을 외웠다고 해서 별 이득이 되지 않습니다.

조금 더 원론적인 얘기를 해 봅시다.
대학수학능력시험은 여러분이 대학에 가서 수학(修學)을 할 능력이 되는지 **평가**하는 시험입니다. 수능에서는 겉도는 문제보다는 여러분이 각 단원의 **핵심과 본질**을 알고 있는지를 찌르는 문제들이 출제되며, 수능이 어려울 경우 속세의 '야매' 혹은 '숏컷(Short-cut)' 풀이들이 모두 막히게 됩니다. 이러면 편법과 직관을 연습했던 사람들은 수능 때 죽을 쑤게 됩니다. 문제 유형별로 풀이를 단순 암기하는 경우에는 상황이 더욱 심각하겠죠.

설령 외운 보조정리나 스킬을 통해 문제를 조금 더 빠른 시간 내에 풀었다 쳐도, 그런 문제는 수능 때 나와봤자 한두 문제 정도고, 시간을 단축시켜봤자 단지 1분 이내일 것입니다. 오히려 보조정리와 스킬을 계속 이용하다보면 계산 연습량이 줄어들어, 한 문제 정도를 더 빨리 푼다 해도 정직하게 잘 공부한 학생보다 전반적으로 문제를 푸는 속도가 느려집니다.

이과생 여러분은 어떤 계산 문제가 나와도 실수 없이 풀어낼 수 있어야 합니다. 풀다가 계산량이 급격하게 증가한다고 당황해서도 안 되고, 계산이 많다고 문제를 버려서도 안 됩니다. 2013학년도 수능까지만 해도 계산량이 지금만큼 많지는 않았는데, 점점 계산량이 늘어나 현재는 아무리 잘 하는 학생도 고난도 문제들은 시간 없이는 풀기가 힘들게 되었습니다. 계산 능력을 평가하겠다는 평가원의 분명한 의도가 엿보이죠. 수리논술을 보는 학생들은 말할 것도 없습니다. 중상위권 대학 논술에서 계산은 절대로 빼놓을 수 없으며, 계산속도가 뒷받침 해주지 않으면 제한시간 내에 문제를 모두 풀기 힘듭니다. 논술이 아무리 쉬워지는 추세라지만, 이는 예전에 비해 발상적인 부분이 줄어든다는 의미지, 준비되지 않은 사람들도 도전해볼 만 하다는 의미가 절대로 아닙니다.

수리논술에 대한 얘기가 나온 김에, 수능과 수리논술 사이의 관계에 대해서 알아보겠습니다. 아마 이 책을 보는 대다수의 학생은 수리논술까지 함께 준비를 계획하고 있을 것입니다. 많은 학생들이 수능과 수리논술을 완전히 별개로 생각하는데 중요한 건 바로 **수능이 수리논술의 발판** 이라는 것입니다. 수능을 준비하면서 수리논술의 70% 이상을 준비할 수 있습니다. 수리논술은 여러분이 문제를 얼마나 정확히 이해하고, 그것을 논리적으로 풀어낼 능력이 있는지 측정하는 시험입니다. 수능 문제도 답만 겨우 내서, 정확히 '이해'하지 못하고 '논리적'으로 풀어나가는 능력은 더더욱 없는 학생들이 논술 문제를 풀 수 있을 리가 없죠.

물론 수능은 '교과 내'라는 가이드라인을 철저히 지키는 반면, 대학교 논술은 그렇지 않은 경우도 많습니다. 하지만 교육부의 지침에 따라 논술 문제가 교육과정의 선을 너무 많이 넘어가지 않도록 매년 조정하고 있습니다. 논술이 쉬워진다는 말도 이런 뜻이고요. 논술도 결국은 수능의 연장선에 있다고 볼 수 있으며, 쉽게 생각하면 좀 더 '어려운' 수능 30번 급의 문제를 논리적으로 풀어쓰는 것 정도라 할 수 있겠습니다.

결국 여러분이 수학 문제를 풀 때 문제를 논리적으로 접근하는 연습을 하면 수리논술의 기본은 완성되는 것과 다름없으며, 그 후엔 수리논술에 등장하는 소재만 연습하면 됩니다. 기본을 잘 닦기 위해서는 특히 기출문제 중 어려운 문제들의 풀이를 논리적으로 써내는 연습을 해야 하고, 명작은 이를 위한 최고의 교재입니다.

앞으로 여러분이 공부할 방향을 정리하면 다음과 같습니다.

1) 정해진 수의 도구로
2) 편법을 쓰지 않고 논리적으로
3) 기출문제를 분석한다.

다음 단원부터 각 부분에 대한 구체적인 공부법을 설명하겠습니다.

3. 도구의 수의 정리

1. 수학에서의 도구

도구가 무엇인지에 대해서 한 번 생각을 해봅시다. 우리가 나사를 조일 때 쓰는 드라이버라든지, 나무를 벨 때 쓰는 도끼라든지 그런 것들을 떠올릴 수 있겠죠. 수학을 할 때도 마찬가지입니다. 여러분은 이미 문제에 따라 서로 다른 도구를 사용하고 있습니다. 감이 잘 안 잡히나요? 쉬운 예시를 하나 들어 보겠습니다.

Q. $x^2+2x-3=0$의 모든 실근을 구하시오.

A. 이 문제를 여러분은 어떻게 푸나요? 아마 방법이 두 가지 정도로 나뉠 수 있습니다.
(i) $(x-1)(x+3)=0$으로 식을 인수분해하여 답을 도출한다. $x=1,\ -3$
(ii) 근의 공식을 이용하여 근을 구한다. $x=-1\pm\sqrt{(-1)^2+3}$ $x=1,\ -3$

위 문제에서는 인수분해와 근의 공식을 문제를 풀기 위한 **도구**라고 할 수 있습니다. 때론 외길인 문제도 있고 위 문제처럼 한 개 이상의 도구를 이용할 수 있는 문제도 있습니다. 그러면 다음 평가원 기출문제에서 필요한 도구가 무엇인지 맞춰보세요.

Q. 구간 $[-2,\ 0]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$의 최댓값을 구하시오. [2009 09 평가원]

A. 닫힌 구간에서 미분가능한 함수의 최대, 최솟값은 $f'(x)=0$이 되는 지점 및 구간의 양 끝값 중 하나이다. $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$
$x=3$은 범위 밖이므로 $f(-1)=13$, $f(-2)=6$, $f(0)=8$. 따라서 최댓값은 13이다.

여기서는 최대최소와 미분계수에 대한 정리(최대최소를 구하는 최적화된 방법)가 바로 문제를 푸는 **도구**입니다. 이 도구 말고 다른 도구로 이 문제를 풀었다면, 그것은 제대로 된 풀이가 아니거나 빙 돌아가는 풀이일 것입니다. 이 문제는 쉽기 때문에 도구 하나로도 충분했지만 문제가 어려워지면 여러 개의 도구를 사용해야 합니다. 하지만 우리가 알아야 할 도구의 수는 생각보다 얼마 없습니다. 여러분들 모두 교과서 한 권쯤은 가지고 있을 텐데, 교과서가 얼마나 얇은지 잘 알고 있죠? 그 얇은 책 속에 있는 도구들만 숙지하고 있다면 모든 문제를 충분히 풀 수 있습니다.

2. 도구의 수의 최소화

학생들은 항상 이런 질문을 합니다.
"도구는 많이 알면 알수록 좋은 거 아닌가요?"

책상의 풀린 나사를 조일 때 여러분은 공업용 공구 상자를 가져와 수십 개의 드라이버를 전부 대보나요? 엄청난 시간낭비일 겁니다. 그 조그만 나사를 조이기 위해서 드릴을 사용하면 잘 될까요? 안 되겠죠. 이런 나사를 조이는 데는 가정용 드라이버 한 개로 충분합니다. 이처럼 수학 문제를 풀 때에도 잘못된 도구를 사용하면 역효과가 날 수 있습니다.

혹은 이런 질문도 등장합니다.

“정해진 도구로만 풀라는 것은 수학의 본질이 아닌 것 같은데요? 창의적 사고를 막는 기분이 드네요.”

나름 그럴듯한 질문입니다. 위대한 수학자 칸토어 역시 “수학의 본질은 자유로움에 있다.”라는 유명한 말을 남겼습니다. 그러나 수능의 수학영역은 ‘남들보다 수학 지식을 얼마나 많이 가지고 있는지’를 측정하는 시험이 아닙니다. 수능은 지식을 많이 알고 있는 사람에게 높은 점수를 주기 위한 시험이 아닐뿐더러 여러분이 추가적으로 외우는 교육과정 외의 따름정리나 새로운 성질들은 여러분의 창의적 사고와 큰 관련이 없습니다. 단순히 문제를 풀기 위해 정리와 공식들을 암기하는 것은 수학의 본질과도 거리가 멉니다. 그냥 외운 따름정리, 혹은 공식들이 늘어날 뿐이죠. 여러분이 교과외인 ‘로피탈의 정리’를 단순히 암기하고 해서 창의력이 늘어난다고 생각하나요? 그냥 다른 학생들 앞에서 폼 잴 거리 하나정도는 늘어났다고 할 수 있겠습니다.

여러분이 맨날 로피탈의 정리를 통해 극한 문제를 풂으로써 얻는 장점이 문제를 몇 초 더 빠르게 풀 수 있는 것이라고 칩시다. 그러나 여기에는 치명적인 단점이 있습니다. 바로 극한의 계산을 연습할 기회 자체를 잃어버린다는 겁니다. 극한 문제를 로피탈의 정리를 쓰지 않고 풀었을 때 계산이 너무 느려 다른 문제를 풀 시간이 없다고 투덜댄다면, 그건 본인의 공부량이 확연하게 부족하다는 것을 스스로 증언하는 것에 불과합니다. 수학영역에서는 계산도 굉장히 중요한 평가 부분 중 하나입니다. 정직하게 공부를 해서 제대로 된 연습 기회를 차버리지 말기를 바랍니다.

그리고 도구가 점점 많아질수록 도구를 아는 것과 문제 풀이에 활용하는 것은 서로 다른 문제가 됩니다. 여러분 모두가 간과하고 있는 것이, 바로 한 개의 도구를 습득했다면(배웠다면) 그것을 다지는 과정이 있어야 한다는 겁니다. 아무리 도구를 많이 가져봤자 한 개도 제대로 쓸 줄 몰라 어설프게 사용한다면, 여러분이 최고로 긴장되는 날, 두뇌 회전이 평소보다 급격히 떨어지는 수능 날에 과연 이걸 가지고 감히 문제를 들쑤실 수 있을까요? 그렇지 않습니다.

피아노를 쳐 봤으면 알겠지만 한 곡을 계속 연습하다보면 무의식적으로도 곡을 칠 수 있도록 손 근육이 곡을 부분적으로 기억하기 시작합니다. 여러분이 문제를 푸는 과정도 마찬가지가 돼야 합니다. 문제를 맞닥뜨리면 머리는 일단 기계적으로 반응해야 합니다. 최소한의 일정한 도구로 각 문제를 기계적으로 해석하고 조합하여 문제를 엄청난 속도로 풀어내야 합니다. 30문제 중 최고난도 문항을 제외한 나머지 문항들은 이 과정이 자연스럽게 이루어져야 합니다. 그러기 위해서는 당연히 같은 도구를 가지고 수없이 연습을 해야겠지요.

다시 한 번 강조하겠습니다. 도구의 수는 중요한 게 아닙니다. 여러분이 각 도구를 ‘얼마나 적절한 상황에 빠르게 잘 쓰느냐’가 중요한 것입니다. 교과서에는 최소한의 도구만 있습니다. 이를 가지고 열심히 푸는 연습을 하길 바랍니다.

3. 도구를 나의 것으로 체화와 정리

하지만 문제는, 교과서를 본다고 해서 바로 기출문제가 풀리지는 않는다는 겁니다. 너무나 당연한 겁니다. 딱 교과서만을 보고 그동안 출제된 어려운 기출문제들을 바로 풀 수 있다면 당신은 천재일 확률이 높으니 이 책을 당장 덮고 수능 전날까지 놀다가 수능 만점을 쟁취하시기 바랍니다. 여러분을 가르치는 사람들은 책임감 없이 교과서 위주로 보라는 말만 계속 하고 정작 '어떻게' 공부해야 되는지는 알려주지 않습니다. 여러분이 도구를 배웠으면 그것을 본인의 것으로 만드는 연습을 해야 합니다. 본 책은 여러분에게 교과서를 기출문제에 어떻게 적용하는지를 직접적으로 알려드립니다. 이에 대한 자세한 부분은 5단원과 6단원인 **발문에 따른 풀이의 필연성** 과 **기출문제의 분석**에서 다룹니다.

각 Topic에는 문제를 푸는 비교적 적은 도구들이 제시 되어 있습니다. 이 책에 있는 정의, 정리, 따름정리, 알고리즘 등 모든 것이 기출문제를 푸는데 필요한 도구입니다. 정의, 정리는 모두 교과서에 등장하는 것들입니다. 교과서의 정리에서 유도 가능한 따름정리와 공식들은 외우고 싶지 않으면 넘어가도 무방합니다. 하지만 책에 나와 있는 정도는 문제를 푸는데 큰 도움이 되니 웬만하면 잘 봐두고 넘어가길 바랍니다.

우리가 결국 이번 단원에서 배운 내용을 정리하자면,
1. 이 책(혹은 교과서)에 있는 내용으로
2. 본인이 문제를 푸는 도구를 정리해서
3. 기출문제에 적용하는 연습을 한다.
4. 그리고 사실 문제 중에 본인이 배운 내용 외의 도구가 이용되는 문제들이 있다면 과감하게 버린다.

다음 단원에서는 수학을 논리적으로 공부하는 방법에 대해서 배워보겠습니다.

Topic 08. 함수의 그래프

이 토픽에서는 그 어떤 함수가 나오더라도 개형을 그릴 수 있도록 함수의 개형에 대한 모든 것을 파헤쳐 보겠습니다. 개형을 그리는 방법은 미적분1에서 배웠지만, 미적분2에서는 새로 배운 이계도함수와 곡선의 오목, 볼록, 점근선 등의 새로운 개념을 이용해서 함수를 더욱 정밀하게 파악하는 방법을 배웁니다. 2009 개정교육과정부터는 다항함수가 출제될 가능성이 매우 낮아졌고, 그만큼 초월함수의 개형에 관련된 문제가 출제될 확률이 매우 높아졌습니다. 굉장히 중요한 토픽이니 꼭 제대로 연습해두세요. 또한, 이 토픽은 '기출문제에의 적용'이 중심이 아니라 '모든 개형 그리기'가 중심이기 때문에 VIP가 없습니다. 이 Topic은 논술수준의 굉장히 어려운 논리를 포함하므로 처음 학습할 때 너무 어렵다고 포기하지 마세요. 이 Topic을 최소 3번만 완벽하게 반복하셔도 앞으로 만나는 모든 함수의 개형을 우습게 그릴 수 있는 순간이 올 겁니다.

1. 부호표와 다항함수의 개형

앞선 Topic 06에서 미적분I 내용인 '부호표를 이용한 다항함수의 개형 추론'을 복습해 보았는데요, 그 알고리즘을 한 번 더 정리하면 다음과 같습니다.

ALGORITHM – 함수의 부호표를 이용한 다항함수 개형 그리기

(1) 도함수 $f'(x)$를 구한다.
(2) $f'(x)=0$를 만족하는 x의 값을 구한다.
(3) $f'(x)$의 부호변화를 수직선에 나타내준다.
(4) 함수의 증감을 부호 위에 선으로 표시한다.
(5) $f'(a)=0$인 a에 대하여 $f(a)$의 값을 구하고 점을 찍는다.
(6) 함수 $y=f(x)$가 지나는 특정점이 보인다면 그 점을 찍는다.
(원점, y절편, x절편 등) (선택)
(7) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

위의 알고리즘을 적용해서 다음 함수들의 개형을 그려보세요.

EXAMPLE 01

함수 $f(x)$의 개형을 추론하시오.

(1) $f(x)=x^3-3x$

(2) $f(x)=x^4-2x^2$

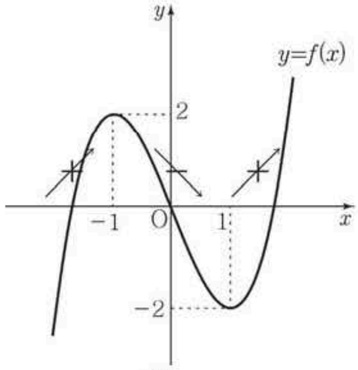
(3) $f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2+1$

(4) $f(x)=6x^7-7x^6-\dfrac{42}{5}x^5+\dfrac{21}{2}x^4$

*** EXAMPLE 1 분석)**

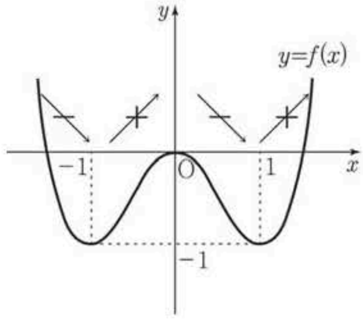
(1) $f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$이므로 부호표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 개형을 추론하면 다음과 같습니다.



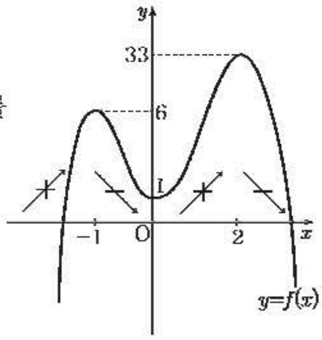
(2) $f(x)=x^4-2x^2$

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로 부호표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 개형을 추론하면 다음과 같습니다.



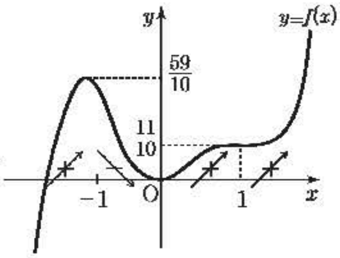
(3) $f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2+1$

$f'(x)=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x+1)(x-2)$이므로 부호표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 개형을 추론하면 다음과 같습니다.



(4) $f(x)=6x^7-7x^6-\dfrac{42}{5}x^5+\dfrac{21}{2}x^4$

$f'(x)=42x^6-42x^5-42x^4+42x^3=42x^3(x+1)(x-1)^2$이므로 부호표를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 개형을 추론하면 다음과 같습니다.



아! 그리고 $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$는 잊지 않으셨죠?

EXAMPLE 06

함수 $f(x) = \sec x + \ln|\cos x|$ 의 개형을 추론하시오.

* EXAMPLE 6 분석)

$f(x) = f(-x)$이므로 $x \geq 0$인 구간에서 그래프를 먼저 그리고 y축에 대해 대칭시키겠습니다.
$\sec x$의 정의역은 $\cos x \neq 0$인 x이고, $\ln|\cos x|$의 정의역은 $|\cos x| > 0$,
즉 마찬가지로 $\cos x \neq 0$인 x입니다. 따라서 함수 $f(x)$의 정의역은 $x \neq \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$ (단, n은 정수)입니다. 이 값들에서 $f(x)$가 y축과 평행한 점근선을 가질 수도 있고 가지지 않을 수도 있으니 이 수들을 점근선 '후보'라고 부르겠습니다.[72]

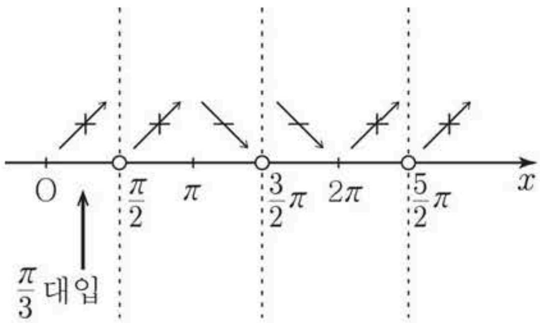
이제 극값을 구하기 위해 $f(x)$를 미분하면

$$f'(x) = \sec x \tan x + \frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x(\sec x - 1)$$

인데, $\tan x$와 $\sec x$에 익숙하지 않은 독자를 위해 식을 $\sin x$과 $\cos x$로 바꿔봅시다.

$$f'(x) = \tan x(\sec x - 1) = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos^2 x}$$

이렇게 했더니 부호변화 파악하기가 쉬워졌죠? $1-\cos x \geq 0$, $\cos^2 x \geq 0$이니까 결국 $\sin x$의 부호변화만 신경 쓰면 됩니다. 이제 f'이 0이 되는 값들을 찍고 부호변화를 체크합니다. 이 때 **점근선 후보 $x = \dfrac{2n-1}{2}\pi$ 주변에서의 부호 변화도 모두 표시**해주세요.



72) $x = a$가 $f(x)$의 수직점근선이 되려면 $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$이어야 합니다. 예를 들어, 함수 $y = \dfrac{x^2}{x}$는 $x = 0$에서 함숫값이 정의되지 않지만 $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$이기 때문에 y축을 점근선으로 갖지 않습니다.

그 다음에 함숫값들을 찍고 곧바로 매끄러운 곡선으로 이어주려고 했으나! 우리는 아직 점근선 후보인 지점들에서 함수 $f(x)$가 수렴하는지 발산하는지 모릅니다.
따라서 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} f(x)$, $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi-} f(x)$, $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi+} f(x)$, $\cdots$을 조사해야 합니다.[73)]

먼저 $x\to\frac{\pi}{2}-$일 때의 극한값부터 조사해 보겠습니다.[74)]

$$f(x)=\sec x+\ln|\cos x|$$

입니다.
일단 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\cos x=0+$이므로 $\sec x$는 ∞로 발산합니다. 그런데 $\ln|\cos x|$도 $-\infty$로 발산합니다.
아니 그렇다면 지금 함수 형태가 $\infty-\infty$꼴인데 어떻게 수렴 발산을 판정하죠...

그러고 보니 지금 두 함수가 모두 $\cos x$에 관련되어 있습니다. 그런데 얘는 어차피 $0+$으로 수렴하는 애니까 굳이 $\cos x$를 달고 다니면서 쓸데없이 헷갈려 할 필요가 없습니다. 먼저 $\cos x=X$로 치환을 시도해 보면 함수 $f(x)$는 다음과 같이 나타납니다.

$$f(x)=\frac{1}{X}+\ln X$$

그런데 두 함수 $\frac{1}{X}$와 $\ln X$도 비교하기가 까다롭습니다. $\frac{1}{X}=t$, 즉 $\sec\theta=t$로 치환해봅니다. 그러면 $X\to 0+$이었으니까 $t\to\infty$이 되겠죠?

$$f(x)=t+\ln\frac{1}{t}=t-\ln t$$

드디어 함수 꼴이 친근하게 바뀌었습니다. 이처럼 치환을 이용하면 복잡한 식에서 눈속임을 걷어내고 간단한 형태를 얻을 수 있습니다.
이제 t와 $\ln t$라는 함수가 $t\to\infty$일 때 누가 더 빨리 증가하는지(누가 더 빨리 ∞로 발산하는지)를 체크하면 됩니다. 즉, 다음 식의 값을 구하면 됩니다.

$$\lim_{t\to\infty}(t-\ln t)$$

t가 충분히 클 때 $t>\ln t$라는 것 정도는 쉽게 예상됩니다. 증명도 그리 어렵지 않죠.

$$y=t-\ln t \qquad y'=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$$

인데, 함수 $y=t-\ln t$가 점 $(1,\ 1)$을 지나고 $t>1$에서 $y'>0$이므로 $t-\ln t\ge 1>0$ 입니다.

73) 초월함수의 개형 그리기는 이렇게 매우 까다롭고 복잡합니다. 하지만 틀린 개형을 그리는 것보다는 낫겠죠? 반드시 조사해주세요.
74) 이 내용은 매우 어려울 수 있습니다. 단순히 대강의 개형만 그리길 원하시는 분은 보지 않으셔도 됩니다.

그런데 $t-\ln t>0$라고 해서 $\lim_{t\to\infty}(t-\ln t)=\infty$ 라고 말할 수는 없습니다. 함수 $y=3-\dfrac{1}{x}$는 $x>0$에서 증가하지만 $\lim_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)=3$이라서 ∞로 발산하진 않잖아요?

함수 $f(x)$가 $x\to\infty$일 때 수평점근선[75]을 가지면 $f(x)$가 증가해도 ∞로 발산하지 않습니다.
마찬가지로 $f(x)$가 감소하면서 수평점근선을 가지면 $-\infty$로 발산하지 않겠죠?

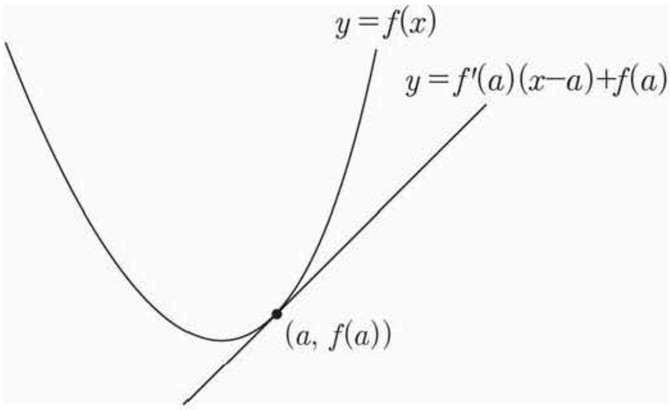
결론부터 말하면 $\lim_{t\to\infty}(t-\ln t)=\infty$ 이 성립하는데, 고교과정에서 크게 두 가지 도구를 이용하여 증명할 수 있습니다.

(1) 이계도함수를 구하여 함수의 볼록성 파악

$$y''=\frac{1}{t^2}$$

이므로 함수 $y=t-\ln t$는 아래로 볼록합니다. 함수가 아래로 볼록하면서 증가하면 수평점근선을 가질 수 없고 항상 ∞로 발산합니다. 그래프에 접선을 그어보면 직관적으로 이해할 수 있습니다. $f'(x)$가 증가하므로 $f'(a)>0$인 적당한 점 $(a,\ f(a))$를 잡으면

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt \geq f(a)+\int_a^x f'(a)dt=f'(a)(x-a)+f(a)$$



입니다. 우변이 ∞로 발산하므로 좌변도 ∞로 발산합니다.
(접선이 무한대로 발산하므로 그보다 큰 함수도 당연히 발산하게 됩니다.)

(2) 다른 함수와 비교 판정

함수 $\dfrac{t}{2}$를 새로이 도입해서, $t-\ln t$와 $\dfrac{t}{2}$의 차를 구해봅시다.

$$y=t-\ln t-\frac{t}{2}=\frac{t}{2}-\ln t \qquad \Rightarrow \qquad y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{t}=\frac{t-2}{2t}$$

입니다. 함수 $y=\dfrac{t}{2}-\ln t$는 $(2,\ 1-\ln 2)$를 지나고 $t>2$일 때 증가하므로

75) 수평점근선 $y=a$의 정의는 $\lim_{x\to\infty}f(x)=a$ 혹은 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=a$입니다.

$\dfrac{t}{2}-\ln t \geq 1-\ln 2>0$ 입니다. 따라서 $t>2$ 에서

$$t-\ln t>\frac{t}{2}$$

인데, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{2}=\infty$ 이므로 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(t-\ln t)=\infty$ 입니다.

방법 (2)는 방법 (1)에 비해 유연하지만, 그만큼 적절한 함수를 도입하는 게 어렵고 발상적입니다.

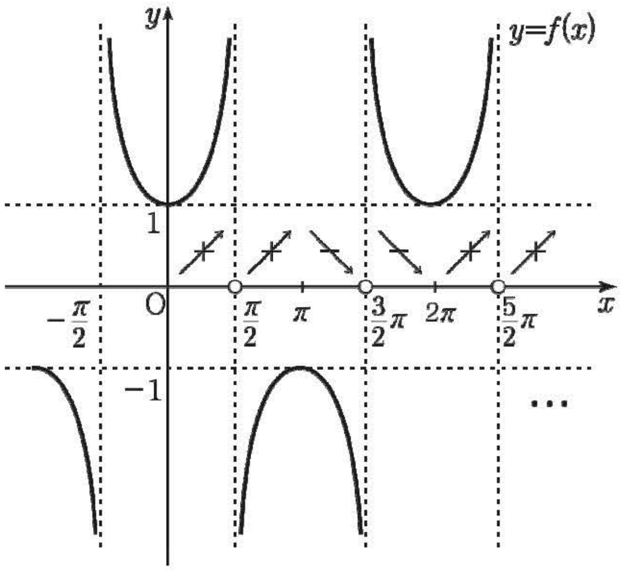
이상의 긴 과정을 요약하면, 처음 함수 $f(x)=\sec x+\ln|\cos x|$ 에서 $t=\sec x$ 로 치환하여,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)=\lim_{t\to\infty}(t-\ln t)=\infty$$

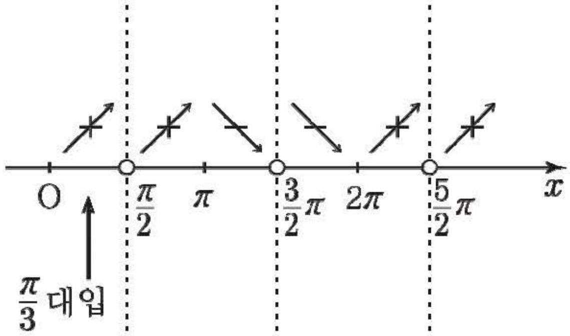
를 얻었습니다.

한편, $x\to\dfrac{\pi}{2}+$ 일 때는 $x\to\dfrac{\pi}{2}-$ 일 때와 $\cos x$ 가 $0-$ 로 간다는 사실만 다르므로 $t\to-\infty$ 로 치환하면 됩니다. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}(t-\ln|t|)$ 는 $-\infty-\infty$ 꼴이니 $-\infty$ 로 발산하겠지요? 다른 점근선 후보에서도 $\cos x$ 가 $0+$ 이나 $0-$ 로 수렴하므로, $x\to\dfrac{\pi}{2}\pm$ 일 때와 동일하게 $\cos x$ 가 $0+$ 로 수렴하면 극한값이 ∞, $0-$ 로 수렴하면 $-\infty$ 입니다.

따라서 최종적으로 함수 $f(x)=\sec x+\ln|\cos x|$ 의 개형을 그리면 다음과 같습니다.



그런데 사실 어렵게 점근선으로 다가가는 극한을 구할 것 없이 직관적으로 '이렇게 될 것 같은데..?' 라고 그려도 틀리지 않는 경우가 많은 것은 사실입니다. 무슨 말이냐면 이 함수의 부호표를 다시 한 번 보겠습니다.



점근선 근처인 $x \to \frac{\pi}{2}-$일 때는 함수 $f(x)$가 증가하면서 점근선에 가까이 다가가야 하는데, 만약 $-\infty$로 다가간다면 함수 $f(x)$가 증가할 수가 없겠죠? 따라서 만약 발산한다면 ∞로 발산하겠거니.. 도함수의 부호를 통해 추론할 수 있는 것입니다.[76)]

이번에 배운 내용을 정리하면 다음과 같습니다.

Mini Lecture – 개형그리기 3

점근선을 포함하는 함수의 개형을 그릴 때
(1) 부호표에 점근선 후보(정의역에서 빠진 곳)를 표시한다.
(2) 도함수가 0이 되는 점과 점근선 후보를 기준으로 부호표를 완성한다.
(3) '반드시' $f(x)$의 점근선에서의 극한을 구해준다.

앞서 배운 내용을 종합해서 그래프 그리는 알고리즘을 업데이트해보겠습니다.

ALGORITHM – 함수의 부호표를 이용한 다항함수가 아닌 함수의 개형그리기

(0) 함수 $f(x)$가 대칭성, 주기성을 가지고 있는지 확인한다. (선택)
(1) 도함수 $f'(x)$를 구한다.
(2) $f'(x)=0$를 만족하는 x의 값을 구한다.
(3) 수직점근선이 존재한다면 수직선에 나타내준다.
(4) $f'(x)$의 부호변화를 수직선에 나타내준다. (점근선에서 부호가 변하지 않더라도 점근선의 좌우에 부호를 표시한다.)
(5) 함수의 증감을 x축 위에 선으로 표시한다.
(6) $f'(a)=0$인 a에 대하여 $f(a)$의 값을 구하고 점을 찍는다.
(7) 함수 $y=f(x)$가 지나는 특정 점이 보인다면 그 점을 찍는다.
(원점, y절편, x절편 등) (선택)
(8) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 점근선} f(x)$등을 조사한다.
(9) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

76) 물론 반례는 많습니다. 나중에 다뤄볼 $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$같은 것도 있으니까요. 대부분의 경우에서 성립한다는 것입니다. 논술에서는 반드시 점근선으로 다가갈 때의 극한값을 구해줘야 합니다.

위 식이 모든 n에 대해 성립하므로, 다항함수와 지수함수 e^{-x}의 곱으로 나타난 함수는 $x \to \infty$에서 항상 0으로 수렴합니다. $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$에서 $-x = t$로 치환하면 $\lim_{t\to-\infty} t^n e^t = 0$임도 알 수 있습니다.

따름정리(Corollary)

지수함수와 다항함수의 곱의 수평점근선

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$$

이를 이용하면 개형을 좀 더 수월하게 그릴 수 있게 되겠죠?

그렇다면 이번에는 분할하기의 사고를 평가해보겠습니다. 풀이를 보기 전에 반드시 스스로 생각해보세요. 조금 어려울 수는 있으나 푸는 방식은 사차함수의 경우와 완전히 같습니다.

EXAMPLE 08

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = e^{-x} f(x)$의 가능한 모든 개형을 분류하시오.

* EXAMPLE 8 분석)

$g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$인데, 도함수의 부호는 $f'(x) - f(x)$에 의해 결정됩니다. 이 식이 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수이므로 근의 개수에 따라 경우를 분할해 봅시다.

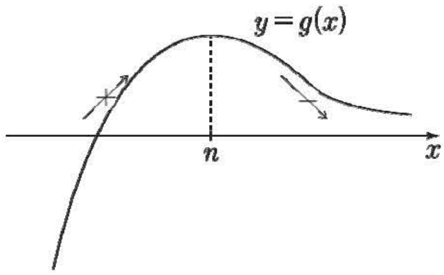
(1) $f'(x) - f(x)$의 실근이 하나 존재

$$f'(x) - f(x) = -(x-n)^3 \text{ or } -(x-n)(x^2+ax+b) \ (a^2-4b<0)$$

이라 둡시다. $g(x)$의 극값은 $x = n$에서만 발생하고,

이제 함수의 개형을 그리기 위해 함숫값을 알아야 하는데, $\lim_{x\to\infty} e^{-x} f(x)$는 앞에서 배운 대로 항상 0이고, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$이므로 $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} f(x) = -\infty$입니다.

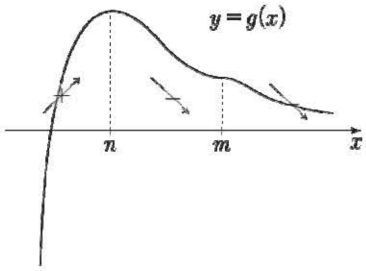
따라서 그래프는 다음과 같이 그려집니다.



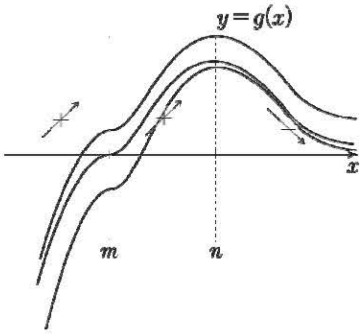
(2) $f'(x)-f(x)$의 실근이 두 개 존재

$$f'(x)-f(x)=-(x-n)(x-m)^2$$

이라 두면, $g(x)$의 극값은 $x=n$에서만 발생하고, $x=m$에서 미분계수가 0인 변곡점이 발생합니다. 따라서 n과 m의 대소 관계에 따라 다음과 같이 두 가지의 개형으로 그려집니다.



$(n<m)$

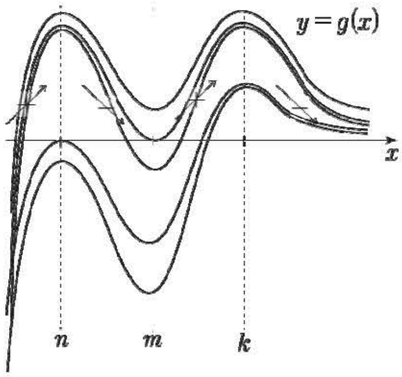


$(n>m)$

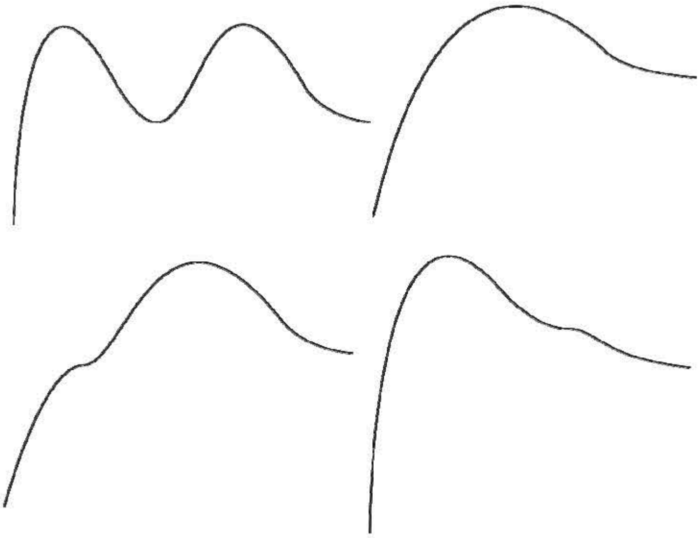
(3) $f'(x)-f(x)$의 실근이 세 개 존재

$$f'(x)-f(x)=-(x-n)(x-m)(x-k)\ \ (n<m<k)$$

$g(x)$는 $x=n,\ k$에서 극대, $x=m$에서 극소를 갖습니다. 따라서 다음과 같이 개형을 추론할 수 있습니다.



따라서 $g(x)=e^{-x}f(x)$의 개형은 다음과 같이 크게 네 가지로 분류됩니다.



[2014 리듬농구]
Stage 1 관련 Topic
Topic 5

9. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

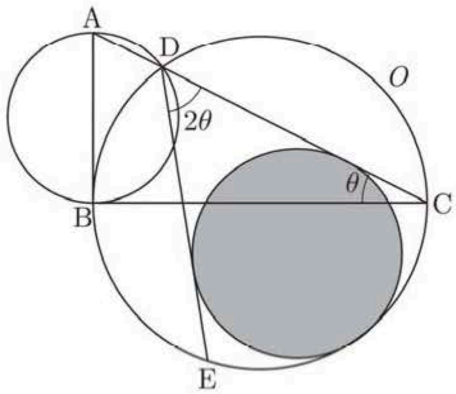
(가) $f(x)=x^3+2-h(x)$
(나) $h'(x)\geq 0$, $h(1)=1$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{h(x)-g(x)}{x-2}$의 값이 존재하고, 그 값을 k라 하자. $180k^2$의 값을 구하시오.

[2017 리듬농구]
Stage 1 관련 Topic
Topic 4

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고, $\angle ACB=\theta$, $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점을 D라 하고, 세 점 B, C, D를 지나는 원을 O라 하자. 원 O위의 점 E가 $\angle CDE=2\theta$를 만족시킬 때, 두 선분 ED, CD와 원 O에 동시에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\pi-S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$)



① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

[2015 PRS]
Stage 1 관련 Topic
Topic 5
Topic 9

94. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=2(x-1)\ln x-(\ln x)^2$$

이고 2 이상의 자연수 n에 대하여 $g(x)=\{f(x)\}^n$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. 열린 구간 $\left(\dfrac{1}{e^2},\ \dfrac{1}{e}\right)$에 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재한다.

ㄴ. 열린 구간 $\left(\dfrac{1}{e},\ 1\right)$에 방정식 $f''(x)=0$의 실근이 존재한다.

ㄷ. 열린 구간 $\left(\dfrac{1}{e^2},\ 1\right)$에 방정식 $g''(x)=0$의 실근이 두 개 이상 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[지적 유희 문제]
[2015 리듬농구]
Stage 1 관련 Topic
Topic 7
Topic 9

95. 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 이계도함수 $f''(x)$는 연속이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 세 점 $(3n-2,\ 4)$, $(3n-1,\ 2n-2)$, $(3n,\ 2n)$를 모두 지난다.
(다) 모든 자연수 n 에 대하여 $f'(3n-2)=f'(3n-1)=0$, $f'(3n)=2$이다.

$1 \le x \le 100$일 때, 방정식 $f''(x)=0$의 실근의 개수의 최솟값을 구하시오.

94.

ㄱ. (참)

사이값 정리를 이용하여 구간 $\left(\frac{1}{e^2},\ \frac{1}{e}\right)$에서 실근의 존재성을 밝혀봅시다.

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=2\left(\frac{1}{e^2}-1\right)\times(-2)-4=-\frac{2}{e^2}<0$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=-2\left(\frac{1}{e}-1\right)-1=\frac{e-2}{e}>0$$

이므로 사이값 정리에 의하여 구간 $\left(\frac{1}{e^2},\ \frac{1}{e}\right)$에 $f(c)=0$을 만족시키는 $\frac{1}{e^2}<c<\frac{1}{e}$가 적어도 하나 존재합니다.

ㄴ. (참)

구간 $\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$에서 $f''(x)=0$의 실근의 존재성을 밝히려면 다음의 두 가지 중 하나를 선택해야 합니다.

$f'(x)$에서 롤의 정리를 이용하여 실근의 존재성을 밝힌다.

$f''(x)$에서 사이값 정리를 이용하여 실근의 존재성을 밝힌다.

그런데 $f''(x)$까지 구하는 것은 너무 고통스러운 계산이 예상되므로 전자를 선택해봅시다.

$$f'(x)=2\ln x+\frac{2(x-1)}{x}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{2(x-1)\ln x+2(x-1)}{x}$$

이고, $f'\left(\frac{1}{e}\right)=f'(1)=0$입니다. 따라서 롤의 정리에 의하여 구간 $\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$에 $f'(d)=0$을 만족시키는 $\frac{1}{e}<d<1$가 적어도 하나 존재합니다.

ㄷ. (참)

이것도 마찬가지로

$g'(x)$에서 롤의 정리를 이용하여 실근의 존재성을 밝힌다.

$g''(x)$에서 사이값 정리를 이용하여 실근의 존재성을 밝힌다.

둘 중 하나를 선택해야 합니다. ㄴ과 마찬가지로 이계도함수를 구하는 것은 너무나도 고통스러운 계산이 예상되니 전자를 선택해봅시다.

$$g'(x)=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$

입니다. 그런데, 구간 $\left(\frac{1}{e^2},\ \frac{1}{e}\right)$에서 $f(c)=0$을 만족시키는 c가 적어도 하나 존재하고,

구간 $\left(\frac{1}{e},\ 0\right)$에서 $f'(d)=0$을 만족시키는 d가 적어도 하나 존재하기 때문에

두 구간 $\left(\frac{1}{e^2},\ \frac{1}{e}\right)$, $\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$에 각각 $g'(c)=0$, $g'(d)=0$을 만족시키는 c, d가 존재하게 됩니다.

즉, 롤의 정리에 의하여 구간 $\left(\frac{1}{e^2},\ 1\right)$에 방정식 $g''(x)=0$의 실근이 적어도 두 개 존재하게 됩니다.

문항 comment

사이값 정리와 롤의 정리를 적절하게 이용하여 풀어내는 문제입니다. 기출 문제에서도 여러 번 다뤘지만, 항상 $f'(x)=0$의 실근의 존재성을 밝히는 문제가 나오면 두 가지 중 하나를 선택해야 합니다.

$f(x)$에서 롤의 정리

$f'(x)$에서 사이값 정리

문제의 조건을 잘 보고 어떤 것이 더 문제를 푸는데 효율적일 것인가를 잘 고민해야겠죠?

답 : ⑤

Topic 13. 적분 계산 연습

이 Topic은 적분 계산력 증강을 위해서 만들어진 적분 계산 스페셜 섹션입니다. 앞 토픽에서도 언급했듯이 적분은 계산력이 정말 중요한 단원이기 때문에, 적분 계산은 실수 없이 빨리 할 수 있어야 합니다. 이제 이 Topic 13의 계산 연습문제들을 풀면서 적분실력을 갈고닦아 보세요.

1. 부정적분과 정적분의 계산

모든 예제들은 10개 단위로 끊어서 해설하며, 중요한 점을 짚고 넘어가도록 하겠습니다.

EXAMPLE 01

(1) $\int (3x+1)dx$

(2) $\int (x^3-3x^2+1)dx$

(3) $\int (3x^3-x-3)dx$

(4) $\int (x^4+3x^2-5x+1)dx$

(5) $\int x(1+\sqrt{x})dx$

(6) $\int \frac{2(x+1)^2}{x^2}dx$

(7) $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

(8) $\int x(\sqrt{x}-x)dx$

(9) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(10) $\int (3x+2)^3 dx$

발상적이거나 고교과정에 맞지 않는 어려운 적분들은 색상을 다르게 표시해 두었습니다. 푸는 데 참고하세요.

EXAMPLE 32

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+\sqrt{nk}}$

(2) $\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2-2nk-3n^2}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\sqrt[n]{e^k}}{n^3}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{4n}\tan\frac{k\pi}{4n}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^4+2n^3}-n^2}{n^2+k^2}$

(6) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}$

(7) $f(x)=3x^2+5$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n}\right)f'\left(\frac{4k^2}{n^2}\right)$의 값

(8) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n^2k}{n^4+k^4}$

(9) $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\times e^{-\sqrt{1+\frac{3k}{n}}}$

(10) $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+\cos\frac{k\pi}{2n}}$

EXAMPLE 04 [2017 리듬농구]

이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)=e^{-x}f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. $f(1)$ 의 최댓값은?

(가) $g(0)=3$
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\le(x^2+1)e^{-x}+2$ 이다.

* EXAMPLE 4 의 분석)

$g(0)=3$이니까 $f(0)=3$ 입니다. 따라서 $f(x)=ax^2+bx+3$ 으로 놓을 수 있습니다.
모든 실수 x 에 대하여

$$g(x)\le(x^2+1)e^{-x}+2$$
$$\Leftrightarrow\ g(x)-(x^2+1)e^{-x}\le 2$$

인데 좌변에 $x=0$ 을 대입하면 그 값이 2 가 되므로 $x=0$ 에서 좌변의 함수가 최댓값을 가집니다. 따라서 $g'(x)+(x^2-2x+1)e^{-x}$ 에 $x=0$ 을 대입하면 0 이고, $g'(0)=-1$입니다.

$$g'(x)=(-ax^2-bx-3+2ax+b)e^{-x}$$

이므로 $x=0$을 대입하면 $b=2$ 를 얻습니다.

$$h(x)=g(x)-(x^2+1)e^{-x}$$

라 하면,

$$h(x)=(ax^2-x^2+2x+2)e^{-x}$$

입니다. 미분해주면

$$\begin{aligned}h'(x)&=(-ax^2+x^2-2x-2+2ax-2x+2)e^{-x}\\&=(-ax^2+x^2+2ax-4x)e^{-x}\\&=-x\{(a-1)x-(2a-4)\}e^{-x}\end{aligned}$$

$h(x)$ 의 개형을 추론하기 위해서는 a 의 범위에 따라 나눠야 합니다.

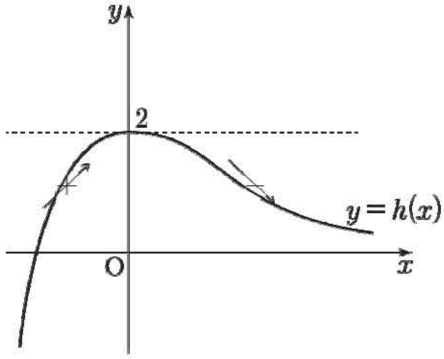
$i)$ $a>2$
$x=0$ 에서 $h'(x)$ 의 부호가 $-$에서 $+$로 변하므로 극소입니다. 그런데 $h(0)=2$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x)\le 2$ 를 만족할 수 없습니다.

$ii)$ $a=2$
$x<0$ 일 때, $h'(x)$ 의 부호가 $-$ 이므로 감소합니다. 그런데 $h(0)=2$이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x)\le 2$ 를 만족할 수 없습니다.

$iii)$ $1<a<2$
$x<\dfrac{2a-4}{a-1}$ 일 때, $h'(x)$ 의 부호가 $-$ 이므로 감소합니다. 그런데 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}h(x)=\infty$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x)\le 2$ 를 만족할 수 없습니다.

$iv)$ $a=1$

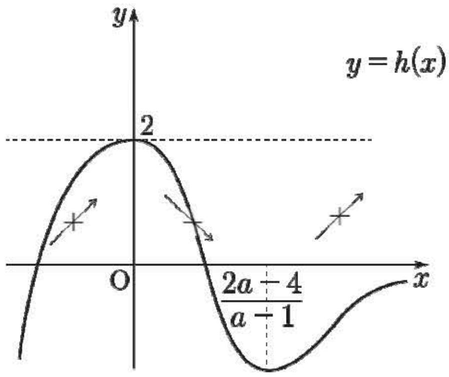
$h'(x)=-2xe^{-x}$이고, $x=0$에서 극대이므로 함수 $h(x)$의 개형을 그려보면



$h(x) \le 2$를 만족함을 알 수 있습니다.

$v)$ $a<1$

이것도 함수 $h(x)$의 개형 그려보면 항상 $h(x) \le 2$를 만족함을 알 수 있습니다.



따라서 $i)$, $ii)$, $iii)$, $iv)$, $v)$에 의하여

$a \le 1$ 이므로 $f(1)$의 최댓값은 6

Caution! – 절대부등식에서 최대최소와 미분계수를 이용할 때

다항함수 $f(x)$에서 $f(a)=f'(a)=0$이면 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$ (단, $g(x)$는 다항식)이라는 것을 쉽게 알 수 있었기 때문에, $f(x) \ge 0$과 $f(a)=0$이라는 조건을 보면 $f(x)$를 인수분해했을 때 $(x-a)$의 지수가 짝수라는 것을 곧바로 가정할 수 있었습니다. 반대로 지수가 홀수면 부등식이 성립하지 않았죠.

하지만 초월함수에서는 상황이 약간 다릅니다. $f(x) \ge 0$일 때 $f(a)=0$이면 $f'(a)=0$인 것은 확실히 맞지만, $f(x)$가 정말 $x=a$에서 최솟값을 가지는지 알 방법이 없습니다. 따라서 **함수 $f(x)$의 개형을 그려 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같은지 확인하는 과정을 반드시 거치도록 하세요.**

한편, 함수의 구간이 분할되어 있다는 사실을 숨겨서 문제를 출제하는 경우도 있습니다.
기출 문제로 바로 가 봅시다.

EXAMPLE 07 [2013 수능]

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

* EXAMPLE 7 의 분석)

풀이 1. 구간 분할 함수의 따름정리

함수 $g(t)$를 문제에 써진 그대로 구해봅시다.

점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리 : $f(t)$ $(\because\ f(t)\ge 0)$

점 $(t,\ f(t))$에서 y축까지의 거리 : $|t|$

이므로 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & (f(t)\le |t|) \\ |t| & (f(t)>|t|) \end{cases}$$

임을 알 수 있습니다. $|t|$가 있으니 t의 범위에 따라 나눠주는 것이 인지상정이죠?

(1) $t<0$

$$g(t)=\begin{cases} kt^2e^{-t} & (kt^2e^{-t}\le -t) \\ -t & (kt^2e^{-t}>-t) \end{cases}$$

이므로 $g(t)$가 미분가능하려면 $kt^2e^{-t}=-t$인 t를 $g'(t)$의 양변에 대입했을 때의 값이 같아야 합니다. 즉, $kt^2e^{-t}=-t$ 인 t에 대해 $(kt^2e^{-t})'=(-t)'$가 성립하면 $g(t)$가 그 점에서 미분가능합니다.

$kt^2e^{-t}=-t\ \rightarrow\ k(1-t)e^{-t}=-1$[39)]

$\Leftrightarrow\ kte^{-t}=-1\ \rightarrow\ ke^{-t}-kte^{-t}=-1\ (\because\ t\neq 0)$

$\Leftrightarrow\ kte^{-t}=-1\ \rightarrow\ ke^{-t}=0$

ke^{-t}가 0이 될 수 없으므로 $g(t)$가 $kt^2e^{-t}=-t$인 모든 t에 대해 미분불가능 합니다.

이제 방정식

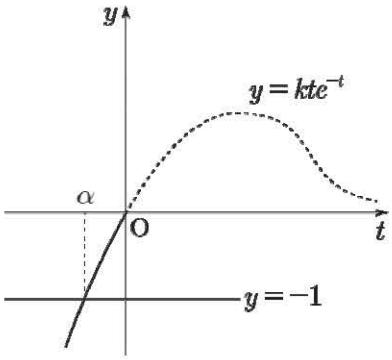
$kt^2e^{-t}=-t\ \Leftrightarrow\ kte^{-t}=-1$

의 해가 존재하는지를 살펴보기 위해 $y=kte^{-t}$의 개형을 그려봅시다.

$y'=k(1-t)e^{-t}$

이므로 개형을 완성하면 다음과 같습니다.

39) 함숫값이 같아지는 지점에서 미분계수도 같아야 함을 의미하는 것입니다.



따라서 $g(t)$는 $t<0$일 때 한 점에서 미분불가능 합니다.

(2) $t>0$

(1)의 결과에 따라 $g(t)$는 이 범위에서 항상 미분가능해야 합니다.

$$g(t)=\begin{cases} kt^2e^{-t} & (kt^2e^{-t}\le t) \\ t & (kt^2e^{-t}>t) \end{cases}$$

마찬가지로 $kt^2e^{-t}=t$일 때 $(kt^2e^{-t})'=t'$이면 함수가 그 점에서 미분가능합니다.

$kt^2e^{-t}=t \quad \to \; k(2t-t^2)e^{-t}=1$

$\Leftrightarrow \; kte^{-t}=1 \; \to \; 2kte^{-t}-kt^2e^{-t}=1$

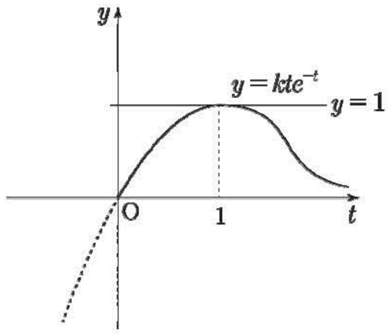
$\Leftrightarrow \; kte^{-t}=1 \; \to \; 2-t=1$

$\Leftrightarrow \; kte^{-t}=1 \; \to \; t=1$

따라서 $kt^2e^{-t}=t$일 때 $t\neq1$이면 함수 $g(t)$가 그 점에서 미분불가능 합니다. 이제

$kt^2e^{-t}=t \; \Leftrightarrow \; kte^{-t}=1$

의 해가 존재하는지를 살펴보기 위해 $y=kte^{-t}$의 개형을 그려봅시다.



그랬더니 $\dfrac{k}{e}>1$이면 $t\neq1$인 교점이 발생합니다. 그러므로 $g(t)$가 $t>0$에서 미분불가능한 점이 존재합니다. 한편, $\dfrac{k}{e}\le1$이면 교점이 생기지 않거나 교점이 $t=1$에서만 발생합니다.

따라서 k의 최댓값은 e입니다.

(3) $t=0$

(1)의 그래프를 잘 보면 $t=0$ 근방에서 $kte^{-t}>-1$이므로 $kt^2e^{-t}<-t$입니다.

(2)의 그래프를 잘 보면 $t=0$ 근방에서 $kte^{-t}<1$이므로 $kt^2e^{-t}<t$입니다.

따라서 $t=0$ 근방에서 $g(t)=f(t)$이고, $g(t)$는 $t=0$에서 미분가능합니다.

답 : ⑤

방금은 구간 분할 함수의 따름정리를 이용하여 문제를 풀었는데, 이 문제를 절댓값함수의 미분가능성을 이용하여 풀 수는 없을까요?

당연히 가능합니다. 다음 페이지에서 천천히 따라와 보세요.

풀이 2. 절댓값 함수의 미분가능성 이용

함수 $g(t)$가

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & (f(t)\le |t|) \\ |t| & (f(t)>|t|) \end{cases}$$

라 했죠? 그러면 조건에 따라 함수 $|f(t)-|t||$의 미분불가능한 점의 개수가 1이 되어야 하는데, 절댓값 안에 $|t|$가 있으니 범위를 나눕시다.

(1) $t<0$

$|f(t)-|t||=|f(t)+t|$입니다.

또한,

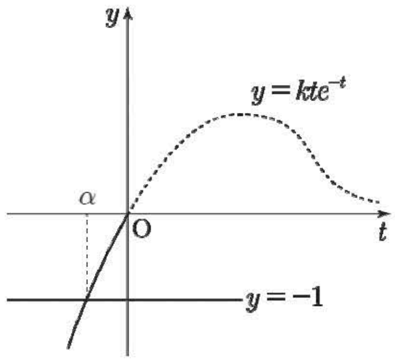
함수 $|f(t)+t|$의 미분가능성은

$t\neq 0$일 때 함수 $\left|\dfrac{f(t)}{t}+1\right|$의 미분가능성과 동치입니다.

일단 이 얘기는 뒤에서 설명하도록 하고, 만약 이것이 성립하면 풀이가 아주 간단해집니다.

$$\frac{f(t)}{t}+1=0 \Leftrightarrow kte^{-t}=-1$$

이 되는 점을 찾으면 됩니다.



위의 그래프에 의해 함수가 $t=\alpha$에서 미분가능하지 않습니다.

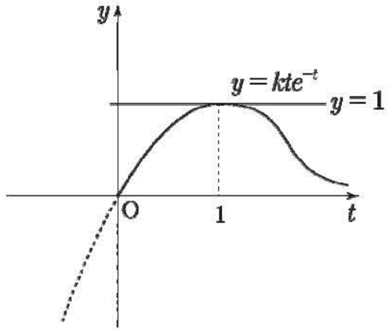
(2) $t>0$

$|f(t)-|t||=|f(t)-t|$ **의 미분가능성은** $\left|\dfrac{f(t)}{t}-1\right|$ **의 미분가능성과 동치입니다.**

(1)의 결과에 따라 함수 $\left|\dfrac{f(t)}{t}-1\right|$은 이 범위에서 항상 미분가능해야 합니다.

$$\frac{f(t)}{t}-1=0 \Leftrightarrow kte^{-t}=1$$

이 되는 점을 찾으면 됩니다.



따라서 $\dfrac{k}{e}\le 1$이어야 함수 $\left|\dfrac{f(t)}{t}-1\right|$가 $t>0$ 범위에서 항상 미분가능합니다.

풀이 1과 마찬가지의 방법으로 $t=0$ 근방에서 $g(t)=f(t)$임을 알아낼 수 있으므로, $g(t)$는 $t=0$에서 미분가능합니다.

따라서 k의 최댓값은 e입니다.

답 : ⑤

아니! 도대체 왜 갑자기 함수를 t로 나눴을까요?[40] 방금 절댓값 함수의 미분가능성을 이용하기 위해 사용한 따름정리는 다음과 같습니다.

$x\ne 0$일 때 함수 $|f(x)|$의 미분가능성은 함수 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$의 미분가능성과 같다.

증명은 아주 간단합니다.

함수 $|f(x)|$는 $f(x)\ne 0$이면 항상 미분가능하고,
$f(a)=0$인 a가 존재한다면 $f'(a)=0$이어야 미분가능합니다.

함수 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|(x\ne 0)$는 $f(x)\ne 0$이면 항상 미분가능하고,
$f(a)=0$인 a가 존재한다면

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'\Bigg|_{x=a}=\frac{af'(a)-f(a)}{a^2}=0 \Leftrightarrow f'(a)=0$$

이어야 미분가능합니다.

40) 우리가 미적분I에서 배운 '극값을 통한 해의 존재성 확인'을 이용하여 모든 문제를 풀 수 있다고 한 맥락 때문입니다.

따라서 두 함수의 미분가능성이 같다는 것을 알 수 있습니다.

따름정리(Corollary)

두 절댓값 함수의 $x \neq 0$일 때의 미분가능성은 동치이다.

$$|f(x)|, \qquad \left|\frac{f(x)}{x}\right|$$

풀이 3. 그래프를 이용한 직관적 판단

한편, 이 문제의 가장 흔히 알려진 풀이이자 저희가 연습할 때는 최대한 사용하지 말라고 하는 풀이인 그래프를 이용해서 이 문제를 풀어보겠습니다.

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & (f(t) \leq |t|) \\ |t| & (f(t) > |t|) \end{cases}$$

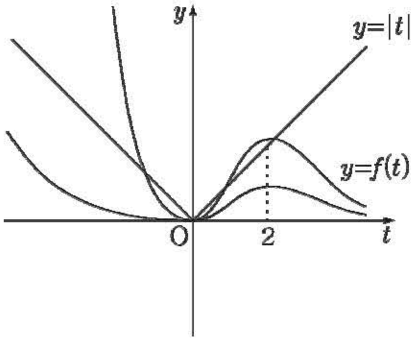
인데, 좌표평면에 두 함수의 그래프 $y = f(t)$와 $y = |t|$를 그려봅시다.

먼저 $y = f(t)$의 개형부터 파악해야겠네요.

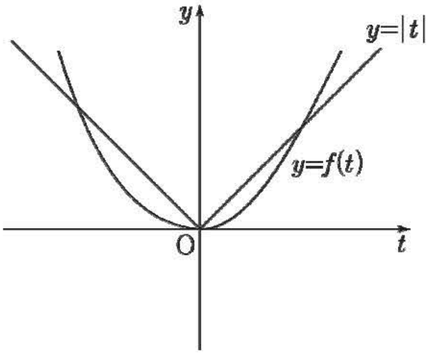
$$y = kt^2e^{-t} \Rightarrow y' = kt(2-t)e^{-t}$$

이므로 $y = f(t)$는 $t = 0$과 $t = 2$에서 극값을 가집니다.

한편, $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = \infty$, $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$[41]이 성립하므로 그래프는 다음과 같습니다.



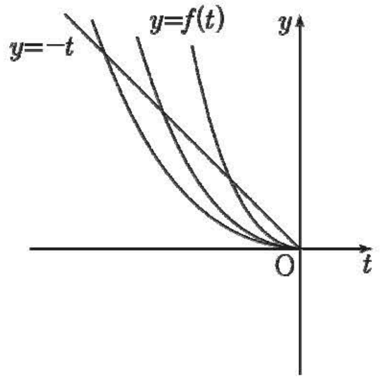
두 그래프의 교점에서 두 함수의 미분계수가 같으면 $g(t)$가 미분가능, 미분계수가 다르면 $g(t)$가 미분불가능합니다. 가장 먼저 눈에 들어오는 교점은 $t = 0$네요.



41) 상권에서 배우기는 했지만 교과서에서는 이 극한값을 다루지 않는다고 얘기했죠?

$f'(0)=0$이고, $y=|x|$가 $x=0$ 주변에서 각각 기울기가 1과 -1인 직선으로 나타나므로 $t=0$ 주변에서 $f(t)<|t|$임을 알 수 있습니다.
따라서 $t=0$ 주변에서 $g(t)=f(t)$고, $g(t)$는 $t=0$에서 미분가능합니다.

이제 $t\neq 0$인 교점을 따져봅시다.
k값을 조정하다 보면 $t>0$에서는 교점의 개수가 바뀔 것 같은데 $t<0$에서 두 함수가 항상 한 점에서 만날 것 같네요. 일단 $t<0$부터 살펴봅시다.



한 점에서 미분불가능하게 만날 것 같죠? 다들 보통 여기서 끝내요. 혹시나 모를 독자들을 위해 아래에 수학적인 풀이도 동봉합니다. 위에서 이미 수학적인 풀이는 물리도록 맛봤지만 여기서는 특별히 그래프의 특성을 이용한 풀이를 실었습니다.

$$f'(t)=kt(2-t)e^{-t},\ f''(t)=k(t^2-4t+2)e^{-t}$$

이므로 $t<0$일 때 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록합니다. 그리고 $\lim_{t\to-\infty}f'(t)=-\infty$임도 체크합시다. 한편, $y=|t|=-t$는 기울기가 -1인 직선이죠.
그러면 함수 $y=f(t)+t$는

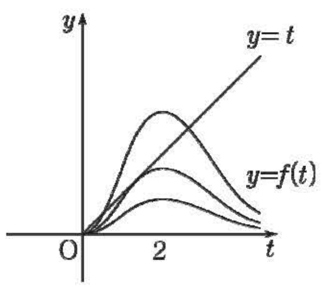
$t=0$에서 함숫값이 0, 미분계수가 1이고

$t\to-\infty$에서 미분계수가 $-\infty$로 발산

하는 함수이므로 $t<0$에서 $y=0$인 근이 반드시 하나 발생합니다.
그 근을 $t=\alpha$라 두면, 평균값의 정리에 의해

구간 $(0,\ \alpha)$ 내에 $-1=\dfrac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=f'(\beta)$인 실수 β가 존재

하고, $f'(t)$가 증가함수이므로 $f'(\alpha)<f'(\beta)=-1$입니다.
따라서 $t=\alpha$에서 $g(t)$는 미분가능하지 않습니다.



한편, $t>0$에서는 k의 값에 따라 교점이 발생할 수도 있고 발생하지 않을 수도 있습니다. 미분불가능한 점이 하나니까 안 만나거나 만나면 두 그래프가 접하게 만나야겠죠? 최댓값을 구하라고 했으니 값이 딱 떨어지게 접선일 때가 최대가 되도록 문제를 냈을텐데, 마침 그림을 보니 k가 커질수록 $y=f(t)$의 그래프가 $y=t$에 가까워지네요. 따라서 k의 최댓값은 $y=t$가 $y=f(x)$의 접선일 때 발생합니다.
접선의 방정식은

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

인데,

$$f(t)=kt^2e^{-t},\ f'(t)=kt(2-t)e^{-t}$$

이므로 대입하면

$$y=kt(2-t)e^{-t}x+kt^2(t-1)e^{-t}$$

가 됩니다. 따라서

$$kt(2-t)e^{-t}=1,\ kt^2(t-1)=0 \Leftrightarrow t=1,\ k=e$$

이므로 k의 최댓값은 e입니다.

역시 $k>e$일 때 왜 안 되는지 이유를 알아봅시다.
일단 $k>e$면 $f(1)>1$이고, $t=0$ 근방과 $t\to\infty$에서 $f(t)<t$이므로
사이값 정리에 의해 구간 $(0,\ 1)$과 $(1,\ \infty)$에서 두 그래프의 교점이 적어도 하나씩 발생합니다. 두 값을 $t=\alpha,\ \beta$로 둡시다.
$t<0$일 때 $g(t)$의 미분불가능한 점이 하나 존재하므로 $t>0$일 때는 미분불가능한 점이 생기면 안 됩니다. 따라서 $f'(\alpha)=f'(\beta)=1$이 성립해야 합니다.
한편, 평균값 정리에 의해

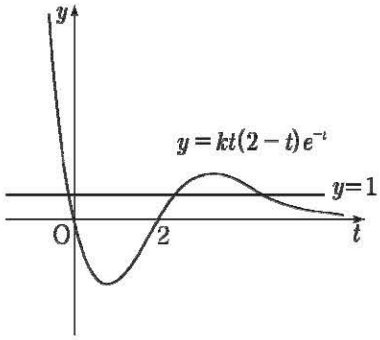
구간 $(0,\ \alpha)$ 내에 $1=\dfrac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=f'(\alpha')$인 실수 α'가 존재

구간 $(\alpha,\ \beta)$ 내에 $1=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\beta')$인 실수 β'가 존재

하므로 방정식 $f'(t)=1$의 $t>0$인 근이 $t=\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta'$로 네 개 발생합니다.
그런데

$$f'(t)=kt(2-t)e^{-t}$$

의 그래프가 아래와 같으므로



모순입니다. 따라서 $k\le e$여야 합니다.

풀이 3을 구사한 대부분의 학생들이 아래의 수식적인 판단을 직관에 맡기고 넘어갔을 겁니다. 사실 시험장에서 이 정도로 엄밀하게 수식적인 설명을 할 필요도 없고, 애초에 수식으로 설명하려면 풀이 1이나 풀이 2를 사용하는 것이 더 낫지만, 중요한 것은 수식으로 설명할 수 있느냐 없느냐의 문제입니다. 그래프를 통해 직관적으로 얻은 정보를 최대한 수식으로 번역하는 연습을 해 두십시오.

이상의 문제들을 통해 구간 분할 함수의 미분가능성은 절댓값 함수의 미분가능성과 긴밀한 관계가 있음을 알아보았습니다. 언제든 출제되어도 이상할 것이 없는 소재고, 우리가 문제를 푸는 원칙에서 벗어나게 출제될 일도 거의 없는 소재입니다. 항상 하던 방식으로 똑같이 문제를 풀어내면 됩니다. 다만, 구간 분할 함수의 따름정리를 이용할지 절댓값함수의 미분가능성을 이용할지는 여러분이 스스로 선택해야 합니다. **EXAMPLE 7**에서도 봤듯 두 가지의 접근이 모두 가능한 경우도 있습니다.

이제 조건을 보고 암묵적으로 구간을 분할해야 하는 문제를 살펴봅시다.

EXAMPLE 14 [수학의 명작 미적분I]

$-10 \le a \le 10$, $-10 \le b \le 10$인 두 정수 a, b에 대하여 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 양수 t의 값이 단 하나 존재할 때, 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

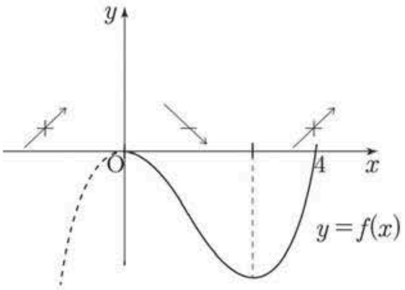
(가) $0 < x \le t$일 때, $f(x) = a(x^3 - 4x)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) + bt = f(x+t)$이다.

* EXAMPLE 14 분석)

우선 $a > 0$이라 가정한 후에

$$f'(x) = 3ax^2 - 8ax = ax(3x-8)$$

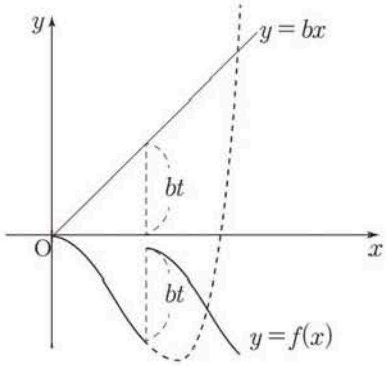
이므로 $x > 0$에서 함수 $f(x)$의 개형을 그려보면 다음과 같습니다.



이제 $f(x) + bt = f(x+t)$라고 했으니, 함수 $f(x)$의 개형이 $t < x \le 2t$에서 어떻게 그려질 것인지 살펴봐야 합니다. 함수 $f(x+t)$는 함수 $f(x)$에 bt만큼을 더한 것이니, t의 값을 하나하나 대입해보면서, 함수 $f(x+t)$를 추론해봅시다.

$i)$ $b \ge 0$

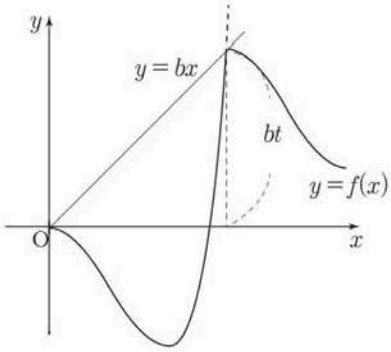
만약 t의 값이 곡선 $y = a(x^3 - 4x^2)$과 직선 $y = bx$가 만나는 교점의 x좌표보다 작다면 함수 $f(x+t)$는 다음과 같이 그려질 것입니다.



따라서 함수 $f(x)$는 연속함수가 될 수 없습니다.

마찬가지의 논리로 t의 값이 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 x좌표보다 크다면 $f(x)$가 연속함수가 될 수 없습니다.

따라서 함수 $f(x)$가 연속함수가 되려면, t의 값이 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 x좌표가 되어야 합니다.

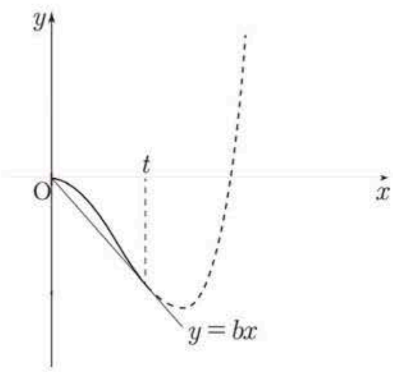


따라서 $a>0$, $b\geq 0$인 경우에서는 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 개수가 1개이므로 만족시키는 t의 개수도 1개입니다. 따라서 조건을 항상 만족시킵니다.

$\therefore\ a=1\sim 10,\ b=0\sim 10 \Rightarrow 110$개

$ii)$ $b<0$

$b>0$에서 살펴보았듯이, 함수 $f(x)$가 조건을 만족시키도록 하는 t의 개수가 단 하나 존재한다는 것은 곡선 $y=a(x^3-4x^2)$과 직선 $y=bx$가 만나는 교점의 개수가 1이라는 말과 동일합니다. 따라서 그림과 같은 상황입니다.



$x=t$에서 $y=bx$와 $y=ax^3-4ax^2$이 접하므로

$$\begin{cases} at^2(t-4)=bt \\ a(3t^2-8t)=b \end{cases}$$

를 만족시켜야 합니다. 두 식을 나눠주면,

$$\frac{t-4}{3t-8}=1 \quad \Rightarrow \quad t=2$$

이므로 다시 대입하면, $b=-4a$를 만족시키는 $a>0$, $b<0$인 순서쌍의 개수입니다.

$(1,\ -4)$, $(2,\ -8)$

뿐이므로 총 2개가 됩니다.

따라서 $a>0$일 때 만족하는 총 순서쌍의 개수는 112개이고, $a<0$일 때도 완전히 그 규칙이 같으므로 112개가 됩니다. 한편, $a=0$이라면 만족하는 t가 무수히 많이 존재하게 되므로 조건을 만족하지 않습니다. 따라서 답은 224입니다.

이 문제의 바탕에는 다음과 같은 아이디어가 숨어 있습니다. 구간 $(0,\ t)$에서 $f(x)$의 값이 주어져 있으므로, $f(x+t)=f(x)+bt$라는 식에 의해 구간 $(t,\ 2t)$에서 $f(x)$의 값을 구해낼 수 있습니다.

$$f(x)=f(x-t)+bt \quad (t<x<2t)$$

이면, $x-t$가 구간 $(0,\ t)$에 속하므로

$$f(x-t)=a\{(x-t)^3-4(x-t)\}$$

이고,

$$f(x)=a\{(x-t)^3-4(x-t)\}+bt$$

가 되는 것이죠. 같은 방법으로 $(2t,\ 3t)$에서 $f(x)$의 값은

$$f(x)=f(x-t)+bt=f(x-2t)+2bt \quad (2t<x<3t)$$

에서 $x-2t$가 구간 $(0,\ t)$에 속하므로

$$f(x)=a\{(x-2t)^3-4(x-2t)\}+bt$$

가 됩니다. 이런 방식으로 정수 k에 대해 구간 $(kt,\ (k+1)t)$에서는 $y=f(x)$의 식이 위처럼 구해지므로 항상 연속임을 알 수 있고, $x=kt$인 경계에서만 연속성을 판정해 주면 됩니다. 이처럼 $f(x+t)$와 $f(x)$ 사이의 관계식을 이용해서 $f(x)$의 식을 길이가 t인 구간으로 쪼개서 구할 수 있다는 사실을 기억해 두세요.

이번에는 새로운 상황으로부터 함수가 주기성을 가지고 있다는 사실을 우리가 직접 구해내야 하는 문제를 풀어보겠습니다. 구하는 방식은 약간 다를 수 있어도 새로운 내용을 배우는 것이 아닙니다. 앞 토픽에서 배웠던 것들을 어떻게 활용하면 좋을지 고민해보세요.

EXAMPLE 15

[2015 09 평가원]

양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

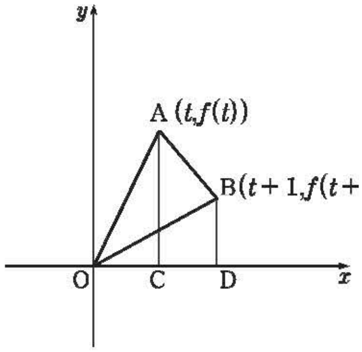
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.

(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx=2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

* EXAMPLE 15 분석)

조건 (나)를 보니 세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이에 관한 식이 주어졌네요. 그러면 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구해야겠죠? 함수가 감소하면서 함숫값이 항상 양수이므로 세 점의 위치관계는 아래와 같습니다.



그러면 (삼각형 OAC) + (사다리꼴 ABDC) − (삼각형 OBD)로 삼각형 OAB의 넓이를 구할 수 있습니다. 따라서

$$\frac{tf(t)}{2}+\frac{f(t)+f(t+1)}{2}-\frac{(t+1)f(t+1)}{2}=\frac{t+1}{t}$$

$$\Leftrightarrow\ (t+1)f(t)-tf(t+1)=\frac{2(t+1)}{t}$$

입니다. 음... $f(t)$ 앞에 $t+1$이 붙어있고 $f(t+1)$ 앞에 t가 붙어있으니 뭔가 t끼리, $t+1$끼리 묶어줄 수 있는 방법이 없을까... 고민하다 보니, 구하고자 하는 값이 $\frac{f(x)}{x}$에 관련되어 있네요? 양변을 $t(t+1)$로 나누면

$$\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{2}{t^2}$$

을 얻습니다. 우리가 알고 있는 값은 $\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt=2$인데...

풀이 1

함수 $\frac{f(t)}{t}$의 한 부정적분을 $F(t)$로 두면, $\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt=F(2)-F(1)$입니다.

한편, $\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=(F(t)-F(t+1))'$이네요? 아하, (나) 조건으로부터 $F(t)-F(t+1)$의 일반식을 찾을 수 있겠네요!

$$F(t)-F(t+1)=\int\left\{\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}\right\}dt=\int\frac{2}{t^2}dt=C-\frac{2}{t}\ \text{(단, } C\text{는 적분상수)}$$

에 $t=1$을 대입하면 좌변의 값이 -2입니다. 따라서 $C=0$이고,

$$F(t+1)-F(t)=\frac{2}{t}$$

을 얻습니다. 따라서

$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(t)}{t}dt=F\left(\frac{11}{2}\right)-F\left(\frac{7}{2}\right)=F\left(\frac{11}{2}\right)-F\left(\frac{9}{2}\right)+F\left(\frac{9}{2}\right)-F\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{4}{9}+\frac{4}{7}=\frac{64}{63}$$

으로부터 $p+q=127$입니다.

풀이 2

$$\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{2}{t^2},\ \int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt=2$$

으로부터 $\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(t)}{t}dt$의 값을 구해야 합니다. $\frac{f(t)}{t}=g(t)$로 치환해 보니, 조건이

$$g(t)-g(t+1)=\frac{2}{t^2}$$

로 바뀌네요. 그러면 $g(t)$의 값으로부터 $g(t+1)$의 값을 추론해낼 수 있습니다. 즉,

$$\begin{aligned}\int_{a+1}^{b+1} g(t)dt &= \int_a^b g(t+1)dt = \int_a^b \left(g(t)-\frac{2}{t^2}\right)dt \\ &= \int_a^b g(t) - \int_a^b \frac{2}{t^2}dt = \int_a^b g(t) + \frac{2}{b}-\frac{2}{a}\end{aligned}$$

가 성립합니다. 그런데 적분 구간이 $\frac{7}{2}$부터 $\frac{11}{2}$까지네요? 1부터 2를 그대로 1씩 평행이동하면 적분 구간에 분수가 안 나오고...

$$\int_1^2 g(t)dt = \int_1^{\frac{3}{2}} g(t)dt + \int_{\frac{3}{2}}^2 g(t)dt$$

로 쪼개면,

$$\int_2^{\frac{5}{2}} g(t)dt = \int_1^{\frac{3}{2}} g(t)dt + 2\times\frac{2}{3} - 2\times 1 = \int_1^{\frac{3}{2}} g(t)dt - \frac{2}{3}$$

이므로

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(t)dt = \int_1^2 g(t)dt - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

입니다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(t)dt &= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(t)dt + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(t)dt \\ &= \left(\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(t)dt + 2\times\frac{2}{7} - 2\times\frac{2}{5} + 2\times\frac{2}{5} - 2\times\frac{2}{3}\right) \\ &\quad + \left(\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(t)dt + 2\times\frac{2}{9} - 2\times\frac{2}{7} + 2\times\frac{2}{7} - 2\times\frac{2}{5} + 2\times\frac{2}{5} - 2\times\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{4}{7}+\frac{4}{9}=\frac{64}{63}\end{aligned}$$

이고, $p+q=127$입니다.

풀이 2와 같이 조건식을 통해 함수의 구간을 이동시키는 컨셉의 문제는 Stage 2에서도 만나볼 수 있습니다. 여기까지 구간을 분할하는 문제들을 살펴보았습니다. VIP로 연습해 보세요.

Topic 16. 역함수와 합성함수

이 토픽에서는 역함수와 합성함수의 미적분에 대한 내용을 총정리합니다. 그동안 기출 된 내용보다 조금 더 어려운 문제들을 통해 역함수, 합성함수가 포함된 낯선 문항도 겁먹지 않고 접근하는 연습을 해볼 것입니다. 본문에는 이미 앞에서 배웠던 익숙한 문제도 있지만 새로운 문제들도 있고, VIP는 새로운 문제들 위주로 구성해서 당황하지 않고 배운 내용을 스스로 적용해 보는 연습을 해볼 수 있습니다. 한번 시작해볼까요?

1. 합성함수의 미분과 적분

적분을 할 때 가장 헷갈리는 것은 적분 안 변수들 사이의 관계입니다. 어떤 게 변수이고 어떤 게 상수인지, 이 변수는 함수와 관계가 있는지가 항상 문제가 됩니다. 이를 완전히 정복하기 위해 일단 합성함수의 미분법부터 다시 한 번 보고 가겠습니다.

THEOREM

합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, $y=f(g(x))$의 도함수

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{or} \quad \{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$ [49]

Topic 11에서 치환적분법을 처음 배울 때 치환적분의 원리가 합성함수의 미분법이라고 했습니다.
따라서 합성함수의 적분은 거의 대부분 치환적분으로 이루어지게 됩니다.

THEOREM

정적분의 치환적분법

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이며, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

49) 이렇게 얻어낸 결과를 연쇄법칙(Chain rule)이라고 부릅니다. 마치 약분같이 생겼지만 약분과는 다릅니다.

* EXAMPLE 4 분석)

$f(f(x))$의 역함수를 생각하는 것은 헷갈리니, $f(f(x))=h(x)$로 치환해봅시다. 그러면

$$g(h(x))=x \Leftrightarrow g(f(f(x)))=x$$

이 만족된다는 것을 알 수 있습니다. 양변을 미분하면

$$g'(f(f(x)))\times f'(f(x))\times f'(x)=1$$

인데, 여기에 $x=\frac{\pi}{6}$을 대입하면

$$g'\left(\sin\frac{1}{2}\right)\times\cos\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$$

임을 알 수 있습니다.

$$\therefore\ g'\left(\sin\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sec\frac{1}{2},\ 12p^2=16$$

간단하죠? 이렇게 역함수의 미분법은 굳이 암기하지 않아도 합성함수의 미분법을 통해 금방 유도할 수 있습니다. 그런데 역함수의 미분법이 숨겨져 있는 경우도 있는데요. 바로 이 문제였죠.

EXAMPLE 05 [2016 수능]

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은?

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

* EXAMPLE 5 분석)

이 문제는 아무 생각 없이 그냥 써져 있는 그대로 생각하면 합성함수의 미분법 문제입니다. 하지만 문제의 의미를 생각하면 역함수의 미분법이 보이는데, 풀어볼까요?

$p(x)=x^3+2x^2-15x+5$일 때,

$$p(x)=5 \Leftrightarrow x(x+5)(x-3)=0$$

이므로 $f(5)=3$, $g(5)=-5$입니다. $h(t)$를 미분하면

$$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$$

인데,

$$h'(5)=8+5\times\{f'(5)-g'(5)\}$$

이므로 $f'(5)$와 $g'(5)$의 값이 필요합니다. $p(l(t))=t$인 함수 $l(t)$에 대해

$$l'(t)=\frac{1}{p'(l(t))}=\frac{1}{3l(t)^2+4l(t)-15}$$

가 성립합니다. $p(f(t))=p(g(t))=t$가 성립하므로, $f(t)$와 $g(t)$는 각 구간에서 정의된 $l(t)$입니다. 따라서

$$f'(5)=\frac{1}{3\times 3^2+4\times 3-15}=\frac{1}{24},\ g'(5)=\frac{1}{3\times(-5)^2+4\times(-5)-15}=\frac{1}{40}$$

이므로

$$h'(5)=8+5\times\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right)=8+\frac{1}{12}=\frac{97}{12}$$

입니다.

답 : ④

자, 찾아내셨나요? x좌표가 가장 큰 점의 좌표인 $f(t)$만 생각했을 때,

$$p(f(t))=t$$

가 성립합니다. 익숙하게 보던 꼴이죠?

일반적으로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(g(x))=x$이고 다음 조건이 성립하면 $g(f(x))=x$입니다.

'$f(x)$의 정의역과 $g(x)$의 치역이 같다.'[51)]

이면 반드시 $f(g(x))=x$가 성립할 때 $g(f(x))=x$가 성립하므로 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계가 됩니다.[52)]

그러면 이 문제에서는 어떨까요? $p(f(t))=t$이므로 $f(p(t))=t$이 성립하면 $f(t)$의 역함수를 잘 정의할 수 있게 됩니다. 함수 $p(t)$의 정의역을 $t\geq\frac{5}{3}$로 정의하는 순간[53)] $p(t)$의 정의역과 $f(t)$의 치역이 같아집니다. 따라서 함수 $f(t)$의 역함수를 잘 정의할 수 있게 되는 것이지요.

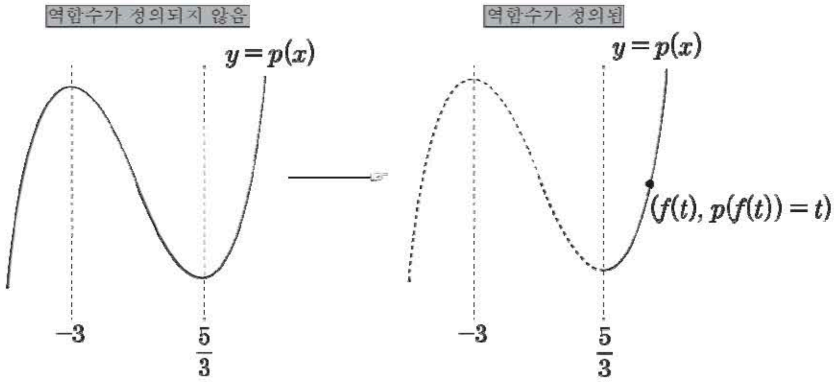
이제 더는 헷갈리지 않으시겠죠? 다시 정리해볼까요?

따름정리(Corollary)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(g(x))=x$가 성립할 때, **$f(x)$의 정의역과 $g(x)$의 치역이 같으면** $f(x)$는 $g(x)$의 역함수이다.

이것을 좀 더 이해하기 쉽게 그림으로 살펴보면 다음과 같은 상황입니다.

51) 이 내용은 증명하지 않고 받아들이도록 합니다. 교과서에 나와 있지 않습니다.
52) 역함수를 함수의 합성에서의 역원으로 정의하기도 합니다. 즉, $f(g(x))=g(f(x))=x$를 만족하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 서로 역함수 관계에 있다고 정의하는 것이죠.
53) $p(x)$를 일대일 함수가 되도록 만들어 주었다고 생각하셔도 됩니다.



따라서 원래의 삼차함수 $p(x)$에서는 그 역함수를 정의할 수 없지만, 정의역을 제한하여 일대일 함수로 만들어주면 역함수를 정의할 수 있게 되는 것입니다.

정리하자면, 이 기출문제는 아무 생각 없이 합성함수의 미분법으로 풀어낼 수도 있지만 문제의 밑바닥에 '역함수'라는 개념이 숨어있다는 점을 주목할 필요가 있습니다. 아래 예제는 미적분I과 미적분II 두 권에 모두 실린 문제입니다. 이미 다들 풀어보았을 테니 해설은 생략하고, $h(t)$의 그래프가 어떻게 생겼을지 스스로 추론해보세요.

EXAMPLE 06

함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 점 $(a,\ 0)$ $(a>1)$사이의 거리가 최소가 되도록 하는 P의 좌표를 $(\alpha,\ f(\alpha))$라 할 때, 실수 t에 대한 두 함수 $g(t)$, $h(t)$가 다음과 같다.

$g(t)$는 방정식 $f'(\alpha)x+t=f(x)$의 실근의 개수이다. $h(t)$는 방정식 $f'(\alpha)x+t=f(x)$의 실근들의 합이다.

함수 $g(t)$가 불연속이 되는 양수인 t의 값을 k라 할 때, $\lim_{t\to k+} h(t)=\lim_{t\to k-} g(t)$가 성립한다.

$32a$의 값을 구하시오.

[무소속]
Stage 1 관련 Topic
Topic 15

53. 원점을 지나고 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^5 f(x)\,dx$의 최댓값은 $p+\frac{q}{\ln 2}+\frac{1}{(\ln 2)^2}$이다. $p+2q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이고 $\ln 2$는 무리수이다.)

(가) 모든 정수 n에 대하여
$$f'\left(\frac{n}{2}+t\right)=4^t+1 \quad \left(0<t<\frac{1}{2}\right)$$
또는
$$f'\left(\frac{n}{2}+t\right)=-4^t+1 \quad \left(0<t<\frac{1}{2}\right)$$
이다.
(나) 모든 실수 a에 대하여 x에 관한 방정식
$$f(x)-f(a)=x-a$$
의 실근의 개수는 3이다.
(다) 모든 정수 n에 대하여
$$f(3n-2)+2=f(3n-1)+1=f(3n)$$
이다.

[무소속]
Stage 1 관련 Topic
Topic 9
Topic 10

56. 함수 $f(x) = ae^{e^x} + b$에 대하여 방정식

$$\int_0^x \frac{1}{f'(t)}dt = x$$

의 실근이 $x = f^{-1}(3)$뿐일 때, ab의 값은? (단, $a > 0$이고, b는 실수이다.)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ $\frac{3}{e}$
④ $\frac{4}{e}$ ⑤ $\frac{5}{e}$

[무소속]
Stage 1 관련 Topic
Topic 10
Topic 12

57. 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \pi x & (x < 0) \\ \pi \sin x & (0 \le x < \pi) \\ -\pi x + \pi^2 & (x \ge \pi) \end{cases}$$

이고, 부등식

$$\left(\int_x^{\pi} f(t)dt\right)^2 \le \pi \int_0^x f(t)dt$$

의 해가 $a \le x \le b$ 또는 $c \le x \le d$일 때, $b + d$의 값은?
(단, $b < c$이다.)

① π ② $\pi + 1$ ③ $\pi + \sqrt{2}$
④ $\pi + \sqrt{3}$ ⑤ $\pi + 2$

53.

조건 (가)를 처다보니 $f'(x)$의 식에 달려 있는 1이 매우 눈엣가시입니다. 1을 때버리면 모두가 행복할 것 같은데, 그러고 보니 조건 (나)와 (다)도 $f(x)-x$에 관한 식으로 쓸 수 있을 것 같습니다. $g(x)=f(x)-x$로 정의하면,

(가) $g'\left(\frac{n}{2}+t\right)=4^t$ or -4^t (단, $0<t<\frac{1}{2}$, n은 정수)

(나) 모든 실수 a에 대해 방정식 $g(x)=g(a)$의 실근의 개수가 3

(다) 모든 정수 n에 대해 $g(3n-2)=g(3n-1)=g(3n)$

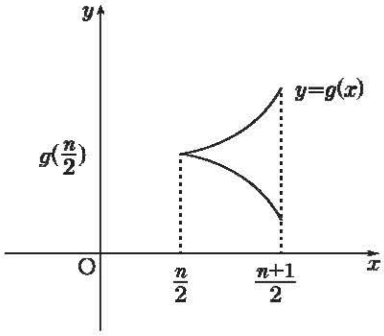
입니다. 그리고 구하는 값은 $\int_0^5 f(x)dx=\int_0^5\{x+g(x)\}dx=\frac{25}{2}+\int_0^5 g(x)dx$가 됩니다.

일단 조건 (가)를 원함수 $g(x)$에 관한 식으로 쓰면,

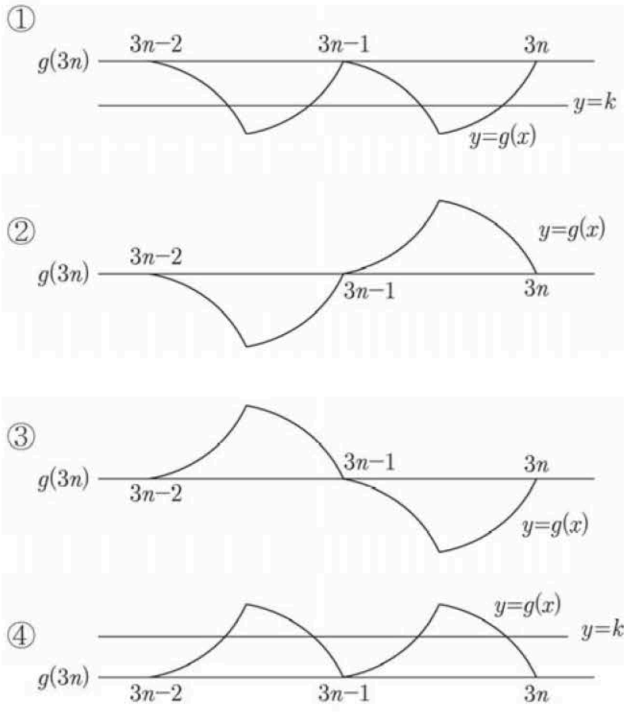
$$g\left(\frac{n}{2}+t\right)=g\left(\frac{n}{2}\right)+\int_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}+t}g'(x)dx=g\left(\frac{n}{2}\right)+\int_0^t 4^x dx \text{ or } g\left(\frac{n}{2}\right)-\int_0^t 4^x dx$$

$$=g\left(\frac{n}{2}\right)+\frac{4^t-1}{\ln 4}\text{ or } g\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{4^t-1}{\ln 4}$$

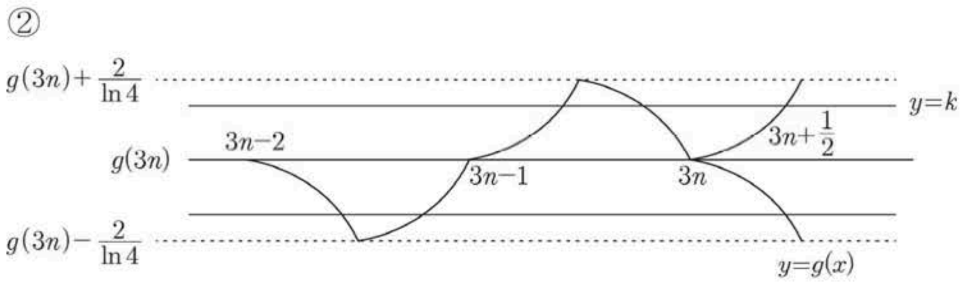
입니다. 이를 그림으로 표현하면 이렇게 되네요.



$\left|g\left(\frac{n+1}{2}\right)-g\left(\frac{n}{2}\right)\right|=\frac{1}{\ln 4}$로 일정함을 알 수 있습니다. 그러면 조건 (다)에 의해서 구간 $[3n-2,\ 3n]$에서 $g(x)$의 개형은 다음 중 하나입니다.

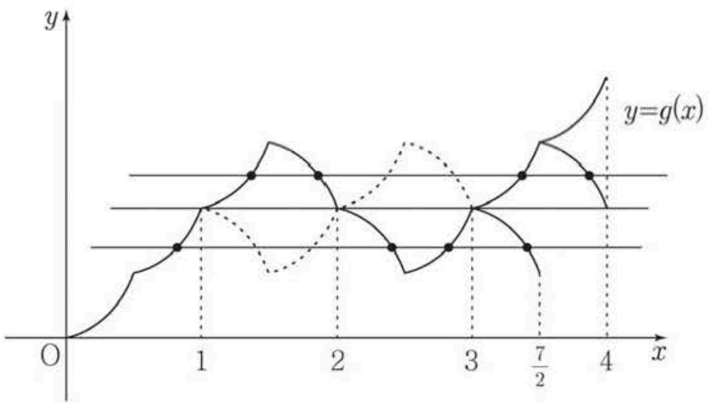


그런데 ①과 ④의 경우 방정식 $g(x)=k$의 근이 네 개 실수 k가 존재하므로 조건 (나)에 위배됩니다.
따라서 개형이 ② 또는 ③와 같이 나타납니다. 그런데 구간 $\left[3n,\ 3n+\frac{1}{2}\right]$의 개형을 보면,

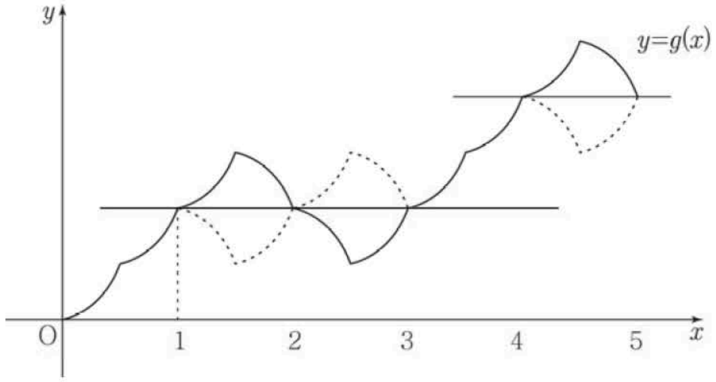


해당 구간에서 $g(x)$가 증가하든 감소하든 $g(3n)$과 $g\left(3n+\frac{1}{2}\right)$ 사이의 값 k에 대해 방정식 $g(x)=k$의 근의 개수가 항상 3이므로 $x>3n+\frac{1}{2}$에서 $g(x)$가 $g(3n)$과 $g\left(3n+\frac{1}{2}\right)$ 사이의 값을 가질 수 없습니다. 그러면 구간 $[3n,\ 3n+1]$에서 $g(x)$가 항상 증가하거나 항상 감소해야 합니다.
$f(x)$가 원점을 지나므로 $g(0)=f(0)-0=0$이고, 구간 $[0,\ 1]$에서 $g(x)$는 감소하거나 증가해야 합니다.

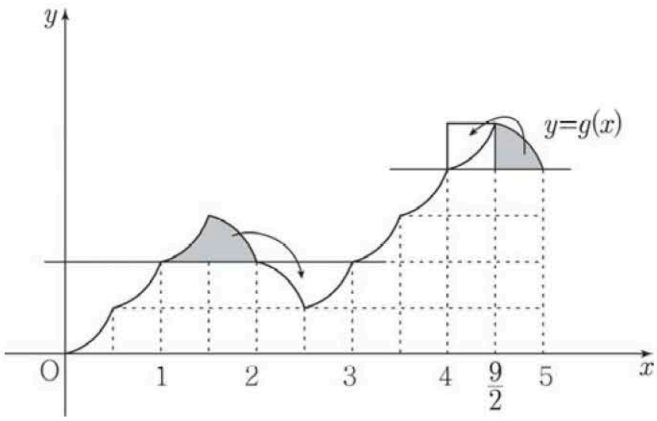
만약 $g(x)$가 구간 $[0,\ 1]$에서 감소하면, 앞에서 말한 대로 $g(x)$가 $x>\frac{1}{2}$에서 $g(0)$과 $g\left(\frac{1}{2}\right)$ 사이의 값을 가질 수 없으므로 $g(x)<0$입니다. 그러면 $\int_0^5 g(x)<0$입니다.
반면, $g(x)$가 구간 $[0,\ 1]$에서 증가하면, 같은 이유로 $g(x)>0$입니다. 우리는 $\int_0^5 g(x)\,dx$의 최댓값을 찾고 있기 때문에 $g(x)$가 해당 구간에서 증가하는 경우만 살펴봅시다. 구간 $[0,\ 3]$까지의 그래프는 아래와 같습니다.



구간 $[1,\ 3]$의 개형이 실선이나 점선 둘 중 하나로 나타납니다. 그런데 어떤 경우든 구간 $\left[3,\ \frac{7}{2}\right]$에서 $g(x)$가 감소하면 $g(x)=k$의 근이 네 개인 경우가 발생합니다. 따라서 해당 구간에서 $g(x)$가 증가해야 하고, 구간 $\left[\frac{7}{2},\ 4\right]$에서도 마찬가지로 $g(x)$가 증가해야 합니다.
이제 전체 구간 $[0,\ 5]$에서 그래프를 그려보면 다음과 같습니다.



구간 [4, 5]일 때 $g(x)$의 그래프가 실선인 것이 점선인 것보다 $\int_0^5 g(x)dx$의 값이 더 크고, 구간 [1, 3]일 때는 그래프가 실선이든 점선이든 적분값이 일정하게 나타나므로 함수의 개형을 다음과 같이 확정지을 수 있습니다.



도형을 위의 그림과 같이 적절히 잘라 붙이면 그래프의 밑넓이가 직사각형 23개와 지수함수 그래프 4개로 잘립니다. 직사각형 너비가 $\frac{1}{2}$, 높이가 $\frac{1}{\ln 4}$고, 지수함수 그래프의 밑넓이는

$$\int_0^5 g(x)dx = \frac{23}{2\ln 4} + 4\left(\frac{1}{(\ln 4)^2} - \frac{1}{2\ln 4}\right) = \frac{19}{4\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2}$$

입니다.

$$\therefore \int_0^5 f(t)dt = \frac{25}{2} + \frac{19}{4\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2}$$

참고로 위와 같은 패턴을 주기 3마다 계속 반복하면 실수 전체에서 조건을 만족하는 함수 $f(x)$가 존재함을 알 수 있습니다.

문항 comment

난도 극악의 문제입니다. 출제자, 해설자, 검토자, 독자 모두가 문제를 풀면서 괴로웠을 것 같죠? ~~(어쩌다가 이런 문제가 나온 건지..)~~

빼기함수를 이용하여 조건을 좀 더 보기 좋게 만들고, 그 빼기함수를 새로운 함수로 정의하여 문제의 조건들을 해석해 나가는 과정 하나하나가 결코 쉽지가 않습니다.

만약 못 푸셨더라도 실력에 결함이 있는 것은 절대 아닙니다. 다만 문제에서 조건을 통해 간접적으로 빼기함수를 유도한 부분, 함수를 직접 하나하나 작도해서 (나)조건을 만족시키도록 한 부분은 꽤나 신박하니 공부해두고 가면 좋을 것 같습니다.

답 : 22