※ 문항 발문 수정사항

붉은 글씨가 수정된 내용입니다.

[다비오X나승 모의고사 3회 15번]

타원의 방정식 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 에서 두 초점을 F, F' $(F< F')$이라하고 타원 위를 움직이는 점을 P라 하자. 선분$\overline{F'P}$의 연장선 위에 F'보다 P에 가까운 쪽에 그림과 같이 $\overline{FP}=\overline{PQ}$가 성립하도록 점$Q$를 잡을 때, 점$Q$의 자취의 방정식과 포물선 $y^2=4x+p$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 p의 최댓값을 구하시오.[4점]

[다비오X나승 모의고사 3회 27번]

연속함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt=e^x-x+c$ (c는 상수)

를 만족시킬 때, 두 곡선 $y=f(x)$ $y=g(x)$ 와 $x=10$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?[4점]

[다비오X나승 모의고사 4회 21번]

함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 에 대하여

함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (0<x\le e^2) \\ f'(x) & (x>e^2) \end{cases}$ 이고

함수 $h(x)=(ax+b)g(x)$ 가 구간 $(0,\infty)$에서 연속이고

$h(e)=1-e$ 일 때, $\int_{e^2}^{e^3} h(x)dx$의 값을 구하시오.$(a\ne 0)$[4점]

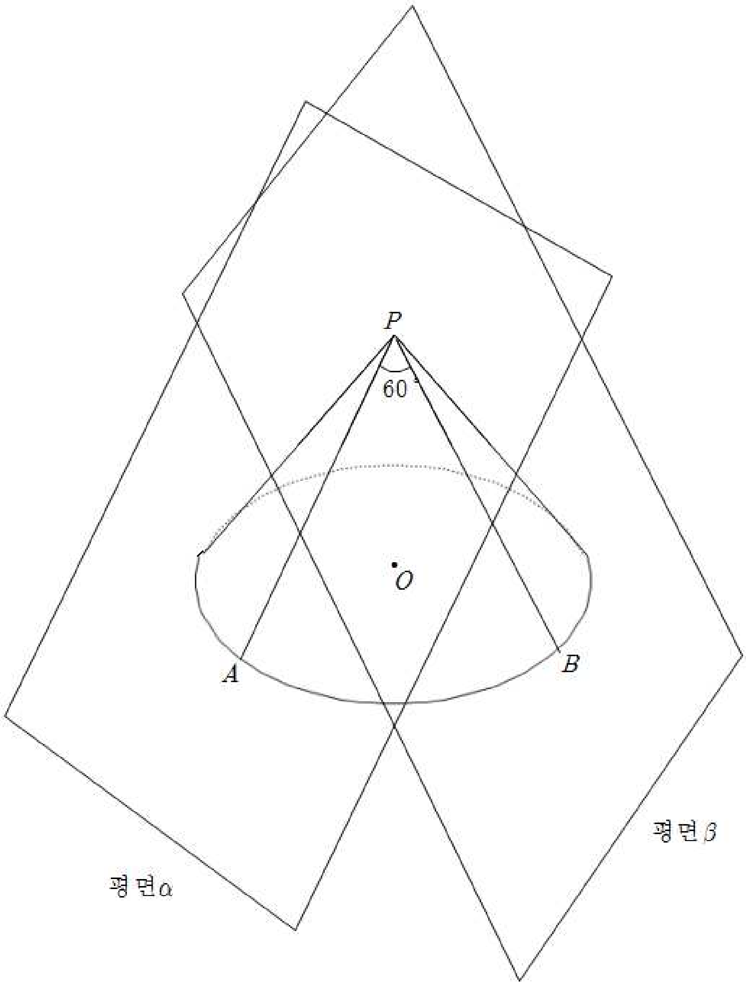
① $\frac{1-2e}{e}$ ② $\frac{1-2e}{e^2}$ ③ $\frac{2(1-e)}{e^2}$

④ $\frac{e-6}{2e}$ ⑤ $\frac{e-6}{e}$

[다비오X나승 모의고사 4회 29번]

29번은 기존의 문제를 그대로 푸셔도 오류는 없습니다. 다만 답을 예상하기에 너무 쉽다고 판단하여 수정하였습니다.

아래 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2이고 높이가 $2\sqrt{2}$인 직원뿔에 접하는 두 개의 평면 α와β 가 있다. 각 평면은 각각 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$를 교선으로 갖고 두 교선이 이루는 예각의 크기는 60° 이다. 이때, 두 평면 α와β 가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $(2\sin\theta)^2$의 값을 구하여라.[4점]



※ 문항 해설 및 정답 수정사항

[다비오X나승 모의고사 3회 27번]

해설 부분 맨끝부분

'따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}\times 2!\times 6 = 8640$' 에서

'따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}\times 2!\times 6! = 8640$' 으로 수정되었습니다.

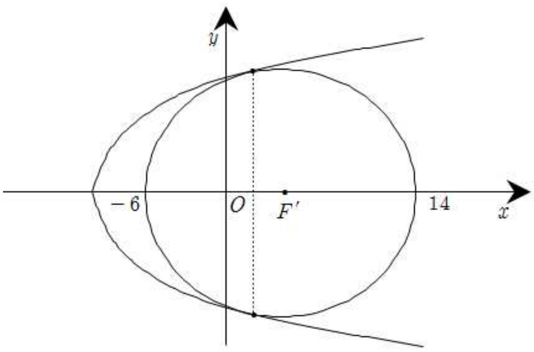
'따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3H_2\times 2\times 6 = 8640$' 에서

'따라서 구하는 경우의 수는 ${}_3H_2\times 2\times 6! = 8640$' 으로 수정되었습니다.

[다비오X나승 모의고사 3회 15번]

발문의 수정에 따라 해설도 수정되었습니다.

타원의 정의에 따라 $\overline{FP}+\overline{PF'} = 10$ 입니다.
따라서 $\overline{FP}+\overline{PF'} = \overline{QP}+\overline{PF'} = 10$ 이므로 점 Q의 자취의 방정식은
중심이 $(4,0)$이고 반지름의 길이가 10인 원의 방정식입니다.
즉, $(x-4)^2+y^2 = 100$입니다.
$(x-4)^2+y^2 = 100$이 포물선 $y^2 = 4x+p$과 서로 다른 두 점에서 만나**며 p가 최댓값을 가지기** 위해서는 **아래 그림과 같이 두 그래프가 접해야 합니다.**



$(x-4)^2+y^2 = 100$ 에 $y^2 = 4x+p$을 대입하여 정리하면
$x^2-4x-84+p = 0$이 됩니다. 두 그래프의 교점은 2개이지만 각 교점의 x좌표는 모두 같으므로 이 방정식이 중근을 가질 때, 접하게 됩니다. 즉 판별식 $D/4 = 0$을 만족하면 중근을 가지므로 $4-(-84+p) = 0$ 입니다.
따라서 $p = 88$

[다비오X나승 모의고사 3회 27번]

발문의 수정에 따라 해설도 수정되었습니다.

정답:60
먼저 $x = 0$을 대입하면 $c = -1$ 임을 알 수 있습니다.

따라서 $g(x) = e^x - x - 1$ 입니다.

$x - t = k$로 치환하면 $-dt = dk$

위끝 아래끝은 $0 \rightarrow x$, $x \rightarrow 0$ 로 바뀝니다.

$\int_x^0 -(x-k)f(k)dk = e^x - x - 1$

$\int_0^x (x-k)f(k)dk = e^x - x - 1$

$x\int_0^x f(k)dk - \int_0^x kf(k)dk = e^x - x - 1$

양변을 x에 관하여 미분하면

$\int_0^x f(k)dk + xf(x) - xf(x) = e^x - 1$

$\int_0^x f(k)dk = e^x - 1$

한번 더 양변을 x에 관하여 미분하면

$f(x) = e^x$

그러므로 $y = e^x$ $y = e^x - x - 1$ 와 $x = 10$ 및 y축으로 둘러싸인

도형의 넓이를 구하면 됩니다.

$\int_0^{10} |e^x - (e^x - x - 1)|dx = \int_0^{10} |x+1|dx = \int_0^{10} x+1 = 60$

[다비오X나승 모의고사 4회 21번]

발문의 수정에 따라 해설도 수정되었습니다.

정답 ④

함수 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 < x \le e^2) \\ f'(x) & (x > e^2) \end{cases}$ 에 대하여

함수 $h(x) = \begin{cases} (ax+b)f(x) & (0 < x \le e^2) \\ (ax+b)f'(x) & (x > e^2) \end{cases}$

이와 같이 함수$h(x)$를 나타낼 수 있습니다.

그런데

$f(x), f'(x), ax+b$ 는 모두 연속인 함수이므로

함수$h(x)$의 각 구간에서 $(ax+b)f(x)$, $(ax+b)f'(x)$는 모두 연속입니다.

따라서 구간 $(0, \infty)$에서 연속이 되기 위해서는 $x = e^2$에서만 연속이면 됩니다.

$\lim_{x \to e^2+} (ax+b)f(x) = \lim_{x \to e^2-} (ax+b)f'(x) = (ae^2+b)f(e^2)$

$\lim_{x \to e^2+} (ax+b)\frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to e^2-} (ax+b)\frac{1-\ln x}{x^2} = (ae^2+b)\frac{2}{e^2}$

$(ae^2+b)\frac{-1}{e^4} = (ae^2+b)\frac{2}{e^2}$

$\Rightarrow (-ae^2-b)\frac{1}{e^2} = 2(ae^2+b)$

$\Rightarrow \; -ae^2 - b = 2ae^4 + 2be^2$

$\Rightarrow \; -ae^2 - 2ae^4 = 2be^2 + b$

$\Rightarrow \; -ae^2(1+2e^2) = b(2e^2+1)$

$\Rightarrow \; -ae^2 = b$

따라서 $h(x) = (ax - ae^2)g(x) = a(x-e^2)g(x)$ 입니다.

그런데 $h(e) = 1-e$이므로 $h(e) = a(e-e^2)g(e) = a(e-e^2)f(e) = 1-e$

$a(e-e^2)f(e) = a(e-e^2)\dfrac{1}{e} = 1-e$

$a(1-e) = 1-e$

따라서 $a=1$ 입니다.

$\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} h(x)\,dx = \int_{e^2}^{e^3} (x-e^2)f'(x)\,dx = \left[(x-e^2)f(x)\right]_{e^2}^{e^3} - \int_{e^2}^{e^3} f(x)\,dx$

$\displaystyle = \left[(x-e^2)\frac{\ln x}{x}\right]_{e^2}^{e^3} - \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x}{x}\,dx \quad \cdots ①$

그런데 $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[(\ln x)^2\right]_{e^2}^{e^3} - \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x}{x}dx$

따라서 $\displaystyle 2\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[(\ln x)^2\right]_{e^2}^{e^3} = 9-4 = 5$

$\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{5}{2}$ 이것을 위 ① 식에 대입하면

$\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} h(x)\,dx = \frac{3(e^3-e^2)}{e^3} - \frac{5}{2} = 3 - \frac{3}{e} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{e}$

따라서 $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} h(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{3}{e} = \frac{e-6}{2e}$

[다른풀이]

함수 $g(x)$는 $x=e^2$에서만 불연속이므로

함수 $h(x) = (ax+b)g(x)$ 에 관하여 $x=e^2$일 때,

$ax+b$의 값이 0 되어야 함수$h(x)$의 좌극한값과 우극한값이 같을 수 있음을 알 수 있습니다.

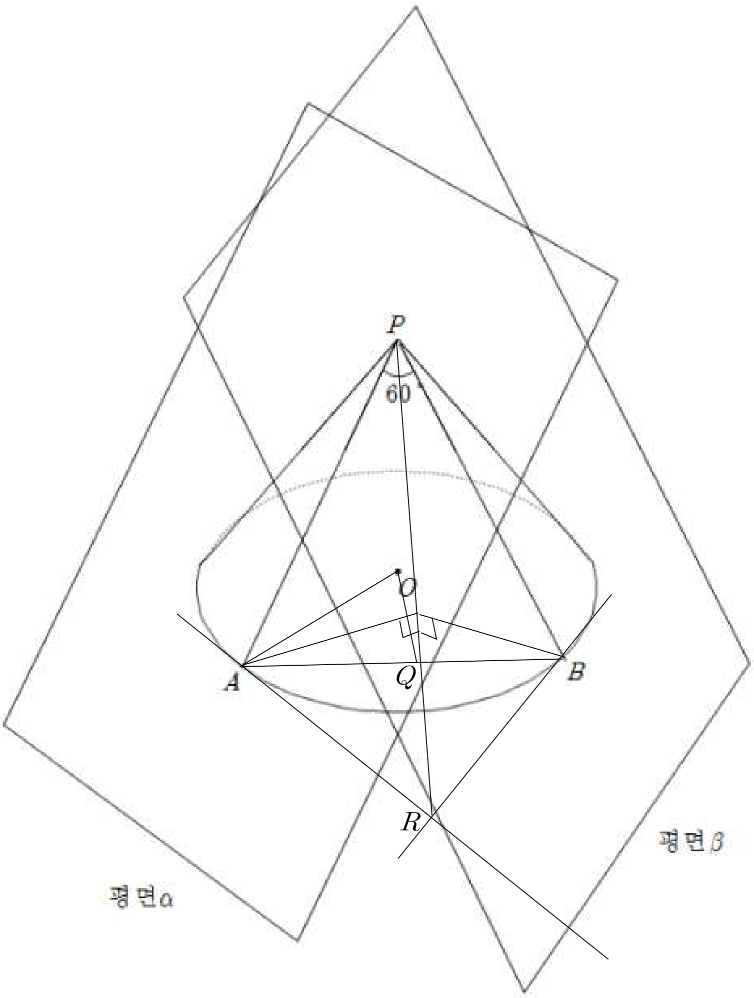
따라서 $ae^2+b=0$이므로 $b=-ae^2$ 입니다.

나머지는 위의 풀이와 같은 방법으로 풀 수 있습니다.

[다비오X나승 모의고사 4회 21번]

발문의 수정에 따라 해설도 수정되었습니다.

정답:4



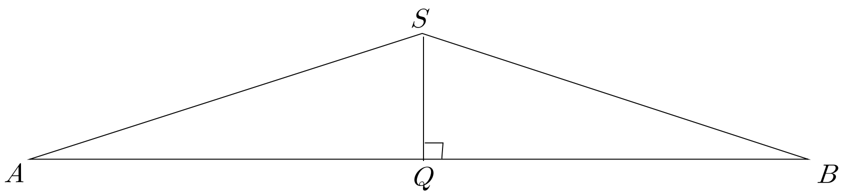
$\overline{PO}=2\sqrt{2}$, $\overline{OA}=2$ 이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{PA}=2\sqrt{3}$
삼각형PAB는 이등변 삼각형이므로 $\angle PAB=60^{\circ}$ 이고 따라서
삼각형PAB는 정삼각형입니다. 따라서 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$ 입니다.
밑면의 중심O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발에 의해 $\overline{AB}$는 수직이등분 됩니다. 왜냐하면 삼각형 OAB는 이등변 삼각형이기 때문입니다.
밑면의 중심O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 Q라 합시다. 그러면 삼각형 OAQ는 직각삼각형인데 $\overline{OA}=2$, $\overline{AQ}=\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{OQ}=1$ 이고 $\angle AOQ=60^{\circ}$ 임을 알 수 있습니다. 점A에서 원뿔의 밑면을 품고있는 평면위에 밑면인 원과 접하도록 접선을 긋습니다. 같은식으로 점B 에서 원뿔의 밑면을 품고있는 평면위에 밑면인 원과 접하도록 접선을 긋습니다.

그리고 두 접선의 교점을 R라 합시다. 그러면 $\overline{PR}$가 두 평면 α와β 의 교선이라는 것을 알 수 있습니다. $\angle AOQ = 60^\circ$, $\overline{OA} = 2$ 이므로 $\overline{AR} = 2\tan60^\circ = 2\sqrt{3}$ 입니다.

삼수선정리에 의해 $\overline{PA} \perp \overline{AR}$ 하므로 삼각형PAR는 직각이등변 삼각형이 됩니다.

따라서$\overline{PR} = 2\sqrt{6}$ 입니다.

점A에서 $\overline{PR}$에 수선을 내리고 점B에서도 $\overline{PR}$에 수선을 내리면 $\overline{PR}$위에서 한점에서 만나게 되는데 이점을 S 라 합시다. 삼각형 SAB의 단면은 다음 그림과 같고 이면각의 정의에 의해 두 평면 α와β 가 이루는 각의 크기는 $\angle ASB$ 와 같습니다 S에서 $\overline{AB}$에 수선을 그으면 그 발은 Q와 일치합니다.



직각 이등변 삼각형PAR에서 $\overline{AS} = \overline{SB} = \sqrt{6}$ 임을 알 수 있습니다.

$\angle ASQ = \gamma$라 하면 $\sin\gamma = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AS}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\gamma = 45^\circ$ 입니다.

따라서 두 평면 α와β 가 이루는 각의 크기는 $\angle ASB$ 는 2γ이므로 90° 임을 알 수 있습니다.

따라서 $\sin90^\circ = 1$

$(2\sin\theta)^2 = 4$