미천한 수학자 　　　　　　초월함수의 미분법

#1. 미분의 방법

NOTE. 선행학습

1) 축약된 표현

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$: 구간 $[x, x+\Delta x]$에서의 평균 변화율 ➡ 즉, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$: 도함수의 정의 ➡ 즉, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$\frac{dy}{dx}$: 도함수 ➡ 즉, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$: $x=a$에서 미분계수 ➡ 즉, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = f'(a)$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$을 평균변화율, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$을 도함수의 정의, $\frac{dy}{dx}$을 도함수, $\frac{d}{dx}$을 x에 대한 미분 (프라임과 거의 같은 의미), $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$을 $x=a$에서 미분계수라고 읽는다.	

2) 기본공식

x^n의 미분법	곱의 미분법	합성함수의 미분법
① $\{x^n\}' = nx^{n-1}$ ② $\{c\}' = 0$	$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	(겉 미분)×(속미분)
도함수의 성질		
① $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$	② $\{cf(x)\}' = cf'(x)$	

1. x^α의 미분법

1) 기본공식	2) 추가공식	
$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ (α는 실수)	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{-m}{x^{m+1}}$ 〈엠마왓슨 공식〉	$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

참고 1) $\frac{1}{x^n}$은 x^{-n}으로 $\sqrt{x}$은 $x^{\frac{1}{2}}$으로 바꾸어 〈기본공식〉을 적용할 수 있지만 반드시 따로 암기한다.

참고 2) $x^{무리수}$인 경우에는 증명하지 않는다. 다만 미분법공식을 쓸 수 있다는 것이 알려져 있다.
예를 들면 x^π, x^e, $x^{\sqrt{2}}$ 등이 그렇다. (나머지는 뒤에서 차차 증명한다.)

예시 1 1)다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $y = x^{-3}$ 　　(2) $y = \frac{2}{x^2}$ 　　(3) $y = \frac{x^3+4x^2-x+1}{2x^5}$

예시 2 2)다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $y=x^{-\frac{2}{3}}$ (2) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ (3) $y=\frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$

2. 몫의 미분법

1) 공식	2) 공식의 암기
$\frac{d}{dx}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$	① 분자부터 미분, ② $\frac{\text{분자미분,분모곱해} - \text{분자곱해,분모미분}}{(\text{분모})^2}$

증명 1 : 몫의 미분법의 증명

$\frac{g(x)}{f(x)}=h(x)$라 하면,

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{g(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)}-\frac{g(x)}{f(x)}}{\Delta x}\times\frac{f(x+\Delta x)f(x)}{f(x+\Delta x)f(x)}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)f(x)-g(x)f(x+\Delta x)}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)f(x)-f(x)g(x)-g(x)f(x+\Delta x)+f(x)g(x)}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{g(x+\Delta x)-g(x)\}f(x)-g(x)\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\underbrace{\frac{\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{\Delta x}}_{\to g'(x)}f(x)-g(x)\underbrace{\frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}}_{\to f'(x)}\right]\times\underbrace{\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}}_{\to \frac{1}{\{f(x)\}^2}}\\
&= \frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}
\end{aligned}
$$

증명 2 : α의 확장 (자연수 → 정수)

자연수인 m에 대하여 $n=-m$이라고 할 때, x^n의 미분을 증명하여 본다.

$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$이다. 몫의 미분법에 의해서 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right)=\frac{-mx^{m-1}}{(x^m)^2}$

지수법칙의 의하여 분자지수에 분모지수를 빼주면 $\frac{-mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -mx^{-m-1}$이다.

$-m=n$이므로 대입하면 nx^{n-1}이다. n이 자연수일 때의 공식이 음의 정수에도 사용될 수 있음을 확인하였다.

예시 3 3)다음 함수 $y=\frac{x^2+3x+1}{2x+3}$의 도함수를 구하여라.

3. 합성함수와 음함수

1) 합성함수의 미분법 공식

① $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$　　② $\frac{d}{dx}f(g(h(x))) = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$

2) 음함수 미분법 (음함수의 의미 + 합성함수의 미분법)

1) 용어 : 우리나라에서는 음수와 음함수의 음자를 같은 글자를 쓴다. 하지만 그 의미는 분명히 다르고 그것이 영어에서는 정확히 들어난다. 음수는 영어로 negative number 이다. 그런데 음함수는 전혀 다른 Implicit function (내포하는 함수)라고 쓴다. 이것은 바로 도형을 의미한다.

2) 설명 : $x^2+y^2=r^2$인 원을 생각해 보면 함수의 정의에 의하여 함수가 아니라고 알고 있다. 하지만 이 식을 y에 대해서 정리해 보면 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 또는 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$가 나온다는 사실을 알고 있다.
결국 도형이란 사실 식을 정리해보면 정의역을 공유하는 서로 다른 함수의 합집합으로 볼 수 있는 것이다.
즉, 도형은 결국 함수를 내포한다.

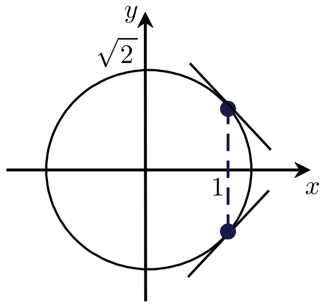
3) 결론 : 결국 음함수 미분법이란 변수 y를 x에 대해서 미분한다면
y를 통째로 하나의 함수처럼 보고 합성함수의 미분법을 진행하는 방법이다.
(하지만 y에 대해서 미분한다면 y는 지금까지 미분해왔던 데로 하나의 일차 항에 불과하다.)
- 헷갈린다면 y를 $f(x)$라고 생각하고 미분해보길 바란다.

예를 들어 y^2을 y에 대해서 미분할 경우 $\Rightarrow$ $2y$

y^2을 x에 대해서 미분할 경우 $\Rightarrow$ $2y\frac{dy}{dx}$　$\boxed{2y(\text{겉 미분})\times\frac{dy}{dx}(\text{속미분})}$

4) 참고 : 지금까지 (양)함수와는 달리 음함수의 경우에는 $x=\alpha$에서는 미분계수를 찾으라고 한다면 미분계수가 두 개 이상이 나올 수 있다. 그래서 음함수 미분계수를 구하라고 할 때는 미분하는 점의 y좌표도 함께 알려준다.

예를 들어 $x^2+y^2=2$인 원이라면 $x=1$에서만 물어본다면 오른쪽과 같이 두 개 나올 수 있으므로 $(1,1)$에서의 미분계수를 찾으라는 식으로 물어보는 것이 보통이다.



3) 설명 : 음함수 미분법

★ $x^2+y^2=r^2$을 두 함수로 나눠보면 ① $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 또는 ② $y=-\sqrt{r^2-x^2}$이다.

① $y=\sqrt{r^2-x^2}$의 도함수를 구해보면 ($\sqrt{\ }$의 미분법과 합성함수 미분법을 이용하였다.)

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$ 그런데 $y=\sqrt{r^2-x^2}$이므로 $\frac{d}{dx}y = -\frac{x}{y}$

② $y=-\sqrt{r^2-x^2}$의 도함수 역시 구해보면 ($\sqrt{\ }$의 미분법과 합성함수 미분법을 이용하였다.)

$$\frac{d}{dx}y = -\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$ 그런데 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$이므로 $\frac{d}{dx}y = -\frac{x}{y}$

★ 그리고 $x^2+y^2=r^2$의 양변을 x에 대해 미분하여 음함수 미분법(합성함수 미분법)을 사용하면

좌변 : $\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2 = 2x+2y\times\frac{dy}{dx}$　　우변 : $\frac{d}{dx}r^2 = 0$

이므로 $\frac{d}{dx}y = -\frac{x}{y}$이다.

결국 교과서에 나오는 설명은 하나의 예를 통해서 <음함수 미분법은 사용해도 된다.>라는 것을 알려준 것이다.

4) 증명 : α의 확장 (정수 → 유리수)

$m\times n\neq 0$인 정수에 대하여 $\alpha=\dfrac{n}{m}$이라고 할 때, x^{α}의 미분을 증명하여 본다.

$x^{\alpha}=x^{\frac{n}{m}}\Leftrightarrow y^{m}=x^{n}$이다. 양변을 음함수 미분법에 의하여 x에 대해 미분하면

$\dfrac{d}{dx}y^{m}=\dfrac{d}{dx}x^{n}\Leftrightarrow my^{m-1}\times\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}\Leftrightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{nx^{n-1}}{my^{m-1}}$이다.

여기에서 y에 $x^{\frac{n}{m}}$을 대입하고 지수법칙을 적용하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{nx^{n-1}}{m\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1}}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{n}{m}\times\frac{x^{n-1}}{\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1}}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{n}{m}\times\frac{x^{n-1}}{x^{\frac{n(m-1)}{m}}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{n}{m}\times x^{n-1-\frac{n(m-1)}{m}}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$$ 이다.

그런데 $\alpha=\dfrac{n}{m}$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}$이다.

예시 4 2011. 6. 가형(76%). 26번. 4점

4)함수 $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}$과 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=(g\circ f)(x)$라 하자. $h'(0)=15$일 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.

예시 5 5)$xy^{2}=1$의 식에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

4. 역함수 미분법

1) 역함수 미분법	2) 역함수의 미분계수	3) 역함수의 도함수
어떤 함수가 <$x=y$에 대한 식>으로 주어졌을 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하는 방법. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$	$y=f(x)$가 점 (a,b)를 지날 때, 이 함수의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 $x=b$에서의 미분계수. $(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$	$y=f(x)$의 역함수의 도함수는 1 단계 : $y=x$대칭. 즉, $x=f(y)$ 2 단계 : y에 대해서 미분 후 역수. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}=\dfrac{1}{f'(y)}$

설명 1 : <역함수 미분법>이라는 방법

역함수 미분법) $x=f(y)$처럼 표현된 함수에서 양변을 y에 대해 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=f'(y)\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$$

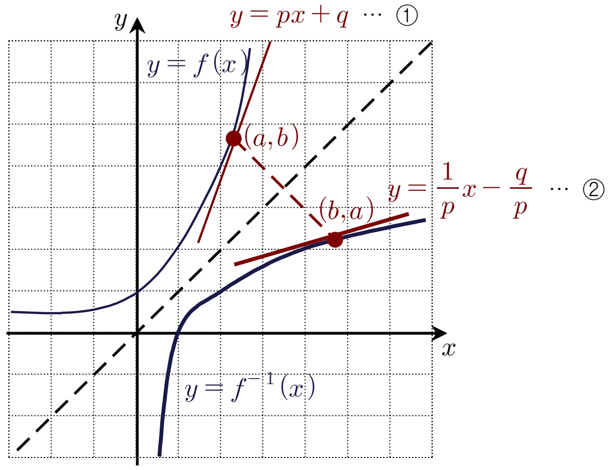
이처럼 마치 분수처럼 계산되는 특징을 이용하여 미분하는 것을 <역함수 미분법>이라고 한다.
(- 역함수만 미분 하는 게 아니라고....-_-)

음함수 미분법) $x=f(y)$라고 표현된 식에서 (음함수 미분법을 이용하여) 양변을 x에 대해 미분하여

$1=f'(y)\dfrac{dy}{dx}\Leftrightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{f'(y)}$라는 같은 관계식을 얻을 수 있다.

설명 2 : 〈역함수의 미분계수〉는 기하학적으로 기억

$y=f(x)$위의 점 (a,b)에서 접선의 방정식과
$y=f^{-1}(x)$ 위의 점 (b,a)에서 접선의 방정식은
$y=x$ 대칭관계이다. 즉, 역함수 관계이다.
결국 $y=f(x)$위의 점 (a,b)에서 접선의 방정식을
$y=px+q$라고 할 경우 이 함수의 역함수를 실제로
구해보면 $y=\frac{1}{p}x-\frac{q}{p}$이 나오고 이 일차함수가
$y=f^{-1}(x)$위의 점 (b,a)에서 접선의 방정식이다.



즉, ①의 식에서 접선의 기울기 $f'(a)=p$이다.
②의 식에서 접선의 기울기 $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{p}$이다.

이 역수관계를 이용하면 문제에서 $(f^{-1})'(b)$를 구하라고 하는 경우에 $\frac{1}{f'(a)}$로 대신할 수 있다.

결국 $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$이다. 공식을 단지 암기하지 말고 그림을 떠올려 명확히 이해하라.

설명 3 : 〈역함수의 도함수〉 구하기

참고) y라는 문자가 내포하는 함수를 명확하게 이해해야 역함수의 도함수가 헷갈리지 않는다.

① 의미상 역함수 : $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$: 같은 식, 같은 그래프

이 때의 y는 $f(x)$를 의미하는 y이다.

② 구한 역함수 : $y=f(x) \xrightarrow{y=x\text{ 대칭}} x=f(y)$: 다른 식, 다른 그래프

이 때의 y는 역함수 $f^{-1}(x)$를 의미하는 y이다.

〈결론〉 $y=x$대칭을 시킨 후 〈역함수의 미분법〉을 이용하든 〈음함수 미분법〉을 이용하든 $\frac{dy}{dx}$를 구해주면 이것이 역함수의 도함수이다.

예시 6 [6]다음 식 $x=\sqrt{y^3+1}$의 도함수를 역함수 미분법을 이용하여 구하여라.

예시 7 [7]함수 $y=x\sqrt{1+x}$ $(x>0)$의 역함수의 도함수를 구하여라.

예시 8 [8]함수 $y=g(x)$가 함수 $y=f(x)$의 역함수이고 $f(1)=3$, $f'(1)=2$일 때, $g'(3)$의 값은?

5. 매개변수로 표현된 함수의 미분법

$y=f(x)$로 주어지지 않고, 매개변수 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타내어진 미분 가능한 함수에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} \quad \text{또는} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

- 수식적으로만 이해하고 공식을 쓴다.
- 매개변수 함수를 이용하는 단원은 벡터와 평면운동이다. 매개변수 함수를 기하학적으로 정확히 이해하려면 벡터에 대한 기본적인 상식이 있어야 한다.

예시 9 9)매개변수로 나타내어진 다음 함수 $x=t^2+t, y=t^3+3t$에서 $\frac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 나타내어라.

예시 10 10)$x=3t-1$, $y=3-t^2$을 만족하는 함수 $y=f(x)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하여라.

#2. 미분법 공식

1. 삼각함수 미분법

1) 삼각함수 미분법의 공식

① $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$　② $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$　③ $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

④ $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$　⑤ $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$　⑥ $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

삼각함수는 변형 공식을 통해 식을 간단히 할 수 있으면 미분도 간단히 할 수 있습니다.

2) 삼각함수 미분법의 공식증명

① $\dfrac{d}{dx}\sin x = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ <미분계수의 정의> $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$ <신마신은 투코신>

$= \lim\limits_{h\to 0}\left\{2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\times\boxed{\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{h}}\right\}$ $\dfrac{1}{2}$ <함수의 극한> $= \cos x$

② $\dfrac{d}{dx}\cos x$ <각 변형 규칙> $= \dfrac{d}{dx}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ <$\sin x$미분법, 합성함수 미분법>

$= -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ <각 변형 규칙> $= -\sin x$

③ $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$ <몫의 미분법>

$= \dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

④ $\dfrac{d}{dx}\sec x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = -\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}$ <몫의 미분법> $= \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}\times\dfrac{\sin x}{\cos x} = \sec x\tan x$

⑤ $\dfrac{d}{dx}\mathrm{cosec}\,x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ <몫의 미분법> $= -\dfrac{1}{\sin x}\times\dfrac{\cos x}{\sin x} = -\mathrm{cosec}\,x\cot x$

⑥ $\dfrac{d}{dx}\cot x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \dfrac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$ <몫의 미분법>

$= \dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x$

예시 11　11)다음 함수 $y=\sec x\tan x$의 도함수를 구하여라.

예시 12 12)다음 함수 $y=\sec^3(2x+5)$의 도함수를 구하여라.

예시 13 13)함수 $f(x)=\sqrt{1+\sin^2 2x}$ 에 대하여 $f'(\frac{\pi}{6})$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{3}}{7}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{7}$ ③ $\frac{2\sqrt{5}}{7}$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{21}}{7}$

예시 14 14)다음 함수 $y=\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ 의 도함수를 구하여라.

예시 15 15)다음 함수 $x\cos y+y\sin x=1$에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

예시 16 16) $y=\tan x\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, $g'(\sqrt{3})$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

예시 17 17) 함수 $y=2\sin x+\cos 2x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(x)$를 y에 대한 식으로 나타내어라.

예시 18 18) 다음 매개변수로 표현된 함수 $x=2\cos^3\theta, y=2\sin^3\theta$ (θ는 매개변수)에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

2. 지수 · 로그함수 미분법

1) 지수함수의 미분법	2) 로그함수의 미분법	
① $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$	① $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}\ (x>0)$	② $\dfrac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \dfrac{1}{x}$
② $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x\ln a$	③ $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{\ln a}\times\dfrac{1}{x}\ (x>0)$	④ $\dfrac{d}{dx}\ln\lvert f(x)\rvert = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$\ln|x|$와 같이 절댓값 함수가 합성되어 있는 로그함수를 미분할 때는 절댓값을 미분한다는 생각을 버리고 <$\ln x$를 미분하되 제한범위를 생각하지 않아도 된다.>라고 기억하는 것이 좋다.

3) 지수·로그 함수의 미분법 공식의 증명

① $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$의 증명 : $\dfrac{d}{dx}e^x = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}$ <미분계수의 정의> $= \lim\limits_{h\to0}e^x\underbrace{\boxed{\dfrac{e^h-1}{h}}}_{1\ \text{<함수의 극한>}} = e^x$

② $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x\ln a$의 증명 : $\dfrac{d}{dx}a^x = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim\limits_{h\to0}a^x\underbrace{\boxed{\dfrac{a^h-1}{h}}}_{\ln a\ \text{<함수의 극한>}} = a^x\ln a$

③ $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$의 증명 : 원래 함수 $y=\ln x$의 정의역이 $(x>0)$이므로 도함수 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$ 역시 $(x>0)$이어야 한다. 단지 원래 함수 $y=\ln x$에서는 식에서 $(x>0)$라는 인상을 받으므로 정의역을 생략하지만 도함수 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$에서는 x에 음수를 넣을 수 있다는 느낌이 들기 때문에 $(x>0)$을 표시한다.

$$\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}\times x} = \lim_{h\to0}\underbrace{\boxed{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}}_{1\ \text{<함수의 극한>}}\times\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\ (x>0)$$

④ $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{\ln a}\times\dfrac{1}{x}\ (x>0)$의 증명 :

$\log_a x$에 밑 변환 공식을 이용하면 $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a}\ln x$라고 표현할 수 있다. 그런 후 ③에서 증명한

미분법 공식을 이용하면 $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\ln a}\times\ln x\right) = \dfrac{1}{\ln a}\times\dfrac{1}{x}\ (x>0)$

⑤ $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$의 증명 : 따로 공식이 있는 것은 아니다. 범위를 나누어 확인하는 것.

$f(x)=\ln|x|$라고 한다면 $f(x)$는 두 개의 범위로 나누어 질수 있다. 즉, $f(x)=\begin{cases}\ln x & (x>0)\\ \ln(-x) & (x<0)\end{cases}$이다.

$x=0$에서는 함숫값 자체가 없으므로 이 점에서만 미분이 불가능하고 나머지 점에서는 미분가능하다.

그래서 공식을 이용하면 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>0)\\ \dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x} & (x<0)\end{cases}$ 이므로 결국 $x\neq0$인 모든 실수에서 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이다.

예시 19 19)다음 함수 $y=3^{\cos x}$의 도함수를 구하여라.

예시 20 20)다음 함수 $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$의 도함수를 구하여라.

예시 21 21)함수 $f(x)=e^{2x}\tan\pi x$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① -2π ② $-\pi$ ③ π ④ 2π ⑤ 3π

예시 22 22)$f(x)=\dfrac{e^{x}\cos x}{1+\sin x}$일 때, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하여라.

예시 23 23)음함수 $x^{2}+y^{2}=e^{x+y}$에 대하여 다음 중 $\dfrac{dy}{dx}$를 나타내는 것은?

① $2e^{x+y}$ ② $\dfrac{e^{x+y}-2x}{e^{x+y}+2y}$ ③ $\dfrac{e^{x+y}+2x}{e^{x+y}-2y}$ ④ $\dfrac{e^{x+y}-2x}{e^{x+y}-2y}$ ⑤ $-\dfrac{e^{x+y}-2x}{e^{x+y}-2y}$

예시 24 24)$x=e^{t+2}$, $y=e^{3t+1}$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$는?

① e^{t+1} ② e^{2t+1} ③ e^{2t-1} ④ $3e^{2t+1}$ ⑤ $3e^{2t-1}$

예시 25 25)다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y = x^2 \log_2 x$ (2) $y = x \ln|x|$ (3) $y = e^x \ln x$

예시 26 26)다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (2) $y = (\ln x)^2$ (3) $y = \ln|3x-1|$

예시 27 27)함수 $f(x) = \log_2(\cos^2 x)$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?

① $-\ln 2$ ② $-\frac{2}{\ln 2}$ ③ $\frac{2}{\ln 2}$ ④ $\ln 2$ ⑤ $2\ln 2$

예시 28 28)다음 함수$y = \ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ 의 도함수를 구하여라.

예시 29 29) $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sqrt{x^2+3}$ 일 때, $\dfrac{d}{dx}(f^{-1}\circ g)(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

예시 30 30) $\lim_{t\to 0}\dfrac{f(\ln(1+2t))-f(0)}{t}=4$일 때, $f'(0)$의 값을 구하여라.

예시 31 31) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{3^x+4^x}{2}$ 의 값은?

① $\ln\sqrt{3}$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 2\sqrt{3}$ ④ $2\ln 2$ ⑤ $2\ln 3$

예시 32 32) $\lim_{x\to a}\dfrac{b\ln x}{x^2-a^2}=1$을 만족시키는 상수 a, b의 값을 구하여라.

3. 로그미분법

1) 필수적 로그 미분법 : 변태함수

x^3은 밑에는 변수, 지수에는 상수가 있다. - 그러면 x^α의 미분법을 이용한다.

3^x은 밑에는 상수, 지수에는 변수가 있다. - 그러면 지수함수의 미분법을 이용한다.

x^x은 밑에도 변수, 지수에도 변수가 있다. - 이런 경우 위의 어떤 공식을 사용해도 틀린다.
이런 경우 사용하는 미분법이 〈로그 미분법〉이다.

2) 선택적 로그 미분법

〈복잡한 몫의 꼴〉이나 〈곱의 꼴〉을 미분해야 하는 경우에 적절하게 로그법칙을 활용하면 계산이 용이해진다.
단, 이것은 방법적으로만 기억해야 한다. 자세히 들어가면 과정에서 여러 가지 비논리가 생긴다.

① 양변에 절댓값을 취한다.

② 로그함수 미분법과 음함수 미분법을 적용한다.

설명) 선택적 로그 미분법

로그 미분법은 계산을 위한 하나의 테크닉으로 생각하면 좋다. 양변을 그냥 미분한 것과 결과적으로 같기 때문에 식 변형 과정에서 생기는 제한범위까지 생각할 필요는 없다.

예를 들어 $y=(x+1)^2(x+2)$의 양변의 $\ln$을 취하면 $\ln y=\ln(x+1)^2(x+2)$이다.
여기에서 준 식 $y=(x+1)^2(x+2)$과 변형 식 $\ln y=\ln(x+1)^2(x+2)$은 같은 식이 아니다.
(정의역의 차이가 생긴다.)

그래서 보통은 양변에 먼저 절댓값을 취하고 로그를 취하라고 한다. 하지만 $y=(x+1)^2(x+2)$을 절댓값을 취한 식 $|y|=|(x+1)^2(x+2)|$ 역시 〈준 식〉과 〈같은 식〉이 아니다.
($y=\pm(x+1)^2(x+2)$과 같은 식이다.)

그러나 이런 식 변형이 가능하다. 이유는 결과적으로 나오는 도함수가 그냥 미분했을 때와 같은 식이 나오기 때문이다.

결국 $y=(x+1)^2(x+2)$을 $|y|=|(x+1)^2(x+2)|$로 바꾸는 비논리를 거친 후
양변에 $\ln$을 취하면

$$\ln|y| = \ln|(x+1)^2(x+2)| = \ln|(x+1)^2|\times|(x+2)|$$
$$= \ln|(x+1)|^2\times|(x+2)| = 2\ln|(x+1)|+\ln|(x+2)|$$ 이고,

양변을 미분하면 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2} \Leftrightarrow y'=y\times\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}\right)$이다.

여기에서 y에 $(x+1)^2(x+2)$을 대입하여 약분하고 정리하면
〈곱의 미분법을 적용한 것과 같은 결과〉가 나온다.

계산의 편의성을 위하여 사용하는 계산 테크닉일 뿐 중간 식 변형 과정에서 나오는 비논리는 신경 쓸 필요가 없다.

추가로 위의 $y'=y\times\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}\right)$의 식을 정리할 필요는 없다. 만약 $x=1$에서 미분계수를 물어본다면 $x=1$일 때, $y=12$이므로 이것을 그대로 대입하면 된다. 실제로 만약 위의 식을 정리해야 된다면 〈로그 미분법〉이 더 복잡할 수 있다.

예시 33 33)다음 함수에서 $\dfrac{dy}{dx}$을 구하여라.

(1) $y = x^x \ (x > 0)$ (2) $y = x^{\sin x} \ (x > 0)$ (3) $y = (\ln x)^x \ (x > 1)$

예시 34 34)함수 $y = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ 에 대하여 $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=0}$을 구하면?

4. 이계도함수

1) 이계도함수

: 어떤 함수 $y=f(x)$를 x에 대해서 두 번 미분할 경우 $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y\right)$이다.

이것을 수학적인 기호로 $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 y$ 또는 $\frac{d^2}{dx^2}y$ 또는 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 또는 y''라고 쓴다

2) 매개변수로 표현된 함수의 이계도함수

매개변수로 함수가 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 로 주어져 있을 때, 보통 구하라고 하는 이계도함수는 $\frac{d^2y}{dx^2}$이다.

이것을 $\frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}$이라고 생각하는 학생이 많다. 이것을 계산해보면 $\frac{d^2y}{dx^2}$이 아니라 $\frac{d^2y}{d^2x}$이 된다.

그래서 우리는 매개변수로 표현된 함수의 도함수에서 이계도함수를 구할 때는 약간의 테크닉을 이용해야한다.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{\boxed{dt}}\left(\frac{dy}{dx}\right)\times\frac{\boxed{dt}}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\times\boxed{\frac{1}{\frac{dx}{dt}}}$과 같이 구하게 된다.

결국 $\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)\times\frac{1}{f'(t)}$을 통해서 매개변수로 표현된 함수의 이계도함수를 구할 수 있다.

이것이 사실 고등과정에서 이 식은 많이 쓰는 식이 아닌 이유는 $y=f(x)$함수 입장에서 이계도함수는 아니지만 $\frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}$이 기하학적으로는 오히려 <가속도의 방향>이라는 중요한 의미를 가지고 있기 때문이다.

그래서 재미있게도 우리가 이계도함수라고 잘못 생각한 식이 사실은 훨씬 중요한 식이다.

예시 35 35) $f(x)=\cos^3 2x$일 때, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$의 값을 구하여라.

예시 36 36) 다음 함수 $y\cos x+x=1$에서 $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=0}$ 을 구하여라.

.

1) (1) $\frac{d}{dx}y = \quad = -\frac{3}{x^4}$ (2) $\frac{d}{dx}y = \frac{2\times(-2)}{x^3} = \frac{-4}{x^3}$

(3) 1 단계 : $y=\frac{x^3+4x^2-x+1}{2x^5} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)$

2 단계 : $\frac{d}{dx}y = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{-12}{x^4}-\frac{-4}{x^5}+\frac{-5}{x^6}\right)$

정답은 (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x^4}$ (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^3}$ (3) $\frac{d}{dx}y = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{-12}{x^4}-\frac{-4}{x^5}+\frac{-5}{x^6}\right)$

2) (1) $\frac{d}{dx}y = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

(2) 1 단계 : $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \Leftrightarrow y = x^{-\frac{3}{4}}$ 2 단계 : $\frac{d}{dx}y = -\frac{3}{4}\times x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$

(3) 1 단계 : $y=\frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}} \Leftrightarrow y = x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}$

2 단계 : $\frac{d}{dx}y = \frac{4}{3}\times x^{\frac{4}{3}-1}+\frac{1}{3}\times x^{\frac{1}{3}-1}+\left(-\frac{2}{3}\right)\times x^{-\frac{2}{3}-1} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}y = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

정답은 (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$ (2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$ (3) $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

3) 분모가 $2x+3$이기 때문에 x^{α}의 형태로의 식 변형이 되지 않는다. 어쩔 수 없이 몫의 미분법을 이용하여 미분한다.

$$y' = \frac{(x^2+3x+1)'(2x+3)-(x^2+3x+1)(2x+3)'}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+3)(2x+3)-2(x^2+3x+1)}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x+7}{(2x+3)^2}$$

정답은 $y' = \frac{2x^2+6x+7}{(2x+3)^2}$

4) 합성함수의 미분법을 물어본 아주 기본적인 문제이다.

$h(x)=(g\circ f)(x)$의 양변을 미분하면 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이다. 조건 $h'(0)=15$을 활용하기 위해서 양변에 $x=0$을 대입하면 $h'(0)=g'(f(0))f'(0) \Leftrightarrow 15=g'(1)f'(0)$ 여기에서 $f'(x)=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$이므로 $f'(0)=\frac{3}{2}$이다.

즉, $15=g'(1)f'(0) \Leftrightarrow 15=g'(1)\times\frac{3}{2} \Leftrightarrow g'(1)=10$ 정답은 $g'(1)=10$

5) 과정에서 곱의 미분법과 합성함수 미분법을 사용한다. 양변을 x에 대해서 미분하면

좌변은 $\frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}x\times y^2 + x\times\frac{d}{dx}y^2$ 〈곱의 미분법〉 $= y^2 + x\times 2y\times\frac{dy}{dx}$ 〈다항함수 미분법, 음함수 미분법〉

우변은 $\frac{d}{dx}1 = 0$ 결국 $y^2+2xy\times\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-y^2}{2xy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-y}{2x}$ $(y\neq 0)$

(처음 식에서 어차피 y는 0일 수 없으므로 $y\neq 0$조건이 있는 것이나 마찬가지이다. 그러므로 약분해도 된다.)

정답은 $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x}$

6) 양변을 y에 대해서 미분하면 $\frac{dx}{dy}=\frac{3y^2}{2\sqrt{y^3+1}}$이고, 역수를 취하면 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{2\sqrt{y^3+1}}{3y^2}$이다. 여기에서

$x = \sqrt{y^3+1}$ 이므로 대입해서 식을 조금 정리하면 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{3y^2}$

이러한 역수를 취하는 계산테크닉을 활용 하는 것이 역함수 미분법. 역함수 미분법은 반드시 역함수를 미분하는 것이 아니라 이처럼 계산 테크닉의 측면을 말하는 것. 정답은 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{3y^2}$

7) 물론 〈음함수 미분법〉을 이용하여 역함수의 도함수를 구할 수도 있다. 하지만 우리는 〈역함수 미분법〉을 이용하여 역함수의 도함수를 구해보도록 한다.

1 단계 : 역함수의 의미를 갖는 y를 만들어 내기 위해서 $y = x$에 대한 대칭을 시킨다. 즉, $x = y\sqrt{1+y}$ $(y > 0)$

2 단계 : 양변을 y에 대해서 미분한다. 곱의 미분법을 진행해도 좋으나 계산의 효율성을 위하여 $y\sqrt{1+y} = \sqrt{y^3+y^2}$ 으로 바꾼다. 양변을 y에 대하여 미분하면 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3y^2+2y}{2\sqrt{y^3+y^2}}$ 이고, 이것의 양변을 역수 취하면

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\sqrt{y^3+y^2}}{3y^2+2y} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y\sqrt{1+y}}{3y^2+2y}$ 이고 $(y > 0)$이므로 약분하면 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\sqrt{1+y}}{3y+2}$ 이다.

정답은 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\sqrt{1+y}}{3y+2}$

8) 그림을 생각해 보면 헷갈리지 않는다. 원래함수 $y = f(x)$는 $(1, 3)$을 지나므로

역함수 $y = g(x)$는 $(3, 1)$을 지난다.

우리가 구하고자 하는 $g'(3)$와 $f'(1)$은 역수관계이므로 $g'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} \Leftrightarrow g'(3) = \dfrac{1}{2}$ 정답은 $g'(3) = \dfrac{1}{2}$

9) $\dfrac{dx}{dt} = 2t+1$, $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2+3$ 이므로 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2+3}{2t+1}$ 이다. 정답은 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2+3}{2t+1}$

10) $f'(2)$는 도함수에 $x = 2$를 대입하라는 뜻이므로 $x = 2$일 때 t의 값을 구해야 한다.

주어진 식 $x = 3t-1$에서 $x = 2$이면 $t = 1$이므로 $f'(2) = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=2} = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{t=1}$ 이다.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)} = \dfrac{-2t}{3}$ 이므로 $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{t=1} = -\dfrac{2}{3}$ 이다. 정답은 $f'(2) = -\dfrac{2}{3}$

11) $y' = (\sec x)'\tan x + \sec x(\tan x)'$ <곱의 미분법> $\Leftrightarrow$ $y' = (\sec x\tan x)\tan x + \sec x(\sec^2 x)$ <삼각함수 미분법 공식>

$\Leftrightarrow$ $y' = \sec x(\tan^2 x + \sec^2 x)$ <식 정리>

정답은 $y' = \sec x(\tan^2 x + \sec^2 x)$

12) $y' = 3\sec^2(2x+5) \times \{\sec(2x+5)\}'$ <합성함수 미분법>

$\Leftrightarrow$ $y' = 3\sec^2(2x+5) \times \{\sec(2x+5)\tan(2x+5)\} \times 2$ <합성함수 미분법, 삼각함수 미분법 공식>

$\Leftrightarrow$ $6\sec^3(2x+5)\tan(2x+5)$ <식 정리> 정답은 $6\sec^3(2x+5)\tan(2x+5)$

13) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 2x}} \times \{1+\sin^2 2x\}'$ <합성함수 미분법, $\sqrt{\ }$ 의 미분법>

$\Leftrightarrow$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 2x}} \times (2\sin 2x) \times (\sin 2x)'$ <합성함수 미분법>

$\Leftrightarrow \ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 2x}}\times(2\sin 2x)\times(\cos 2x)\times 2$ <합성함수 미분법, 삼각함수 미분법 공식>

미분계수를 구하는 문제는 식 정리 할 필요는 없다. $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ 정답은 ⑤

14) $y'=\dfrac{(\cos x)'\times\sqrt{1+\sin x}-\cos x\times\left(\sqrt{1+\sin x}\right)'}{\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^2}$ <몫의 미분법>

$$\Leftrightarrow \ y'=\frac{(-\sin x)\times\sqrt{1+\sin x}-\cos x\times\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sin x}}\times(1+\sin x)'\right)}{\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^2}$$

<삼각함수의 미분법 공식, $\sqrt{\ }$ 의 미분법, 합성함수 미분법>

$$\Leftrightarrow \ y'=\frac{(-\sin x)\times\sqrt{1+\sin x}-\cos x\times\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sin x}}\times(\cos x)\right)}{\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^2}$$ <삼각함수의 미분법 공식>

$$\Leftrightarrow \ y'=\frac{(-\sin x)\times\sqrt{1+\sin x}-\dfrac{\cos^2 x}{2\sqrt{1+\sin x}}}{1+\sin x}\times\frac{2\sqrt{1+\sin x}}{2\sqrt{1+\sin x}}$$

$\Leftrightarrow \ y'=\dfrac{-2\sin x\times(1+\sin x)-\cos^2 x}{2(1+\sin x)\sqrt{1+\sin x}}$ $\Leftrightarrow \ y'=\dfrac{-2\sin x-\sin^2 x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{2(1+\sin x)\sqrt{1+\sin x}}$

$\Leftrightarrow \ y'=-\dfrac{\sin^2 x+2\sin x+1}{2(1+\sin x)\sqrt{1+\sin x}}$ $\Leftrightarrow \ y'=-\dfrac{(1+\sin x)^2}{2(1+\sin x)\sqrt{1+\sin x}}$

$\Leftrightarrow \ y'=-\dfrac{(1+\sin x)}{2\sqrt{1+\sin x}}\times\dfrac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}$ $\Leftrightarrow \ y'=-\dfrac{(1+\sin x)\sqrt{1+\sin x}}{2(1+\sin x)}$ $\Leftrightarrow \ y'=-\dfrac{\sqrt{1+\sin x}}{2}$ <식 정리>

정답은 $y'=-\dfrac{\sqrt{1+\sin x}}{2}$

15) y'은 $\dfrac{dy}{dx}$를 줄여서 쓴 것이라고 이해하자.

$(x)'\cos y+x(\cos y)'+(y)'\sin x+y(\sin x)'=0$ <곱의 미분법>

$\Leftrightarrow \ (1)\cos y+x(-\sin y\times y')+(y')\sin x+y(\cos x)=0$ <삼각함수 미분법 공식, 음함수 미분법>

$\Leftrightarrow \ y'=\dfrac{y\cos x+\cos y}{x\sin y-\sin x}$ <식 정리> $\Leftrightarrow \ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\cos x+\cos y}{x\sin y-\sin x}$ <표현 바꾸기> 정답은 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\cos x+\cos y}{x\sin y-\sin x}$

16) 역함수 $y=g(x)$ 위의 점 $(\sqrt{3},\ \bigstar)$은 원래함수 $y=\tan x$ 위의 점 $(\bigstar,\ \sqrt{3})$을 $y=x$ 대칭이동 시킨 것이다.

$g'(\sqrt{3})$과 $(\tan x)'_{x=\bigstar}$은 정확하게 역수관계에 있다. 우리는 일단 $\bigstar$을 구해야 한다.

1 단계 : $\sqrt{3}=\tan\bigstar \ \Leftrightarrow \ \bigstar=\dfrac{\pi}{3}$

2 단계 : $g'(\sqrt{3})=\dfrac{1}{(\tan x)'_{x=\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{1}{(\sec^2 x)_{x=\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{1}{\left(\sec^2\dfrac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{4}$ 정답은 ③

17) 주어진 함수 $y=2\sin x+\cos 2x$의 역함수의 도함수를 구하는 것이다.

1 단계 : 주어진 함수를 $y=x$ 대칭시키면 $x=2\sin y+\cos 2y$이다. 여기에서 y는 문제에서 $g(x)$를 나타낸다.

또한 이 식을 미분했을 때 나오는 $\dfrac{dx}{dy}$ 역시 $g'(x)$를 나타낸다.

2 단계 : <역함수 미분법>을 이용하려면 양변을 y에 대해서 미분하고 역수를 취한다. 즉,

$$\frac{d}{dy}x = 2\cos y - 2\sin 2y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{2\cos y - 2\sin 2y}$$

정답은 $g'(x) = \frac{1}{2(\cos y - \sin 2y)}$

18) 보통은 주어진 문자인 θ에 대해서 표현하는 것이 일반적이다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)}$$ <매개변수로 표현된 함수의 미분법> $$= \frac{\left(\frac{d}{d\theta}2\sin^3\theta\right)}{\left(\frac{d}{d\theta}2\cos^3\theta\right)}$$

$$= \frac{6\sin^2\theta \times \cos\theta}{6\cos^2\theta \times (-\sin\theta)}$$ <합성함수 미분법, 삼각함수 미분법 공식> $= -\tan\theta$ <식 정리>

정답은 $\frac{dy}{dx} = -\tan\theta$

19) $\frac{d}{dx}y = \left(3^{\cos x}\right)' = 3^{\cos x} \times \ln 3 \times (\cos x)'$ <합성함수 미분법, 지수함수 미분법> $= 3^{\cos x} \times \ln 3 \times (-\sin x)$ <삼각함수 미분법>

$= -3^{\cos x}\sin x \ln 3$ <식 정리> 정답은 $-3^{\cos x}\sin x \ln 3$

20) $\frac{d}{dx}y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2}$ <몫의 미분법>

$= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$ <지수함수 미분법, 합성함수 미분법> $= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ <식 정리>

정답은 $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

21) $f'(x) = \left(e^{2x}\tan \pi x\right)' = \left(e^{2x}\right)' \times \tan \pi x + e^{2x} \times (\tan \pi x)'$ <곱의 미분법>

$= \left(2e^{2x}\right) \times \tan \pi x + e^{2x} \times \left(\sec^2 \pi x \times \pi\right)$ <합성함수 미분법, 지수함수 미분법, 삼각함수 미분법>

식을 정리할 필요가 없다. $x = 0$을 대입하면 $f'(0) = \pi$ 정답은 ③

22) $f'(x) = \frac{(e^x\cos x)'(1+\sin x) - (e^x\cos x)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$ <몫의 미분법>

$= \frac{(e^x\cos x + e^x(-\sin x))(1+\sin x) - (e^x\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$ <곱의 미분법, 지수함수 미분법, 삼각함수 미분법>

식을 정리할 필요가 없다. $x = \frac{\pi}{2}$을 대입하면 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ 정답은 $-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$

23) 음함수 미분법은 합성함수를 미분하듯이 하면 된다. 주어진 식 $x^2 + y^2 = e^{x+y} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - e^{x+y} = 0$의 양변을 x에 대해서 미분하면 된다. (우변을 모두 이항했으므로 좌변만 미분하자.)

$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - e^{x+y}) = \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}e^{x+y} = 2x + 2y \times \frac{dy}{dx} - e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$ <지수함수 미분법, 음함수 미분법>

결국 양변을 x에 대해 미분하면 $2x + 2y \times \frac{dy}{dx} - e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 0$이고, 이 식을 정리하면

$$2x + 2y \times \frac{dy}{dx} - e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - e^{x+y} + 2y\frac{dy}{dx} - e^{x+y}\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2x - e^{x+y} + \left(2y - e^{x+y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$\Leftrightarrow \left(2y - e^{x+y}\right)\frac{dy}{dx} = e^{x+y} - 2x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{e^{x+y} - 2x}{e^{x+y} - 2y}$ <식 정리> 정답은 ⑤

24) $\frac{d}{dt}y \;=\; \frac{d}{dt}e^{3t+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dt} \;=\; 3e^{3t+1}$ <지수함수 미분법, 합성함수 미분법>

$\frac{d}{dt}x \;=\; \frac{d}{dt}e^{t+2} \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{dt} \;=\; e^{t+2}$ <지수함수 미분법>

결국 $\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} \;=\; \frac{3e^{3t+1}}{e^{t+2}} \;=\; 3e^{2t-1}$ <매개변수로 표현된 함수 미분법, 식 정리> 정답은 ⑤

25) (1) $\frac{d}{dx}y \;=\; \left(x^2\log_2 x\right)' \;=\; (x^2)'\log_2 x + x^2(\log_2 x)'$ <곱의 미분법> $=\; (2x)\log_2 x + x^2\left(\frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln 2}\right)$ <로그함수 미분법>

$=\; 2x\log_2 x + \frac{x}{\ln 2}$ <주어진 식에서 $x>0$라는 확신이 있기 때문에 약분해도 된다.>

(2) $\frac{d}{dx}y \;=\; (x\ln|x|)' \;=\; (x)'\ln|x| + x(\ln|x|)'$ <곱의 미분법> $=\; \ln|x| + x\left(\frac{1}{x}\right)$ <로그함수 미분법>

$=\; \ln|x|+1$ <주어진 식에서 $x\neq 0$라는 확신이 있기 때문에 약분해도 된다.>

(3) $\frac{d}{dx}y \;=\; (e^x\ln x)' \;=\; (e^x)'\ln x + e^x(\ln x)'$ <곱의 미분법> $=\; (e^x)\ln x + e^x\left(\frac{1}{x}\right)$ <지수함수 미분법, 로그함수 미분법>

$=\; e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$ <식 정리>

정답은 (1) $\frac{dy}{dx} = 2x\log_2 x + \frac{x}{\ln 2}$ (2) $\frac{dy}{dx} = \ln|x|+1$ (3) $\frac{dy}{dx} = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$

26) (1) $\frac{d}{dx}y \;=\; \left\{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}' \;=\; \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'$ <합성함수 미분법>

$=\; \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\times(x^2+1)'\right)$ <$\sqrt{\;}$의 미분법, 합성함수의 미분법>

$=\; \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \;=\; \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ <유리화>

$=\; \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\times\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ <통분> $=\; \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ <합 · 차 공식> $=\; \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$ <유리화>

(2) $\frac{d}{dx}y \;=\; \{(\ln x)^2\}' \;=\; 2(\ln x)\times(\ln x)'$ <합성함수 미분법> $=\; 2(\ln x)\times\frac{1}{x}$ <로그함수 미분법> $=\; \frac{2\ln x}{x}$

(3) $\frac{d}{dx}y \;=\; (\ln|3x-1|)' \;=\; \frac{1}{3x-1}\times(3x-1)'$ <로그함수 미분법, 합성함수 미분법> $=\; \frac{3}{3x-1}$

정답은 (1) $\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$ (2) $\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{2\ln x}{x}$ (3) $\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{3}{3x-1}$

27) $f'(x) \;=\; \left\{\log_2(\cos^2 x)\right\}' \;=\; \frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\ln 2}\times(\cos^2 x)'$ <로고함수 미분법, 합성함수 미분법>

$=\; \frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\ln 2}\times 2\cos x\times(\cos x)'$ <삼각함수 미분법, 합성함수 미분법>

$=\; \frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\ln 2}\times 2\cos x\times(-\sin x)$ <삼각함수 미분법> $=\; \frac{-2\sin x}{(\ln 2)\cos x}$ 결국 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \;=\; -\frac{2}{\ln 2}$ 정답은 ②

28) $y=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$에 바로 공식을 적용하면 합성함수 미분이므로 결국 $\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$을 미분해야 한다. 이 식을 미분하는 과정이 상당히 복잡하다. 그러나 $y=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)\right)$까지 식을

변형한 뒤 미분하면 쉽다. 결국 $y=\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x^2\right)-\ln\left(1-x^2\right)\right)$의 x에 대해 미분한다.

$\frac{d}{dx}y = \left\{\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x^2\right)-\ln\left(1-x^2\right)\right)\right\}' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}-\frac{-2x}{1-x^2}\right)$ <로그함수 미분법, 합성함수 미분법> $= \frac{2x}{(1+x^2)(1-x^2)}$

여기에서 정의역은 원래 함수를 따른다. 원래함수 $y=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$에서 $\sqrt{\ }$안은 0보다 크거나 같아야 한다. 그런데 $1+x^2>0$이므로 $1-x^2>0$이어야 한다. (분모는 0일 수 없어서 등호는 빠졌다.) 결국 정의역은 $(-1<x<1)$이다.

정답은 $\frac{d}{dx}y = \frac{2x}{(1+x^2)(1-x^2)}\ (-1<x<1)$

29) 역함수 미분법은 항상 그림을 생각하면 헷갈리지 않는다.

$\frac{d}{dx}f^{-1}(g(x)) = (f^{-1})'(g(x))\times g'(x)$ 여기에 $x=1$을 대입하면 $(f^{-1})'(g(1))\times g'(1) = (f^{-1})'(2)\times g'(1)$

① $g'(1)$ 구하기 : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\times(x^2+3)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$이므로 $g'(1) = \frac{1}{2}$

② $(f^{-1})'(2)$ 구하기 : 1 단계 - $y=\ln x$에서 $y=2$일 때 x값 구하기. $2=\ln x$에서 $x=e^2$이다.

2 단계 - $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(e^2)}$이용. $f'(e^2)=\frac{1}{e^2}$이므로 $(f^{-1})'(2) = e^2$

결국 우리가 구하는 $(f^{-1})'(2)\times g'(1) = \frac{1}{2}e^2$이다. 정답은 $\frac{1}{2}e^2$

30) 극한이 있다면 ① 꼴을 먼저 확인하고,

② 미분가능하다는 확신이 있다면 미분계수의 정의 (모양 맞추기)를 하거나 로피탈을 쓴다.

$\lim_{t\to0}\frac{f(\ln(1+2t))-f(0)}{t}\times\frac{\ln(1+2t)}{\ln(1+2t)} = \lim_{t\to0}\frac{f(\ln(1+2t))-f(0)}{t}\times\frac{\ln(1+2t)}{\ln(1+2t)}$ <모양 맞추기>

$= \lim_{t\to0}\frac{f(\ln(1+2t))-f(0)}{\ln(1+2t)-0}\times\frac{\ln(1+2t)}{t}$ <미분계수의 정의, 극한>

$= f'(0)\times2 = 4$ 이므로 $f'(0) = 2$이다. 정답은 2

31) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{3^x+4^x}{2} = \lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{3^x+4^x}{2}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)}\times\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)'}{1}$ <로피탈의 정리>

$= \lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\frac{3^x+4^x}{2}\right)}\times\left(\frac{3^x\times\ln3+4^x\times\ln4}{2}\right)$ <지수함수의 미분> $= \ln2\sqrt{3}$ 정답은 ③

32) 1 단계 : 극한은 항상 꼴부터 확인해야 한다.

$\lim_{x\to a}\frac{b\ln x}{x^2-a^2}$에서 분모는 0으로 가까이 가기 때문에 분자 역시0으로 가지 않으면 극한값이 존재할 수가 없다.

결국 $\lim_{x\to a}b\ln x = 0 \Leftrightarrow b\ln a = 0$이다.

2 단계 : 미분계수의 정의 (모양 맞추기)를 하거나 로피탈을 쓴다. 여기에서는 로피탈을 쓴다.

$\lim_{x\to a}\frac{b\ln x}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{b}{x}\right)}{2x}$ <로피탈의 정리, 로그함수 미분> $= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{2a} = \frac{b}{2a^2} = 1 \Leftrightarrow b=2a^2$

$i)$ $b\ln a = 0$과 $ii)$ $b = 2a^2$의 두 식을 연립하면 (ii)의 식을 $i)$에 대입)

$2a^2 \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ or 1 그런데 $\ln$의 진수자리에 0이 들어갈 수는 없으므로 $a = 1$이다.

$a = 1$을 $ii)$에 대입하여 b 역시 구하면 $b = 2$이다. 정답은 $a = 1, b = 2$

33) 지수와 밑에 모두 변수가 있는 형태로 표현된 함수는 항상 제한범위를 주기 때문에 걱정하지 말고 양변에 $\ln$을 취해도 된다.

(1) $y = x^x \ (x > 0)$

$y = x^x \Leftrightarrow \ln y = \ln x^x \Leftrightarrow \ln y = x\ln x$ 이제 양변을 x에 대해서 미분하면

$\frac{d}{dx}(\ln y) = (x\ln x)' \Leftrightarrow \frac{1}{y} \times y' = (x)'\ln x + x(\ln x)'$ <음함수 미분법, 곱의 미분법>

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \times y' = \ln x + 1$ <로그함수 미분법> $\Leftrightarrow y' = y(\ln x + 1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$

(2) $y = x^{\sin x} \ (x > 0)$

$y = x^{\sin x} \Leftrightarrow \ln y = \ln x^{\sin x} \Leftrightarrow \ln y = \sin x \ln x$ 이제 양변을 x에 대해서 미분하면

$\frac{d}{dx}(\ln y) = (\sin x \ln x)' \Leftrightarrow \frac{1}{y} \times y' = (\sin x)'\ln x + \sin x(\ln x)'$ <음함수 미분법, 곱의 미분법>

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \times y' = (\cos x)\ln x + (\sin x)\frac{1}{x}$ <삼각함수 미분법, 로그함수 미분법>

$\Leftrightarrow y' = y \times \left\{(\cos x)\ln x + (\sin x)\frac{1}{x}\right\} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x)$

(3) $y = (\ln x)^x \ (x > 1)$

$y = (\ln x)^x \Leftrightarrow \ln y = \ln(\ln x)^x \Leftrightarrow \ln y = x\ln(\ln x)$ 이제 양변을 x에 대해서 미분하면

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \{x\ln(\ln x)\}' \Leftrightarrow \frac{1}{y} \times y' = (x)'\ln(\ln x) + x(\ln(\ln x))'$ <음함수 미분법, 곱의 미분법>

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \times y' = \ln(\ln x) + x\left(\frac{1}{\ln x} \times (\ln x)'\right)$ <로그함수 미분법, 합성함수 미분법>

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \times y' = \ln(\ln x) + x\left(\frac{1}{x\ln x}\right) \Leftrightarrow y' = y \times \left\{\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right\}$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (\ln x)^x \times \left\{\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right\} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (\ln x)^x \ln(\ln x) + (\ln x)^{x-1}$ <식 정리>

정답은 (1) $\frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$ (2) $\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x)$ (3) $\frac{dy}{dx} = (\ln x)^x \ln(\ln x) + (\ln x)^{x-1}$

34) 이런 경우 식을 <로그미분법을 이용하여 계산 후 식을 정리>하느니 그냥 미분한다.

즉, 함수 $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$ 은 $(0, 1)$을 지나므로 결국 $(0, 1)$에서 미분계수를 구한다.

$y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$ 은 어차피 y가 양의 값을 가질 것이 확실하기 때문에 양변에 절댓값을 취할 필요가 없다.

양변에 $\ln$을 다시 취하면 $\ln y = \ln\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$이다. 양변을 x에 대해 미분하면

$\frac{d}{dx}\ln y = \left\{\frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right\}' \Leftrightarrow \frac{1}{y} \times y' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \times \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)'$

<음함수, 합성함수 미분법, 로그함수 미분법>

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \times y' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$ <로그함수 미분법, 합성함수 미분법>

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)\right)$ <로그함수 미분법, 합성함수 미분법>

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$는 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=0\\y=1}}$이므로 이것을 대입하면 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = \frac{1}{2}$이다. 정답은 $\frac{1}{2}$

35) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ 은 결국 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$이므로 $f(x) = \cos^3 2x$를 두 번 미분한 후 $\frac{\pi}{2}$를 대입한다.

$f'(x) = (\cos^3 2x)' = 3\cos^2 2x \times (\cos 2x)'$ <곱의 미분법> $= 3\cos^2 2x \times (-2 \times \sin 2x)$ <삼각함수 미분법>

$= -6(\cos^2 2x)(\sin 2x)$ <식 정리>

$f''(x) = \{-6(\cos^2 2x)(\sin 2x)\}' = -6\{(\cos^2 2x)'(\sin 2x) + (\cos^2 2x)(\sin 2x)'\}$

$= -6\{(2\cos 2x \times (\cos 2x)')(\sin 2x) + (\cos^2 2x)(2\cos 2x)\}$

$= -6\{(2\cos 2x \times (-2\sin 2x))(\sin 2x) + (\cos^2 2x)(2\cos 2x)\}$

식을 정리할 필요는 없다. $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12$ 정답은 12

36) $y\cos x + x = 1 \Leftrightarrow y\cos x + x - 1 = 0$을 그냥 두 번 미분한다.

먼저 한 번 미분하면 (우변은 어차피 미분하면 0 이므로 좌변만)

$(y\cos x + x - 1)' = (y\cos x)' + 1 = (y)'\cos x + y(\cos x)' + 1$ <곱의 미분법> $= y'\cos x + y(-\sin x) + 1$ <삼각함수 미분법>

즉, $y'\cos x + y(-\sin x) + 1 = 0 \Leftrightarrow y'\cos x - y\sin x + 1 = 0$ - ①

이 식을 한 번 더 미분하면 (우변은 어차피 미분하면 0 이므로 좌변만)

$\{y'\cos x - y\sin x + 1\}' = (y')'\cos x + y'(\cos x)' - \{(y)'\sin x + y(\sin x)'\}$ <곱의 미분법>

$= y''\cos x + y'(-\sin x) - \{y'\sin x + y(\cos x)\}$ <삼각함수 미분법>

결국 $y''\cos x - 2y'\sin x - y\cos x = 0$이 된다. 우리가 구하는 $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=0}$은 $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{\substack{x=0\\y=1}}$ (또는 $(y'')_{\substack{x=0\\y=1}}$) 이다.

즉, $y''\cos x - 2y'\sin x - y\cos x = 0$에서 $x = 0, y = 1$을 대입하면 $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{\substack{x=0\\y=1}} = -1$이다. 정답은 1

참고로 위에서 ① $y'\cos x - y\sin x + 1 = 0$에서 $x = 0, y = 1$을 대입하면 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=0\\y=1}} = -1$이다.

어차피 미분해서 $x = 0, y = 1$을 대입하면 y'과 곱해진 함수들이 0이 되기 때문에 안 구해도 상관없다.

#1. 미분의 방법

NOTE. 선행학습

1) 축약된 표현

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$: 구간 $\boxed{\quad}$에서의 $\boxed{\quad}$ ➡ 즉, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\quad}$	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\boxed{\quad}$ ➡ 즉, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\quad}$
$\frac{dy}{dx}$: $\boxed{\quad}$ ➡ 즉, $\frac{dy}{dx} = \boxed{\quad}$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$: $\boxed{\quad}$ ➡ 죽, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \boxed{\quad}$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$을 $\boxed{\quad}$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$을 $\boxed{\quad}$, $\frac{dy}{dx}$을 $\boxed{\quad}$, $\frac{d}{dx}$을 $\boxed{\quad}$ (프라임과 거의 같은 의미), $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$을 $\boxed{\quad}$라고 읽는다.	

2) 기본공식

x^n의 미분법	곱의 미분법	합성함수의 미분법
① $\{x^n\}' = \boxed{\quad}$ ② $\{c\}' = \boxed{\quad}$	$\{f(x)g(x)\}' = \boxed{\quad}$	$(\boxed{\quad}) \times (\boxed{\quad})$
도함수의 성질		
① $\{f(x) \pm g(x)\}' = \boxed{\quad}$	② $\{cf(x)\}' = \boxed{\quad}$	

1. x^α의 미분법

1) 기본공식	2) 추가공식	
$\frac{d}{dx} x^\alpha = \boxed{\quad}$ (α는 실수)	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$ 〈엠마왓슨 공식〉	$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

참고 1) $\frac{1}{x^n}$은 x^{-n}으로 $\sqrt{x}$은 $x^{\frac{1}{2}}$으로 바꾸어 〈기본공식〉을 적용할 수 있지만 반드시 따로 암기한다.

참고 2) $x^{\text{무리수}}$인 경우에는 증명하지 않는다. 다만 미분법공식을 쓸 수 있다는 것이 알려져 있다.
예를 들면 x^π, x^e, $x^{\sqrt{2}}$ 등이 그렇다. (나머지는 뒤에서 차차 증명한다.)

예시 1 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $y = x^{-3}$ (2) $y = \frac{2}{x^2}$ (3) $y = \frac{x^3 + 4x^2 - x + 1}{2x^5}$

예시 2 다음 함수에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $y=x^{-\frac{2}{3}}$ (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ (3) $y=\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$

2. 몫의 미분법

1) 공식	2) 공식의 암기
$\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\}=\boxed{\dfrac{\qquad}{\qquad}}$	① 분자부터 미분, ② $\dfrac{\text{분자미분,분모곱해} - \text{분자곱해,분모미분}}{(\text{분모})^2}$

증명 1 : 몫의 미분법의 증명

$\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(x)$라 하면,

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{g(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)}-\dfrac{g(x)}{f(x)}}{\Delta x}\times\boxed{\dfrac{\qquad}{\qquad}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)f(x)-g(x)f(x+\Delta x)}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)f(x)-\boxed{\qquad}-g(x)f(x+\Delta x)+\boxed{\qquad}}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{g(x+\Delta x)-g(x)\}f(x)-g(x)\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}\times\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\underbrace{\frac{\{g(x+\Delta x)-g(x)\}f(x)}{\Delta x}}_{\boxed{\quad}}-\underbrace{\frac{g(x)\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}}_{\boxed{\quad}}\right]\times\underbrace{\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}}_{\boxed{\frac{\quad}{\quad}}}$$

$$=\boxed{\dfrac{\qquad}{\qquad}}$$

증명 2 : α의 확장 (자연수 → 정수)

자연수인 m에 대하여 $\boxed{\qquad}$이라고 할 때, x^n의 미분을 증명하여 본다.

$x^n = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$이다. 몫의 미분법에 의해서 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^m}\right)=\boxed{\dfrac{\qquad}{\qquad}}$

지수법칙의 의하여 분자지수에 분모지수를 빼주면 $\dfrac{-mx^{m-1}}{(x^m)^2}=\boxed{\qquad}$이다.

$\boxed{\qquad}$이므로 대입하면 nx^{n-1}이다. n이 자연수일 때의 공식이 음의 정수에도 사용될 수 있음을 확인하였다.

예시 3 다음 함수 $y=\dfrac{x^2+3x+1}{2x+3}$의 도함수를 구하여라.

3. 합성함수와 음함수

1) 합성함수의 미분법 공식

① $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = \boxed{\qquad\qquad}$ ② $\dfrac{d}{dx}f(g(h(x))) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

2) 음함수 미분법 (음함수의 의미 + 합성함수의 미분법)

1) 용어 : 우리나라에서는 음수와 음함수의 음자를 같은 글자를 쓴다. 하지만 그 의미는 분명히 다르고 그것이 영어에서는 정확히 들어난다. 음수는 영어로 negative number 이다. 그런데 음함수는 전혀 다른 Implicit function (내포하는 함수)라고 쓴다. 이것은 바로 도형을 의미한다.

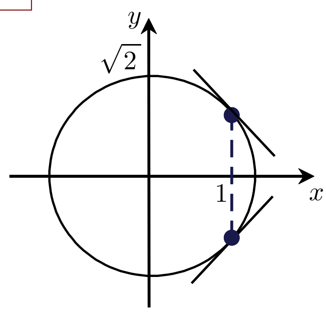
2) 설명 : $x^2+y^2=r^2$인 원을 생각해 보면 함수의 정의에 의하여 함수가 아니라고 알고 있다. 하지만 이 식을 y에 대해서 정리해 보면 $\boxed{\qquad\qquad}$ 또는 $\boxed{\qquad\qquad}$가 나온다는 사실을 알고 있다.
결국 도형이란 사실 식을 정리해보면 정의역을 공유하는 서로 다른 함수의 합집합으로 볼 수 있는 것이다.
즉, 도형은 결국 함수를 내포한다.

3) 결론 : 결국 음함수 미분법이란 변수 y를 x에 대해서 미분한다면
$\boxed{}$를 통째로 하나의 함수처럼 보고 $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$을 진행하는 방법이다.
(하지만 y에 대해서 미분한다면 y는 지금까지 미분해왔던 데로 하나의 일차 항에 불과하다.)
- 헷갈린다면 y를 $f(x)$라고 생각하고 미분해보길 바란다.

예를 들어 y^2을 y에 대해서 미분할 경우 $\Rightarrow$ $\boxed{\qquad}$

y^2을 x에 대해서 미분할 경우 $\Rightarrow$ $\boxed{\qquad}$ $\boxed{\boxed{}\text{(겉 미분)}\times\boxed{\qquad}\text{(속미분)}}$

4) 참고 : 지금까지 (양)함수와는 달리 음함수의 경우에는 $x=\alpha$에서는 미분계수를 찾으라고 한다면 미분계수가 두 개 이상이 나올 수 있다. 그래서 음함수 미분계수를 구하라고 할 때는 미분하는 점의 y좌표도 함께 알려준다.



예를 들어 $x^2+y^2=2$인 원이라면 $x=1$에서만 물어본다면 오른쪽과 같이 두 개 나올 수 있으므로 $(1,1)$에서의 미분계수를 찾으라는 식으로 물어보는 것이 보통이다.

3) 설명 : 음함수 미분법

★ $x^2+y^2=r^2$을 두 함수로 나눠보면 ① $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 또는 ② $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 이다.

① $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 의 도함수를 구해보면 ($\sqrt{}$ 의 미분법과 합성함수 미분법을 이용하였다.)

$\dfrac{d}{dx}y = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ 그런데 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 이므로 $\dfrac{d}{dx}y = \boxed{\qquad}$

② $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 의 도함수 역시 구해보면 ($\sqrt{}$ 의 미분법과 합성함수 미분법을 이용하였다.)

$\dfrac{d}{dx}y = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ 그런데 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 이므로 $\dfrac{d}{dx}y = \boxed{\qquad}$

★ 그리고 $x^2+y^2=r^2$의 양변을 x에 대해 미분하여 음함수 미분법(합성함수 미분법)을 사용하면

좌변 : $\dfrac{d}{dx}(x^2+y^2) = \dfrac{d}{dx}x^2+\dfrac{d}{dx}y^2 = \boxed{\qquad\qquad}$ 우변 : $\dfrac{d}{dx}r^2 = 0$

이므로 $\dfrac{d}{dx}y = \boxed{\qquad}$이다.

결국 교과서에 나오는 설명은 하나의 예를 통해서 <음함수 미분법은 사용해도 된다.>라는 것을 알려준 것이다.

4) 증명 : α의 확장 (정수 → 유리수)

$m \times n \neq 0$인 정수에 대하여 $\boxed{\qquad}$이라고 할 때, x^{α}의 미분을 증명하여 본다.

$x^{\alpha} = x^{\frac{n}{m}} \Leftrightarrow y^m = x^n$이다. 양변을 $\boxed{\qquad\qquad}$에 의하여 x에 대해 미분하면

$\frac{d}{dx} y^m = \frac{d}{dx} x^n \Leftrightarrow \boxed{\qquad\qquad\qquad} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \boxed{\qquad\qquad}$이다.

여기에서 y에 $x^{\frac{n}{m}}$을 대입하고 지수법칙을 적용하면

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

그런데 $\alpha = \frac{n}{m}$이므로 $\frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha - 1}$이다.

예시 4 2011. 6. 가형(76%). 26번. 4점

함수 $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$과 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $g(x)$에 대하여
함수 $h(x)$를 $h(x) = (g \circ f)(x)$라 하자. $h'(0) = 15$일 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.

예시 5 $xy^2 = 1$의 식에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

4. 역함수 미분법

1) 역함수 미분법	2) 역함수의 미분계수	3) 역함수의 도함수
어떤 함수가 〈$\boxed{\qquad\qquad}$〉으로 주어졌을 때, $\frac{dy}{dx}$를 구하는 방법. $\frac{dy}{dx} = \boxed{\qquad}$	$y = f(x)$가 점 (a, b)를 지날 때, 이 함수의 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 $x = b$에서의 미분계수. $(f^{-1})'(b) = \boxed{\qquad}$	$y = f(x)$의 역함수의 도함수는 1 단계 : $\boxed{\qquad\quad}$대칭. 즉, $x = f(y)$ 2 단계 : $\boxed{\ }$에 대해서 미분 후 역수. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{f'(y)}$

설명 1 : 〈역함수 미분법〉이라는 방법

역함수 미분법) $x = f(y)$처럼 표현된 함수에서 양변을 $\boxed{\ }$에 대해 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

이처럼 마치 분수처럼 계산되는 특징을 이용하여 미분하는 것을 〈역함수 미분법〉이라고 한다.
(- 역함수만 미분 하는 게 아니라고....-_-)

$\boxed{\qquad\qquad}$) $x = f(y)$라고 표현된 식에서 ($\boxed{\qquad\qquad}$을 이용하여) 양변을 $\boxed{\ }$에 대해 미분하여

$1 = f'(y)\frac{dx}{dy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$라는 같은 관계식을 얻을 수 있다.

설명 2 : 〈역함수의 미분계수〉는 기하학적으로 기억

$y=f(x)$위의 점 (a,b)에서 접선의 방정식과

$y=f^{-1}(x)$ 위의 점 (b,a)에서 접선의 방정식은

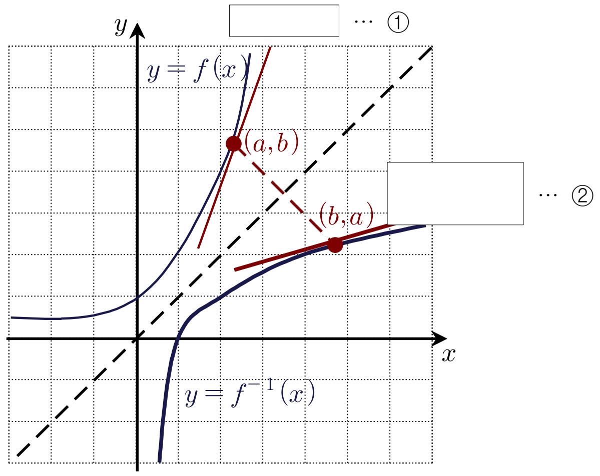
$\boxed{\quad}$ 대칭관계이다. 즉, $\boxed{\quad}$ 관계이다.

결국 $y=f(x)$위의 점 (a,b)에서 접선의 방정식을

$y=px+q$라고 할 경우 이 함수의 역함수를 실제로

구해보면 $\boxed{\quad}$이 나오고 이 일차함수가

$y=f^{-1}(x)$위의 점 $\boxed{\quad}$에서 $\boxed{\quad}$이다.



즉, ①의 식에서 접선의 기울기 $f'(a) = \boxed{\quad}$이다.

②의 식에서 접선의 기울기 $(f^{-1})'(b) = \boxed{\quad}$이다.

이 역수관계를 이용하면 문제에서 $(f^{-1})'(b)$를 구하라고 하는 경우에 $\boxed{\quad}$로 대신할 수 있다.

결국 $(f^{-1})'(b)=\boxed{\quad}$이다. 공식을 단지 암기하지 말고 그림을 떠올려 명확히 이해하라.

설명 3 : 〈역함수의 도함수〉 구하기

참고) y라는 문자가 내포하는 함수를 명확하게 이해해야 역함수의 도함수가 헷갈리지 않는다.

① 의미상 역함수 : $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$: 같은 식, 같은 그래프

➡ 이 때의 y는 $\boxed{\quad}$를 의미하는 y이다.

② 구한 역함수 : $y=f(x) \xrightarrow{\boxed{\quad}} x=f(y)$: 다른 식, 다른 그래프

➡ 이 때의 y는 $\boxed{\quad}$를 의미하는 y이다.

〈결론〉 $y=x$대칭을 시킨 후 〈역함수의 미분법〉을 이용하든 〈$\boxed{\quad}$〉을 이용하든 $\dfrac{dy}{dx}$를 구해주면 이것이 역함수의 도함수이다.

예시 6 다음 식 $x=\sqrt{y^3+1}$ 의 도함수를 역함수 미분법을 이용하여 구하여라.

예시 7 함수 $y=x\sqrt{1+x}$ $(x>0)$의 역함수의 도함수를 구하여라.

예시 8 함수 $y=g(x)$가 함수 $y=f(x)$의 역함수이고 $f(1)=3$, $f'(1)=2$일 때, $g'(3)$의 값은?

5. 매개변수로 표현된 함수의 미분법

$y=f(x)$로 주어지지 않고, 매개변수 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타내어진 미분 가능한 함수에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\boxed{\frac{\quad}{\quad}}\right)}{\left(\boxed{\frac{\quad}{\quad}}\right)} \text{ 또는 } \frac{dy}{dx}=\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$$

- 수식적으로만 이해하고 공식을 쓴다.
- 매개변수 함수를 이용하는 단원은 벡터와 평면운동이다. 매개변수 함수를 기하학적으로 정확히 이해하려면 벡터에 대한 기본적인 상식이 있어야 한다.

예시 9 매개변수로 나타내어진 다음 함수 $x=t^2+t, y=t^3+3t$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 나타내어라.

예시 10 $x=3t-1$, $y=3-t^2$을 만족하는 함수 $y=f(x)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하여라.

#2. 미분법 공식

1. 삼각함수 미분법

1) 삼각함수 미분법의 공식

① $\dfrac{d}{dx}\sin x = \boxed{}$ ② $\dfrac{d}{dx}\cos x = \boxed{}$ ③ $\dfrac{d}{dx}\tan x = \boxed{}$

④ $\dfrac{d}{dx}\sec x = \boxed{}$ ⑤ $\dfrac{d}{dx}\csc x = \boxed{}$ ⑥ $\dfrac{d}{dx}\cot x = \boxed{}$

삼각함수는 변형 공식을 통해 식을 간단히 할 수 있으면 미분도 간단히 할 수 있습니다.

2) 삼각함수 미분법의 공식증명

① $\dfrac{d}{dx}\sin x = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ <미분계수의 정의> $= \lim\limits_{h\to0}\dfrac{\boxed{}}{h}$ <신마신은 투신코>

$= \lim\limits_{h\to0}\left\{2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\times\boxed{\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{h}}\right\}$ $\boxed{}$ <함수의 극한> $= \boxed{}$

② $\dfrac{d}{dx}\cos x$ <각 변형 규칙> $= \dfrac{d}{dx}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ <$\sin x$미분법, 합성함수 미분법>

$= -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ <각 변형 규칙> $= \boxed{}$

③ $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$ <$\boxed{}$>

$= \dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \boxed{}$

④ $\dfrac{d}{dx}\sec x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = -\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}$ <몫의 미분법> $= \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}\times\dfrac{\sin x}{\cos x} = \boxed{}$

⑤ $\dfrac{d}{dx}\mathrm{cosec}\,x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ <몫의 미분법> $= -\dfrac{1}{\sin x}\times\dfrac{\cos x}{\sin x} = \boxed{}$

⑥ $\dfrac{d}{dx}\cot x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \dfrac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$ <몫의 미분법>

$= \dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = \boxed{}$

예시 11 다음 함수 $y=\sec x\tan x$의 도함수를 구하여라.

예시 12 다음 함수 $y=\sec^3(2x+5)$의 도함수를 구하여라.

예시 13 함수 $f(x)=\sqrt{1+\sin^2 2x}$ 에 대하여 $f'(\frac{\pi}{6})$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{3}}{7}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{7}$ ③ $\frac{2\sqrt{5}}{7}$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{21}}{7}$

예시 14 다음 함수 $y=\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ 의 도함수를 구하여라.

예시 15 다음 함수 $x\cos y+y\sin x=1$에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

예시 16 $y=\tan x\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, $g'(\sqrt{3})$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

예시 17 함수 $y=2\sin x+\cos 2x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(x)$를 y에 대한 식으로 나타내어라.

예시 18 다음 매개변수로 표현된 함수 $x=2\cos^3\theta, y=2\sin^3\theta$ (θ는 매개변수)에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

2. 지수 · 로그함수 미분법

1) 지수함수의 미분법	2) 로그함수의 미분법
① $\dfrac{d}{dx}e^{x} = \square$	① $\dfrac{d}{dx}\ln x = \square\ (\square)$ ② $\dfrac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \square$
② $\dfrac{d}{dx}a^{x} = \square$	③ $\dfrac{d}{dx}\log_{a}x = \square\ (\square)$ ④ $\dfrac{d}{dx}\ln\lvert f(x)\rvert = \square$

$\ln\lvert x\rvert$와 같이 절댓값 함수가 합성되어 있는 로그함수를 미분할 때는 절댓값을 미분한다는 생각을 버리고 〈$\ln x$를 미분하되 제한범위를 생각하지 않아도 된다.〉라고 기억하는 것이 좋다.

3) 지수·로그 함수의 미분법 공식의 증명

① $\dfrac{d}{dx}e^{x} = \square$의 증명 : $\dfrac{d}{dx}e^{x} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x+h}-e^{x}}{h}$ <미분계수의 정의> $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x}(e^{h}-1)}{h} = \square$

$\square$ <함수의 극한>

② $\dfrac{d}{dx}a^{x} = \square$의 증명 : $\dfrac{d}{dx}a^{x} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x}(a^{h}-1)}{h} = \square$

$\square$ <함수의 극한>

③ $\dfrac{d}{dx}\ln x = \square$의 증명 : 원래 함수 $y=\ln x$의 정의역이 $(\square)$이므로 도함수 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$ 역시 $(\square)$이어야 한다. 단지 원래 함수 $y=\ln x$에서는 식에서 $(\square)$라는 인상을 받으므로 정의역을 생략하지만 도함수 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$에서는 x에 음수를 넣을 수 있다는 느낌이 들기 때문에 $(\square)$을 표시한다.

$$\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}\times x} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\times\frac{1}{x}$$

$\square$ <함수의 극한>

$= \square\ (\square)$

④ $\dfrac{d}{dx}\log_{a}x = \square\ (\square)$의 증명 :

$\log_{a}x$에 밑 변환 공식을 이용하면 $\log_{a}x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \square$라고 표현할 수 있다. 그런 후 ③에서 증명한 미분법 공식을 이용하면 $\dfrac{d}{dx}\log_{a}x = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\ln a}\times\ln x\right) = \square\ (\square)$

⑤ $\dfrac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \square$의 증명 : 따로 공식이 있는 것은 아니다. 범위를 나누어 확인하는 것.

$f(x)=\ln\lvert x\rvert$라고 한다면 $f(x)$는 두 개의 범위로 나누어 질수 있다. 즉, $f(x)=\begin{cases}\ln x & (x>0)\\ \ln(-x) & (x<0)\end{cases}$이다.

$x=0$에서는 함숫값 자체가 없으므로 이 점에서만 미분이 불가능하고 나머지 점에서는 미분가능하다.

그래서 공식을 이용하면 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>0)\\ \dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x} & (x<0)\end{cases}$ 이므로 결국 $x\neq 0$인 모든 실수에서 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이다.

예시 19 다음 함수 $y=3^{\cos x}$의 도함수를 구하여라.

예시 20 다음 함수 $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$의 도함수를 구하여라.

예시 21 함수 $f(x)=e^{2x}\tan\pi x$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

① -2π ② $-\pi$ ③ π ④ 2π ⑤ 3π

예시 22 $f(x)=\dfrac{e^{x}\cos x}{1+\sin x}$일 때, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하여라.

예시 23 음함수 $x^{2}+y^{2}=e^{x+y}$에 대하여 다음 중 $\dfrac{dy}{dx}$를 나타내는 것은?

① $2e^{x+y}$ ② $\dfrac{e^{x+y}-2x}{e^{x+y}+2y}$ ③ $\dfrac{e^{x+y}+2x}{e^{x+y}-2y}$ ④ $\dfrac{e^{x+y}-2x}{e^{x+y}-2y}$ ⑤ $-\dfrac{e^{x+y}-2x}{e^{x+y}-2y}$

예시 24 $x=e^{t+2}$, $y=e^{3t+1}$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$는?

① e^{t+1} ② e^{2t+1} ③ e^{2t-1} ④ $3e^{2t+1}$ ⑤ $3e^{2t-1}$

예시 25 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=x^2\log_2 x$　　(2) $y=x\ln|x|$　　(3) $y=e^x\ln x$

예시 26 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　　(2) $y=(\ln x)^2$　　(3) $y=\ln|3x-1|$

예시 27 함수 $f(x)=\log_2(\cos^2 x)$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?

① $-\ln 2$　② $-\frac{2}{\ln 2}$　③ $\frac{2}{\ln 2}$　④ $\ln 2$　⑤ $2\ln 2$

예시 28 다음 함수$y=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ 의 도함수를 구하여라.

예시 29 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sqrt{x^2+3}$ 일 때, $\frac{d}{dx}(f^{-1}\circ g)(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

예시 30 $\lim_{t\to 0}\frac{f(\ln(1+2t))-f(0)}{t}=4$일 때, $f'(0)$의 값을 구하여라.

예시 31 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{3^x+4^x}{2}$ 의 값은?

① $\ln\sqrt{3}$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 2\sqrt{3}$ ④ $2\ln 2$ ⑤ $2\ln 3$

예시 32 $\lim_{x\to a}\frac{b\ln x}{x^2-a^2}=1$을 만족시키는 상수 a, b의 값을 구하여라.

3. 로그미분법

1) 필수적 로그 미분법 : 변태함수

x^3은 밑에는 변수, 지수에는 상수가 있다. - 그러면 x^α의 미분법을 이용한다.

3^x은 밑에는 상수, 지수에는 변수가 있다. - 그러면 지수함수의 미분법을 이용한다.

x^x은 밑에도 변수, 지수에도 변수가 있다. - 이런 경우 위의 어떤 공식을 사용해도 틀린다.

이런 경우 사용하는 미분법이 〈$\boxed{}$〉이다.

2) 선택적 로그 미분법

〈복잡한 몫의 꼴〉이나 〈곱의 꼴〉을 미분해야 하는 경우에 적절하게 로그법칙을 활용하면 계산이 용이해진다.
단, 이것은 방법적으로만 기억해야 한다. 자세히 들어가면 과정에서 여러 가지 비논리가 생긴다.

① 양변에 절댓값을 취한다.

② 로그함수 미분법과 음함수 미분법을 적용한다.

설명) 선택적 로그 미분법

로그 미분법은 계산을 위한 하나의 테크닉으로 생각하면 좋다. 양변을 그냥 미분한 것과 결과적으로 같기 때문에 식 변형 과정에서 생기는 제한범위까지 생각할 필요는 없다.

예를 들어 $y=(x+1)^2(x+2)$의 양변의 $\ln$을 취하면 $\ln y=\ln(x+1)^2(x+2)$이다.
여기에서 준 식 $y=(x+1)^2(x+2)$과 변형 식 $\ln y=\ln(x+1)^2(x+2)$은 같은 식이 아니다.
(정의역의 차이가 생긴다.)

그래서 보통은 양변에 먼저 절댓값을 취하고 로그를 취하라고 한다. 하지만 $y=(x+1)^2(x+2)$을 절댓값을 취한 식 $|y|=\left|(x+1)^2(x+2)\right|$ 역시 〈준 식〉과 〈같은 식〉이 아니다.
($y=\pm(x+1)^2(x+2)$과 같은 식이다.)

그러나 이런 식 변형이 가능하다. 이유는 결과적으로 나오는 도함수가 그냥 미분했을 때와 같은 식이 나오기 때문이다.

결국 $y=(x+1)^2(x+2)$을 $|y|=\left|(x+1)^2(x+2)\right|$로 바꾸는 비논리를 거친 후
양변에 $\ln$을 취하면

$$\ln|y| = \ln\left|(x+1)^2(x+2)\right| = \ln\left|(x+1)^2\right|\times|(x+2)|$$
$$= \ln|(x+1)|^2\times|(x+2)| = 2\ln|(x+1)|+\ln|(x+2)|$$ 이고,

양변을 미분하면 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2} \Leftrightarrow y' = y\times\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}\right)$이다.

여기에서 y에 $(x+1)^2(x+2)$을 대입하여 약분하고 정리하면
➡ 〈곱의 미분법을 적용한 것과 같은 결과〉가 나온다.

계산의 편의성을 위하여 사용하는 계산 테크닉일 뿐 중간 식 변형 과정에서 나오는 비논리는 신경 쓸 필요가 없다.

추가로 위의 $y' = y\times\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}\right)$의 식을 정리할 필요는 없다. 만약 $x=1$에서 미분계수를 물어본다면 $x=1$일 때, $y=12$이므로 이것을 그대로 대입하면 된다. 실제로 만약 위의 식을 정리해야 된다면 〈로그 미분법〉이 더 복잡할 수 있다.

예시 33 다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$을 구하여라.

(1) $y = x^x \ (x > 0)$ (2) $y = x^{\sin x} \ (x > 0)$ (3) $y = (\ln x)^x \ (x > 1)$

예시 34 함수 $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$ 에 대하여 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$ 을 구하면?

4. 이계도함수

1) 이계도함수

: 어떤 함수 $y=f(x)$를 x에 대해서 두 번 미분할 경우 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}y\right)$이다.

이것을 수학적인 기호로 $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 y$ 또는 $\dfrac{d^2}{dx^2}y$ 또는 $\boxed{\dfrac{\quad}{\quad}}$ 또는 y''라고 쓴다

2) 매개변수로 표현된 함수의 이계도함수

매개변수로 함수가 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 로 주어져 있을 때, 보통 구하라고 하는 이계도함수는 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$이다.

이것을 $\dfrac{\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)}$이라고 생각하는 학생이 많다. 이것을 계산해보면 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$이 아니라 $\dfrac{d^2y}{d^2x}$이 된다.

그래서 우리는 매개변수로 표현된 함수의 도함수에서 이계도함수를 구할 때는 약간의 테크닉을 이용해야한다.

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{\boxed{\quad}}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\times\dfrac{\boxed{\quad}}{dx} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\times\boxed{\dfrac{\quad\quad}{\quad}}$과 같이 구하게 된다.

결국 $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$을 통해서 매개변수로 표현된 함수의 이계도함수를 구할 수 있다.

이것이 사실 고등과정에서 이 식은 많이 쓰는 식이 아닌 이유는 $y=f(x)$함수 입장에서 이계도함수는 아니지만 $\dfrac{\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)}$이 기하학적으로는 오히려 <가속도의 방향>이라는 중요한 의미를 가지고 있기 때문이다.

그래서 재미있게도 우리가 이계도함수라고 잘못 생각한 식이 사실은 훨씬 중요한 식이다.

예시 35 $f(x)=\cos^3 2x$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$의 값을 구하여라.

예시 36 다음 함수 $y\cos x + x = 1$에서 $\left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=0}$ 을 구하여라.

.