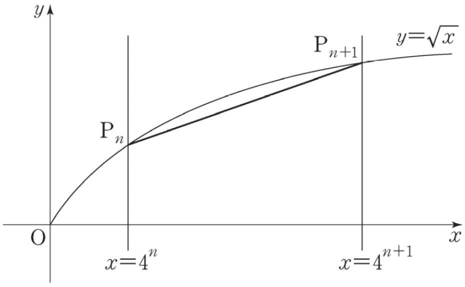
토픽 1 - VIP추가

13 [2017 수능]

자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하시오.



토픽 1 - VIP 추가 해설

13.

점 $\mathrm{P}_n(4^n,\ 2^n)$, $\mathrm{P}_{n+1}(4^{n+1},\ 2^{n+1})$에 대하여

$$(L_{n+1})^2 = (4^{n+2} - 4^{n+1})^2 + (2^{n+2} - 2^{n+1})^2$$

$$(L_n)^2 = (4^{n+1} - 4^n)^2 + (2^{n+1} - 2^n)^2$$

이고 극한값을 구할 때는 4^n에만 집중하면 되므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2 = \frac{9\times 16}{9} = 16$$

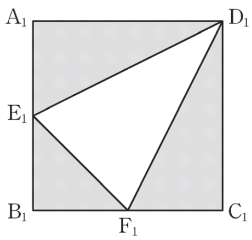
답 : 16

22 [2017 06 평가원]

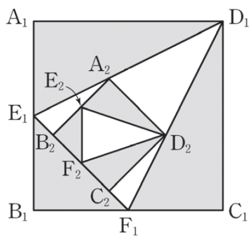
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에서 선분 $\mathrm{A_1B_1}$과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$이라 하자. 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 내부와 삼각형 $\mathrm{E_1F_1D_1}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 $\mathrm{D_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{D_1F_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 선분 $\mathrm{E_1F_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그리고, 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $\mathrm{E_2F_2D_2}$를 그리고 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 내부와 삼각형 $\mathrm{E_2F_2D_2}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

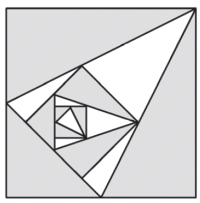
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



⋯

R_3 ⋯

① $\frac{125}{37}$ ② $\frac{125}{38}$ ③ $\frac{125}{39}$ ④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{125}{41}$

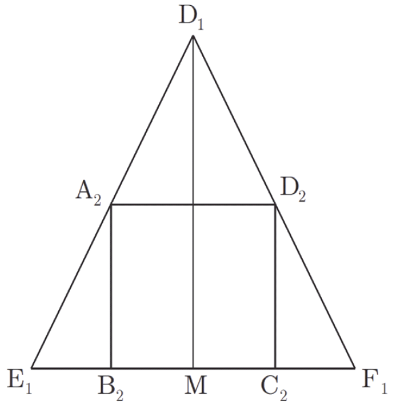
토픽 2 - VIP 추가 해설

22.

초항은 세 직각삼각형의 넓이를 더하는 것이니, $1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$로 엄청 쉽게 구해집니다.

이제 공비를 구해봅시다. 공비는 사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 길이비의 제곱으로 구할 수 있습니다.

사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 삼각형 $D_1E_1F_1$에 내접하므로 두 도형만 따로 떼서 봅시다.



$\overline{D_1E_1}=\overline{D_1F_1}=\sqrt{5}$, $\overline{E_1F_1}=\sqrt{2}$ 입니다. 이등변삼각형이 등장했으므로 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선의 발 M이 $\overline{E_1F_1}$의 중점이 된다는 성질을 사용해 봅시다.

삼각형 F_1D_1M과 삼각형 $F_1C_2D_2$가 닮음 관계에 있습니다.

$$\overline{MF_1}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \overline{D_1M}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

입니다.

한편, 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이가 x이면,

$$\overline{C_2D_2}=x,\ \overline{F_1C_2}=\frac{\sqrt{2}-x}{2}$$

입니다. 이를 이용해 비례식을 세우면

$$\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-x}{2}:x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{2}-x)}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\Leftrightarrow 3(\sqrt{2}-x)=2x$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

입니다. 따라서 공비는 $\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{9}{50}$이고, 등비급수의 값은 $\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{9}{50}}=\frac{125}{41}$입니다.

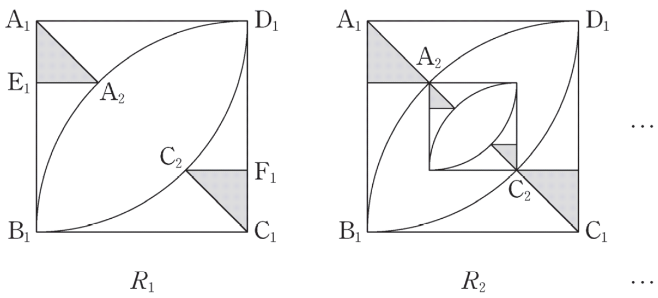
답 : ⑤

23 [2017 09 평가원]

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 점 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{1}{12}(\sqrt{2}-1)$　② $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$　③ $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$
④ $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$　⑤ $\frac{5}{12}(\sqrt{2}-1)$

토픽 2 - VIP 추가 해설

23.

$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1C_1}-\overline{A_2C_1}=\sqrt{2}-1$이므로 초항은 $2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$이 됩니다.

한편, $\overline{A_2C_2}$의 길이는 $\overline{A_1C_1}-2\times\overline{A_1A_2}$와 같으므로 $\overline{A_2C_2}=2-\sqrt{2}$입니다.

두 정사각형의 대각선의 길이비는 $\sqrt{2}:2-\sqrt{2}$이므로

공비는 넓이비인 $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2=(\sqrt{2}-1)^2$가 됨을 알 수 있습니다.

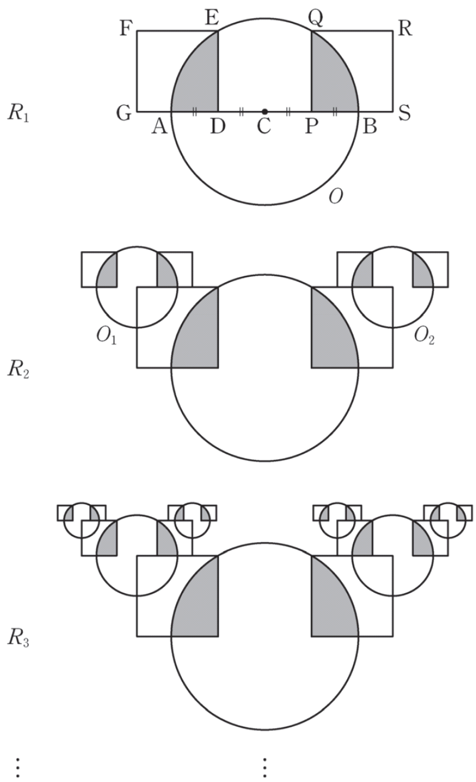
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$$

답 : ③

24 [2017 수능]

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형과 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\dfrac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\dfrac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$ ③ $\dfrac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$

④ $\dfrac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\dfrac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

토픽 2 - VIP 추가 해설

24.

먼저, 삼각형 EDC에서 $\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{CE}}=1:2$이므로 $\angle \mathrm{ECD}=60^\circ$임을 알 수 있습니다.

호 AE와 두 선분 AD, DE로 둘러싸인 영역의 넓이는 부채꼴 ACE의 넓이에서 삼각형 EDC의 넓이를 빼주면 됩니다.

$$\therefore\ (\text{초항})=2\times\left(\frac{1}{2}\times(2)^2\times\frac{60^\circ}{360^\circ}\times 2\pi-\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

만들어지는 방식이 같고, 모두 닮음이므로 만들어지는 도형들의 길이비를 구하겠다고 마음을 먹습니다.

O_1의 반지름의 길이는 정사각형 GDEF의 한 변의 길이에 $\frac{1}{2}$을 한 것이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이 됩니다. 즉, 길이비는

$$(\text{원 } O\text{의 반지름의 길이}):(\text{원 } O_1\text{의 반지름의 길이})=2:\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 넓이비와 개수가 2배로 늘어나는 것을 이용해 공비가 $2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{3}{8}$임을 알 수 있습니다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$$

답 : ③

14 [2017 수능]

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

토픽 4 - VIP 추가 해설

14.

함수 $f(x)$는 $x=2$에서만 불연속이고, $g(x)$는 연속함수이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이게 만들어줘야 합니다.

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(2)}{1}$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(2)}{-2}$$

$$\frac{g(2)}{f(2)}=g(2)$$

이므로 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 $x=2$에서 연속이려면 $g(2)=0$이어야 합니다.

$$\therefore\ -2a+1=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$$

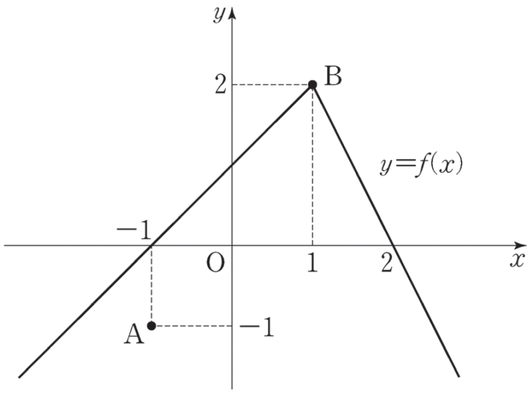
답 : ④

16 [2017 06 평가원]

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오.



16.

점 A까지의 거리의 제곱은 $(x+1)^2+(f(x)+1)^2$,

점 B까지의 거리의 제곱은 $(x-1)^2+(f(x)-2)^2$입니다.

두 점까지의 거리가 같아지는 점은

$$(x+1)^2+(f(x)+1)^2=(x-1)^2+(f(x)-2)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{-4x+3}{6}$$

$$\Leftrightarrow x+1=\frac{-4x+3}{6}(x<1) \text{ or } -2x+4=\frac{-4x+3}{6}(x\geq 1)$$

$$\therefore x=-\frac{3}{10} \text{ or } \frac{21}{8}$$

이므로 함수 $g(x)$를 적어보면 다음과 같습니다.

$$g(x)=\begin{cases}(x+1)^2+(f(x)+1)^2 & \left(x<-\frac{3}{10},\ x\geq\frac{21}{8}\right)\\(x-1)^2+(f(x)-2)^2 & \left(-\frac{3}{10}\leq x<\frac{21}{8}\right)\end{cases}$$

여기서 답이 $-\frac{3}{10}$, $\frac{21}{8}$일 것이라는 직감이 오지만, 끝까지 계산해봅니다.

즉, $g(x)$의 도함수

$$g'(x)=\begin{cases}2x+2+2f(x)f'(x)+2f'(x) & \left(x<-\frac{3}{10},\ x>\frac{21}{8}\right)\\2x-2+2f(x)f'(x)-4f'(x) & \left(-\frac{3}{10}<x<\frac{21}{8}\right)\end{cases}$$

에서 $x=-\frac{3}{10}$, $\frac{21}{8}$일 때의 양 옆의 극한값을 비교해주면 되는데,

$-\frac{3}{10}$일 때는 좌극한이 $\frac{24}{5}$, 우극한이 $-\frac{26}{5}$이고

$\frac{21}{8}$일 때는 좌극한이 $\frac{65}{4}$, 우극한이 $\frac{33}{2}$이므로 $g(x)$는 $x=-\frac{3}{10}$, $\frac{21}{8}$에서 미분가능하지 않습니다.

$$\therefore 80p=80\left(-\frac{3}{10}+\frac{21}{8}\right)=186$$

문항 comment

$(f(x))^2$의 미분은 $f(x)\times f(x)$이므로 곱의 미분법으로 처리하시면 됩니다.

혹시 '함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하지 않으니까, 여기도 미분불가능 할 수도 있지 않을까?'라고 생각할 수 있는데, 구한 함수 $g'(x)$에서 $x=1$이 속하는 범위에서의 함수는 $2(x-1)+2f'(x)(f(x)-2)$인데, $x=1$을 대입하면, 좌 우 극한값이 항상 0이 됨을 확인할 수 있습니다. 따라서 의심을 거두면 되겠지요?

이 문제의 아이디어는 이과의 미적분 기출문제에서 따온 것인데, 최근에는 문과 미적분 기출문제에 이과의 미적분 기출 아이디어가 계속해서 들어가고 있다는 것을 알 수 있습니다.

답 : 186

17 [2017 수능]

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자.
방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오.

17.

문제가 당황스럽지만, 침착하게 하나하나 조건을 체크해봅시다.

함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$가 있고 그 역함수가 $g(x)$ 입니다.

$f'(x)=3x^2-6x+6$이므로 주어진 방정식을 변형하면,

$$4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$$
$$\Leftrightarrow\ 12x^2-12x+6=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$$
$$\Leftrightarrow\ (2x-1)^2=\{g(x)-1\}^2$$
$$\Leftrightarrow\ g(x)=2x \text{ or } g(x)=-2x+2$$

따라서 우리는 두 방정식 $g(x)=2x$, $g(x)=-2x+2$ 중 적어도 하나가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근을 갖도록 해주면 됩니다.

그런데 역함수 $g(x)$를 우리가 직접 구할 수는 없으므로 이 방정식을 $f(x)$에 관한 방정식으로 바꿔줘야만 합니다.
$f(x)$는 일대일대응이고, 치역이 실수 전체이므로
닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 두 방정식

$$g(x)=2x,\ g(x)=-2x+2$$

의 실근을 구하는 것을 x 대신 $f(x)$를 대입하여
닫힌 구간 $[g(0),\ g(1)]$[1]에서 두 방정식

$$g(f(x))=2f(x),\ g(f(x))=-2f(x)+2$$
$$\Leftrightarrow 2f(x)-x=0,\ 2f(x)+x-2=0\ \ (\because\ g(f(x))=x)$$

중 적어도 하나가 실근을 갖도록 해주는 것으로 변형할 수 있습니다.[2]

(1) 닫힌 구간 $[g(0),\ g(1)]$에서 방정식 $2f(x)-x=0$이 실근을 갖는 경우

함수 $p(x)=2f(x)-x$라 하면, $p'(x)>0$이고, 사이값 정리에 의하여

$$p(g(0))\times p(g(1))\le 0\ \Rightarrow\ p(g(0))\le 0,\ p(g(1))\ge 0$$

이면, 방정식의 실근이 닫힌 구간 $[g(0),\ g(1)]$에 존재하게 됩니다.

$$(2f(g(0))-g(0))\le 0,\ (2f(g(1))-g(1))\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (-g(0))\le 0,\ (2-g(1))\ge 0$$
$$\Leftrightarrow g(0)\ge 0,\ (g(1)-2)\le 0$$

그런데 함수 $f(x)$가 $f'(x)=3(x-1)^2+3>0$이므로 증가합니다. 즉, 그 역함수 $g(x)$도 증가하고

$$0\le g(0)<g(1)\le 2$$

를 만족시켜야 함을 알 수 있습니다.

(2) 닫힌 구간 $[g(0),\ g(1)]$에서 방정식 $2f(x)+x-2=0$이 실근을 갖는 경우

함수 $q(x)=2f(x)+x-2$라 하면, $q'(x)>0$이므로 사이값 정리에 의하여

$$q(g(0))\times q(g(1))\le 0\ \Rightarrow\ q(g(0))\le 0,\ q(g(1))\ge 0$$

이면 방정식의 실근이 닫힌 구간 $[g(0),\ g(1)]$에 존재하게 됩니다.

$$(2f(g(0))+g(0)-2)\le 0,\ (2f(g(1))+g(1)-2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (g(0)-2)\le 0,\ (2+g(1)-2)\ge 0$$

1) x 대신 $f(x)$를 대입한 것입니다. 즉, $f(\alpha)=0$에서 α의 값($g(0)$)이 구간의 첫 번째 값이 돼야 하겠죠?
2) 사실 이 과정은 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $y=x$대칭이기 때문에 방정식들의 양변의 함수들을 모두 $y=x$에 대하여 대칭시켰다고 생각해도 됩니다.

즉,

$$g(0) \le 2,\ g(1) \ge 0$$

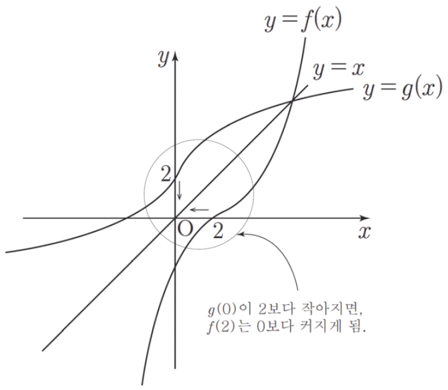
을 만족시켜야 합니다.

따라서 (1)과 (2)를 종합하면,

$$g(0) \le 2,\ g(1) \ge 0$$

만 만족시키면 항상 실근이 존재하게 됨을 알 수 있습니다.

그런데 $g(0) \le 2$이라는 것은 $f(x)$의 입장에서는 $f(2) \ge 0$을 만족시키는 것과 같고 $g(1) \ge 0$이라는 것은 $f(x)$의 입장에서는 $f(0) \le 1$을 만족시키는 것과 같습니다.[3)]



따라서 $f(2)=8+k \ge 0$, $f(0)=k \le 1$이므로

$$\therefore\ -8 \le k \le 1$$

즉, $m^2+M^2=65$가 됩니다.

문항 comment

$y=x$에 대하여 대칭이도록 만들었다는 것이 헷갈릴 수 있는데, 그림을 보면서 이해하면 쉬울 것입니다. 사이값 정리, 역함수의 성질, 미분법 등등 여러 가지 요소가 복합되어 역대급 미분 문항이 하나 탄생한 것 같습니다. 이렇게 어려운 미적분 문제를 앞으로 대비하기 위해서는 더욱 더 기본적인 논리에 탄탄해야 함을 잊지 마세요.

답 : 65

07 [2017 06 평가원]

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오.

토픽 6 - VIP 추가 해설

7.

함수의 최대/최소를 구하고 있으므로 $f'(x)$의 부호를 따져야 합니다.

$$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(3x-a)(x+a)$$

이고 $a>0$이므로 $f(x)$는 $x=-a$에서 극대, $x=\frac{a}{3}$에서 극소를 가집니다.

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=2-\frac{5}{27}a^3,\ f(-a)=a^3+2$$

입니다. 이제 이 함수가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 최솟값 $\frac{14}{27}$을 갖는다는 조건을 사용해야 하는데, 구간에서의 최대/최소는 극대/극소점과 양 끝값만 구하면 된다고 배웠죠?

함수가 구간 $\left[-a,\ \frac{a}{3}\right]$에서 감소, 구간 $\left[\frac{a}{3},\ a\right]$에서 증가하므로 최소는 $f\left(\frac{a}{3}\right)$이고

최대는 $f(-a)$와 $f(a)$ 중 큰 값입니다. $f(a)=a^3+2$이니까 $f(-a)=f(a)$네요?

$$\therefore M=a^3+2$$

따라서

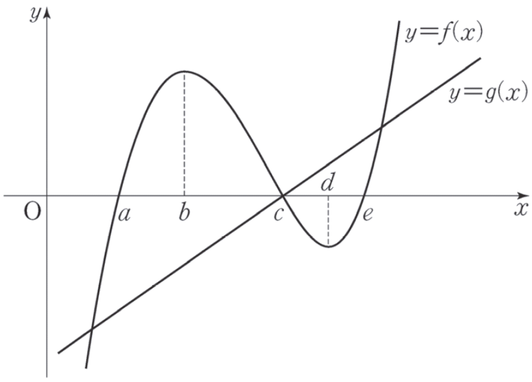
$$f\left(\frac{a}{3}\right)=2-\frac{5}{27}a^3=\frac{14}{27},\ f(-a)=a^3+2=M$$

$a^3=8$이므로 $a=2$, $M=3a^3+2=26$이고, $M+a=28$입니다.

답 : 28

14 [2017 06 평가원]

삼차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(b)=f'(d)=0$이다.



함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=p$와 $x=q$에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단, $p<q$)

① $a<p<b$이고 $c<q<d$
② $a<p<b$이고 $d<q<e$
③ $b<p<c$이고 $c<q<d$
④ $b<p<c$이고 $d<q<e$
⑤ $c<p<d$이고 $d<q<e$

14.

함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

입니다. 이제 주어진 문자들을 대입해봅시다.

$$h'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)<0$$
$$h'(b)=f'(b)g(b)+f(b)g'(b)>0$$
$$h'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c)=0$$
$$h'(d)=f'(d)g(d)+f(d)g'(d)<0$$
$$h'(e)=f'(e)g(e)+f(e)g'(e)>0$$

임을 알 수 있고, $h'(x)$는 삼차함수이므로 사이값 정리를 이용하면

$$a<p<b,\ d<q<e,\ h'(p)=h'(q)=0$$

인 p, q가 존재합니다. 또한, 부호변화도 각각 $-$에서 $+$로 변하므로 극소입니다.

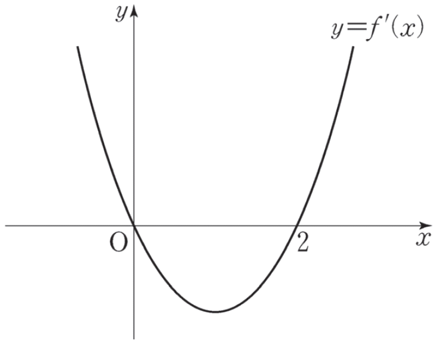
문항 comment

극대와 극소를 판별할 때는 다른 생각 말고 도함수의 부호변화에만 집중하세요.

답 : ②

11 [2017 06 평가원]

삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보 기〉

ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.
ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.
ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

토픽 7 - VIP 추가 해설

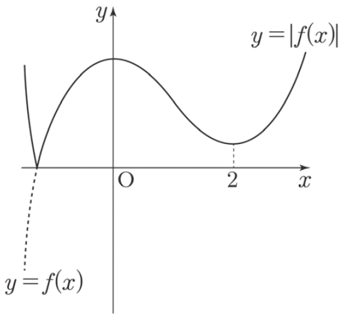
11.

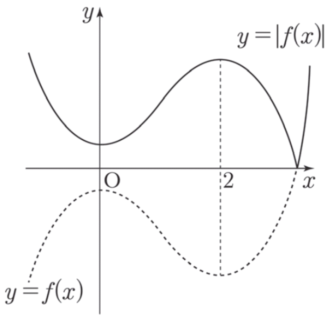
ㄱ. (참)

구간 $(0,\ 2)$에서 $f'(x)$가 음수이므로 $f(x)$는 구간 $(0,\ 2)$에서 감소합니다.
따라서 $f(2) < f(0)$이고, 조건에서 $f(0) < 0$이므로 $f(2) < f(0) < 0$이 성립합니다.
이는 $|f(0)| < |f(2)|$를 의미합니다.

ㄴ. (참)

$f(2) < f(0)$인데 $f(0)f(2) \geq 0$이면 $0 \leq f(2) < f(0)$ 혹은 $f(2) < f(0) \leq 0$이 성립합니다. 삼차함수 $f(x)$의 극대가 $x=0$, 극소가 $x=2$에서 발생하므로 $y=f(x)$의 그래프를 추론하면 아래와 같습니다.

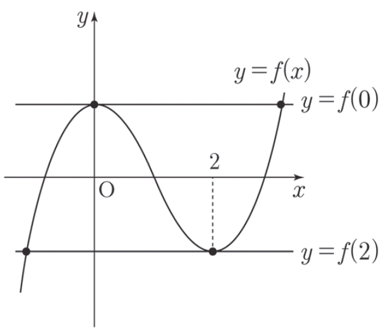




두 경우 모두 $y=|f(x)|$의 극소점의 개수가 2임을 알 수 있습니다.

ㄷ. (참)

방정식 $|f(x)|=f(0)$의 근의 개수를 구하는데, 일단 $f(0)<0$이면 근이 존재할 수 없으므로 $f(0)$의 부호를 구해야 합니다. 그런데 $f(2)<f(0)$이고 $f(0)+f(2)=0$이므로 $-f(0)=f(2)<0<f(0)$임을 알 수 있습니다.
따라서 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 근의 개수는 두 방정식 $f(x)=f(0)$, $f(x)=-f(0)=f(2)$의 근의 개수의 합과 같습니다.
삼차함수가 $x=0$과 $x=2$에서 각각 극대와 극소를 가지므로 두 방정식의 근의 개수가 2고, 두 경우 $f(x)$의 값이 같을 수 없으므로 겹치는 근이 존재하지 않습니다. 따라서 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 근의 개수는 4입니다.



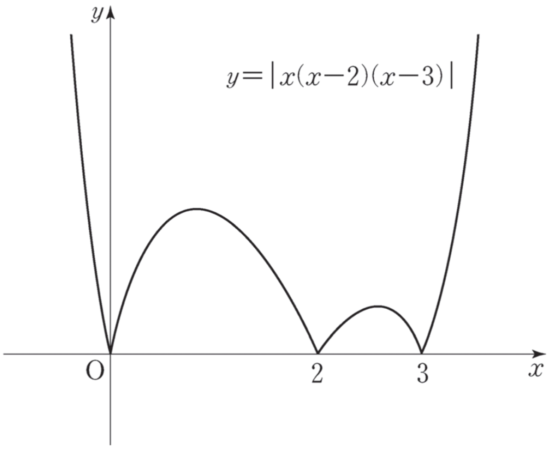
답 : ⑤

03 [2017 09 평가원]

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



토픽 8 - VIP 추가 해설

3.

풀이1. 교과서적 이론으로 직관을 배제한 풀이

함수 $g(x)$는 다음과 같습니다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\le |x(x-2)(x-3)|) \\ |x(x-2)(x-3)| & (f(x)\ge |x(x-2)(x-3)|) \end{cases}$$

그런데 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다는 것은 곧 방정식

$$f(x)=|x(x-2)(x-3)|$$

을 만족시키는 $x=\alpha$에서만 잘 따져주면 된다는 것을 의미합니다.
(쉽게 표현하면 실수 전체의 집합에서 $f(x)\le |x(x-2)(x-3)|$가 성립한다면
항상 $g(x)=f(x)$으로 미분가능하기 때문에 두 함수의 부호가 바뀌지 않는다는 것입니다.[4])

또한, 방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=0,\ 2,\ 3$이므로 다음과 같이 함수를 가정할 수 있습니다.
$(k<0)$

$$f(x)=kx^2(x-2)(x-3) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{case\ 1}$$
$$f(x)=kx(x-2)^2(x-3) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{case\ 2}$$
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)^2 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{case\ 3}$$

그리고 구하려는 값 $f(1)$을 구해보면

$\boxed{case\ 1}$: $f(1)=2k$

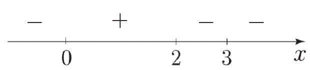
$\boxed{case\ 2}$: $f(1)=-2k$

$\boxed{case\ 3}$: $f(1)=-4k$

이고, k는 음수이니 우선 $\boxed{case\ 1}$은 날려버립시다. 또한, 같은 k값일 때, $\boxed{case\ 3}$의 식의 값이 가장 크므로 $\boxed{case\ 3}$부터 조사를 시작해봅시다.

$\boxed{case\ 3}$ - k가 음수일 때, $f(x)$의 부호변화는 다음과 같습니다.

* $f(x)$의 부호



우리의 목표는 $f(x)=|x(x-2)(x-3)|$을 만족시키는 x의 값을 찾는 것입니다.
그런데 $x<0,\ 2<x<3,\ x>3$에서 $f(x)<0$입니다.

즉, $f(x)\le |x(x-2)(x-3)|$이 성립하므로 $x<0,\ x>2$에서는 k의 값에 관계없이 항상 $g(x)$가 미분가능할 수밖에 없습니다. ($g(x)=f(x)$로 변하지 않기 때문)
그러므로 우리는 $0\le x\le 2$에서 함수 $g(x)$만 따져주면 됩니다.

$0\le x\le 2$일 때, $|x(x-2)(x-3)|=-x(x-2)(x-3)$이므로

$$kx(x-2)(x-3)^2=-x(x-2)(x-3)$$
$$\Leftrightarrow\ x(x-2)(x-3)(kx-3k-1)=0$$

4) 사실 부호가 바뀌어도 $g(x)$가 미분가능하게 만들 수 있으나, 그러려면 삼중근이 필요하기 때문에 위와 같이 이미 0, 2, 3이라는 서로 다른 세 실근이 존재하는 경우에는 불가능합니다.

여기서 $0 \le x \le 2$에 속하는 것은 $x=0$, $x=2$, $x=\frac{3k+1}{k}$인데, $x=3+\frac{1}{k}$은 제쳐두고 우선 $x=0$, $x=2$를 조사해보도록 하겠습니다.

$$f'(x)=k(x-2)(x-3)^2+kx(x-3)^2+2kx(x-2)(x-3)$$ [5]
$$\Rightarrow f'(0)=-18k,\ f'(2)=2k$$

$$y'=-(x-2)(x-3)-x(x-3)-x(x-2)$$
$$\Rightarrow x=0\text{일 때, }-6,\ x=2\text{일 때, }2$$

그런데 아까 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 실수 전체의 집합에서 $f(x) \le |x(x-2)(x-3)|$를 만족시켜야 된다고 했습니다. 그런데 예를 들어

$$h_1(x)=f(x)-x(x-2)(x-3)=0$$ [6]

이 되는 $x=0$에서 $h_1{}'(0)>0$이라면 반드시 $h_1(x)>0$인 x가 $x>0$에서 존재할 수밖에 없습니다.[7]

따라서 $h_1{}'(0)$이어야 하고, $f'(0)-6=-18k-6 \le 0$에서 $k \ge -\frac{1}{3}$임을 알 수 있습니다.

마찬가지의 논리로

$$f(x)-x(x-2)(x-3)=0$$

이 되는 $x=2$에서 $h_1{}'(2)<0$이라면 반드시 $h_1(x)>0$인 x가 $x<2$에서 존재할 수밖에 없습니다.

따라서 $h_1{}'(2) \ge 0$이어야 하고, $f'(2)+2=2k+2 \ge 0$에서 $k \ge -1$임을 알 수 있습니다.

따라서 $\boxed{case\ 3}$에서는 $f(1)=-4k \le \frac{4}{3}$이 되므로 $f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$입니다.

라고 하면 여전히 비약이 생깁니다. $x=3+\frac{1}{k}$에 대한 부분을 다루지 않았기 때문입니다. 그런데 우리가 굳이 이것을 따질 필요가 없는 이유가 있습니다. 왜냐하면 $k \ge -\frac{1}{3}$에서 $k=-\frac{1}{3}$이 되는 상황이 $f(1)$이 최대가 되는 상황인데, 이 때, $3+\frac{1}{k}=0$이 되기 때문에 $0<x<2$사이에 $h_1(x)=0$이 되는 부분이 생기지 않기 때문입니다.

따라서 최대인 상황이 존재함을 밝혔으므로 이 풀이는 비약이 없습니다.

여기서 객관식 보기를 보니 $\frac{4}{3}$이 있습니다. 평가원은 저격을 거의 하지 않으니 그냥 답을 찍고 넘어가면 되지만, 찝찝하니까 $\boxed{case\ 2}$도 해봅시다.

5) 여기서 $(x-3)^2$을 미분하는 것은 굳이 전개할 필요 없이 $(x-3)(x-3)$을 곱미분 하는 것인데, 뭘 먼저하든 똑같으니 2를 앞에 곱해준 것이다.

6) $h_1(x)$를 정의한 이유는, $x=0+$, $x=2-$에서 $f(x) \le x(x-2)(x-3)$를 만족하도록 하는 k의 범위를 구하기 위해서이다.

7) 미분계수의 정의로 유도할 수 있으나, 생략하겠다.

$\boxed{case\ 2}$ – k가 음수일 때, $f(x)$의 부호변화는 다음과 같습니다.

* $f(x)$의 부호

x		0		2		3	
$f(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$

$f(x)$가 $x<0$, $x>3$에서 $f(x) \le 0$이므로 $x<0$, $x>3$일 때, $g(x)=f(x)$입니다.
따라서 우리는 $0 \le x \le 3$일 때만 $g(x)$의 미분가능성을 조사해주면 됩니다.

$0 \le x \le 2$일 때,

$$f(x)=x(x-2)(x-3)$$

을 만족하는 x를 찾으면

$$kx(x-2)^2(x-3)=x(x-2)(x-3)$$
$$\Leftrightarrow\ x(x-2)(x-3)(kx-2k-1)=0$$

에서 $x=0,\ 2,\ \dfrac{2k+1}{k}$인데, 우선 $x=0,\ 2$일 때만 조사해줍시다.

$$h_2(x)=kx(x-2)^2(x-3)+x(x-2)(x-3)$$

에 대하여 $h_2{}'(0)>0$이면 $h_2(x)>0$인 x가 $x>0$에 존재합니다. 따라서 $h_2{}'(0) \le 0$입니다.
$h_2{}'(2)<0$이면 $h_2(x)>0$인 x가 $x<2$에 존재합니다. 따라서 $h_2{}'(2) \ge 0$입니다.
이것을 계산해보면, $k \ge -\dfrac{1}{2}$을 얻을 수 있습니다.

앞의 논리와 동일하게 $2 \le x \le 3$일 때,

$$f(x)=x(x-2)(x-3)$$

을 만족하는 x를 찾으면

$$kx(x-2)^2(x-3)=x(x-2)(x-3)$$
$$\Leftrightarrow\ x(x-2)(x-3)(kx-2k+1)=0$$

에서 $x=2,\ 3,\ \dfrac{2k-1}{k}$인데, $x=2-\dfrac{1}{k}$은 우선 내버려두고 $x=2,\ 3$일 때만 조사해줍니다.

$$h_3(x)=kx(x-2)^2(x-3)-x(x-2)(x-3)$$

에 대하여 $h_3{}'(2)>0$이면 $h_3(x)>0$인 x가 $x>2$에 존재합니다. 따라서 $h_3{}'(2) \le 0$입니다.
$h_3{}'(3)<0$이면 $h_3(x)>0$인 x가 $x<3$에 존재합니다. 따라서 $h_3{}'(3) \ge 0$입니다.
이것을 계산해보면, $k \ge -1$을 얻습니다.

따라서 종합하면 $k \ge -\dfrac{1}{2}$을 얻을 수 있는데, $\boxed{case\ 3}$에서와 마찬가지로 $k=-\dfrac{1}{2}$일 때, $2+\dfrac{1}{k}=0$이므로 $0<x<2$사이에 $h_3(x)=0$이 되는 x가 존재하지 않습니다.
또한, $2-\dfrac{1}{k}=4$이므로 $2<x<3$사이에 $h_3(x)=0$이 되는 x가 존재하지 않습니다.
따라서 $f(1)=-2k \le 1$이므로 $\boxed{case\ 2}$에서 $f(1)$의 최댓값은 1입니다.

따라서 $f(1)$의 최댓값은 $\boxed{case\ 3}$일 때, $\dfrac{4}{3}$가 됩니다.

풀이2. 인수정리의 활용 및 부호표를 이용한 풀이

구간이 나누어져 있는 함수의 미분가능성은 절댓값 함수의 미분가능성과 별로 다를 것이 없는데 그 이유는 다음과 같습니다.

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (g(x)\ge h(x)) \\ h(x) & (g(x)<h(x)) \end{cases}$$ [8]

라 해봅시다. 그러면 이 함수가 미분가능하려면 어떻게 해야 할까요?

바로 $g(x)=h(x)$인 x를 a라고 했을 때,

$g(a)=h(a)$를 만족시키는 a에 대하여 $g'(a)=h'(a)$이어야 합니다. 그런데 이것을 $g(x)-h(x)$라는 빼기함수를 만들어 생각해보면

$$k(x)=f(x)-h(x)=\begin{cases} g(x)-h(x) & (g(x)-h(x)\ge 0) \\ 0 & (g(x)-h(x)<0) \end{cases}$$

이 되고, 즉, $k(x)$의 미분가능성은 $|f(x)-h(x)|$의 미분가능성과 동일하게 됩니다.

결론을 내리자면 다음과 같습니다.

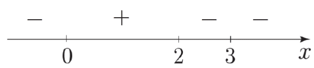
> 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (g(x)\ge h(x)) \\ h(x) & (g(x)<h(x)) \end{cases}$의 미분가능성은 곧 $|g(x)-h(x)|$의 미분가능성을 따지는 것과 같다.

그럼 이 사실을 가지고 어떻게 문제를 해결할 수 있는지 살펴봅시다.

풀이1의 논리에서 $\boxed{case\ 3}$일 때를 먼저 가져와봅시다.

$\boxed{case\ 3}$ – k가 음수일 때, $f(x)$의 부호변화는 다음과 같습니다.

* $f(x)$의 부호



우리의 목표는 $f(x)=|x(x-2)(x-3)|$을 만족시키는 x의 값을 찾는 것입니다.

그런데 $x<0,\ 2<x<3,\ x>3$에서 $f(x)<0$입니다.

즉, $f(x)\le|x(x-2)(x-3)|$이 성립하므로 $x<0,\ x>2$에서는 k의 값에 관계없이 항상 $g(x)$가 미분가능할 수밖에 없습니다. ($g(x)=f(x)$로 변하지 않기 때문)

그러므로 우리는 $0\le x\le 2$에서 함수 $g(x)$만 따져주면 됩니다.

$0\le x\le 2$일 때, $|x(x-2)(x-3)|=-x(x-2)(x-3)$이므로

$$kx(x-2)(x-3)^2=-x(x-2)(x-3)$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)(x-3)(kx-3k-1)=0$$

8) 단, 구간 분할 함수들의 미분가능성은 전제되어 있다고 가정한다.

여기까지는 기존의 풀이와 동일합니다. 하지만, 미분계수를 이용한다는 것을 떠올리기가 힘든 학생이 있을 수 있습니다. 그런데 우리가 방금 증명한 따름정리를 이용한다고 생각해봅시다.
우리는 빼기함수인

$$h_1(x)=f(x)-\{-x(x-2)(x-3)\}=x(x-2)(x-3)(kx-3k-1)$$

가 $0 \le x \le 2$ 에서만 미분가능하게 만들어주면 됩니다. 그런데, $\alpha=\frac{3k+1}{k}=3+\frac{1}{k}<3$이고,

만약 $0<\alpha<2$라면 $h_{1(x)}$가 $0 \le x \le 2$에서 미분가능하고 $h_1(\alpha)=0$이므로 $h_1(x)$가$(x-\alpha)^2$를 인수로 가지게 됩니다. 그런데 그렇게 되면 $h_1(x)$는 오차함수[9]가 되므로 모순입니다. 따라서 다음 조건을 만족시켜야 합니다.

$$3+\frac{1}{k} \le 0, \qquad 3+\frac{1}{k} \ge 2$$

즉, 이 부등식을 풀면, $k \ge -\frac{1}{3}$임을 알 수 있으므로 $f(1)$의 최댓값은 $k=-\frac{1}{3}$일 때 $\frac{4}{3}$입니다.
이렇게 '인수정리'를 통한 따름정리로 간단하게 문제를 풀 수 있습니다.
마찬가지의 논리를 $\boxed{case\ 2}$에 적용시켜봅시다.

$0 \le x \le 2$일 때, 함수

$$h_2(x)=f(x)-x(x-2)(x-3)=x(x-2)(x-3)(kx-2k-1)=0$$

가 미분가능하려면 $\frac{2k+1}{k}=2+\frac{1}{k}<2$이고, 앞의 논리 $\boxed{case\ 3}$과 동일하게

$$2+\frac{1}{k} \le 0 \Rightarrow k \ge -\frac{1}{2}$$

을 얻을 수 있습니다. 마찬가지로 $2 \le x \le 3$일 때, 함수

$$h_3(x)=f(x)+x(x-2)(x-3)=x(x-2)(x-3)(kx-2k+1)$$

가 미분가능하려면 $\frac{2k-1}{k}=2-\frac{1}{k}>2$이고, 앞의 논리와 동일하게

$$2-\frac{1}{k} \ge 3 \Rightarrow k \ge -1$$

을 얻을 수 있습니다. 따라서 $\boxed{case\ 2}$일 때, $f(1)$의 최댓값은 $k=-\frac{1}{2}$일 때, 1이 됩니다.

문항 comment

굉장히 까다로운 문항이고, 시중에 널리 퍼져있는 직관적으로 답을 내는 풀이는 싣지 않았습니다. 논리적으로 푸는 것을 반드시 연습해보시고, 특히 두 번째 풀이는 여러 번 연습해서 체화하도록 하세요.

답 : ②

9) Error Function이 아닌 최고차항의 차수가 5인 다항함수를 의미합니다.

11 [2017 09 평가원]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

토픽 9 - VIP 추가 해설

11.

삼차함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극값을 가지므로 $f'(-2)=0$임을 알 수 있습니다.
한편, $f'(x)$는 이차함수인데, $f'(-3)=f'(3)$이라는 뜻은, 함수 $y=f'(x)$의 대칭축이 $x=0$임을 의미합니다.
따라서 $f'(2)=0$이고, $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면,

$$f'(x)=3a(x-2)(x+2)$$

이고, $x=-2$에서 극댓값을 가져야 하므로 $a>0$임을 알 수 있습니다.

ㄱ. (참)

$y=f'(x)$는 최고차항의 계수가 $3a$인 양수이므로 $x=0$에서 최솟값을 가집니다.

ㄴ. (참)

$f'(2)=0$이고 삼차함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가집니다.
즉, 방정식 $f(x)=f(2)$의 서로 다른 실근의 개수는 2입니다.

ㄷ. (참)

$$f'(x)=3ax^2-12a$$

에서 부정적분 해주면,

$$f(x)=ax^3-12ax+C$$

입니다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면,
방정식

$$f(x)-g(x)=0$$

의 모든 실근의 합은 0이고, $x=-1$에서 중근을 가집니다. 즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1)+(-1)+\alpha=0 \qquad \Leftrightarrow \quad \alpha=2$$

이므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 $x=-1$이 아닌 실근은 $x=2$가 됩니다.

답 : ⑤

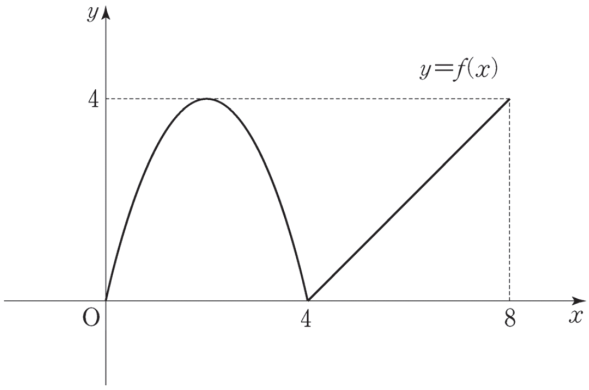
12 [2017 09 평가원]

구간 $[0, 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \leq x < 4) \\ x-4 & (4 \leq x \leq 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a\,(0 \leq a \leq 4)$에 대하여 $\int_{a}^{a+4} f(x)\,dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



12.

$\int_{a}^{a+4} f(x)\,dx$는 정적분으로 표시되어 있지만, 사실 a에 관한 함수입니다.

따라서 $g(a)=\int_{a}^{a+4} f(x)\,dx$라 하면

$$g'(a)=f(a+4)-f(a)=0$$

에서

$$(a+4)-4+a(a-4)=a^2-3a=a(a-3)$$

이므로 $a=3$에서 $g(a)$는 극솟값이자 최솟값 $\int_{3}^{7} f(x)\,dx$를 갖습니다.

$$\therefore \int_{3}^{7} f(x)\,dx=\int_{3}^{4}(-x^2+4x)\,dx+\int_{4}^{7}(x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_3^4+\frac{9}{2}=\frac{37}{6}$$

$$\therefore\ p+q=43$$

문항 comment

$f(a+4)$를 미분하면 $f'(a+4)$가 된다는 것은 사실 이과 과정의 합성함수의 미분법으로 쉽게 설명할 수 있지만, 이해할 수 있는 더 간단한 방법이 있습니다. $f(a)$의 그래프를 x축의 양의 방향으로 -4만큼 평행 이동한 그래프가 $f(a+4)$이고, 그 도함수 역시 x축의 양의 방향으로 -4만큼 평행 이동되기 때문에 그 도함수를 $f'(a+4)$라고 적을 수 있게 되는 것입니다.

답 : 43

토픽 10 - VIP 추가 문제

01 [2017 09 평가원]

함수 $f(x) = 4x^2 + 6x + 32$에 대하여

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

의 값을 구하시오.

토픽 10 - VIP 추가 해설

1.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 xf(x)\,dx \\ &= \int_0^1 (4x^3+6x^2+32x)\,dx \\ &= \left[x^4+2x^3+16x^2\right]_0^1 \\ &= 19\end{aligned}$$

답 : 19

15 [2017 수능]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)

(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)|\,dx = f(t)+f(0)$$

이다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $\int_0^k f'(x)\,dx < 0$

ㄴ. $0 < k \leq 1$

ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ, ㄷ

토픽 11 - VIP 추가 해설

15.

최고차항의 계수가 양수 m인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 (가)조건을 이용하면

$f'(x)=3mx(x-k)$ (단, $x=k$에서 극소여야 하므로 $k>0$)

임을 알 수 있습니다.

1보다 큰 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)|\,dx = f(t)+f(0)$$

가 성립한다는 것을 다시 해석해봅시다.
우리는 앞에서 $f'(x)=3mx(x-k)$ (단, m, $k>0$)임을 알았습니다.
따라서 $f'(x)$는 구간 $(0,\ k)$에서 $f'(x)<0$입니다. 따라서

$$\int_0^k |f'(x)|\,dx = -\int_0^k f'(x)\,dx = -f(k)+f(0)$$

임을 의미합니다. 또한, $x>k$이면, $f'(x)>0$이므로

$$\int_k^t |f'(x)|\,dx = \int_k^t f'(x)\,dx = f(t)-f(k) \ \text{(단, } k<t\text{)}$$

임을 알 수 있습니다.

ㄱ. (참)

$f(k)$는 극솟값, $f(0)$은 극댓값이므로

$$\int_0^k f'(x)\,dx = f(k)-f(0)<0$$

입니다.

ㄴ. (참)

1보다 큰 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)|\,dx = f(t)+f(0) \equiv f(t)-f(k)-f(k)+f(0)$$

가 성립하려면, 반드시

$$\int_k^t |f'(x)|\,dx = \int_k^t f'(x)\,dx = f(t)-f(k) \ \text{(단, } k<t\text{)}$$

가 성립하면서, $f(k)=0$이어야 합니다.
따라서 $0<k\le 1$이어야 합니다.

ㄷ. (참)

ㄴ에서 $f(k)=0$임을 알았고, $f(k)$는 극솟값이므로 $f(x)$는 $x=k$에서 극솟값 0을 가집니다.

답 : ⑤

Stage 2, 토픽 13 추가 문제

[2017 수능 변형]

Stage 1 관련 Topic

Topic 6, 8

12. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$와 두 집합

$A=\{k\,|$ 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극값을 가진다. $\}$

$B=\{k\,|$ 함수 $f(x)(x-a)$가 $x=k$에서 극값을 가진다. $\}$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $n(B)+M$의 값을 구하시오.

(가) $a\in A$이고, $f(a)=f(-a)=M$ $(M>0)$이다. (나) $A\cap B=\{-2\}$

Stage 2, 토픽 13 추가 해설

12.

함수 $y=f(x)-M$ 역시 최고차항이 -1인 삼차함수이고, 방정식 $f(x)-M=0$의 근이 $x=-a,\ a$입니다. 한편, $x=a$에서 함수가 극값을 가지므로

$$f(x)=-(x+a)(x-a)^2+M$$

로 둘 수 있습니다. 또, $(x-a)f(x)=g(x)$라 하면,

$$g(x)=-(x+a)^2(x-a)^2+M(x+a)$$

임을 알 수 있습니다. 조건 (나), (다)를 이용하기 위해 두 함수를 미분해봅시다.

$$f'(x)=-3(x-a)\left(x+\frac{a}{3}\right)$$

$$g'(x)=-4x(x-a)(x+a)+M$$

일단, $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x는 $x=a,\ -\frac{a}{3}$입니다.

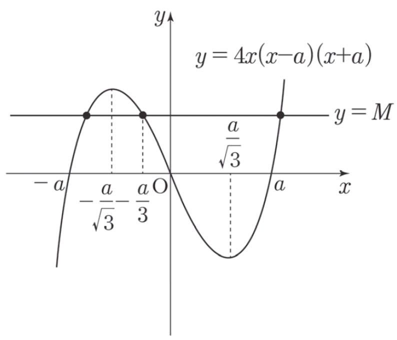
이제 $g'(x)=0$이면서 $g'(x)$의 부호가 변하는 x를 찾아야 합니다. 방정식

$$4x(x-a)(x+a)=M$$

의 실근 중 $g'(x)$의 부호가 변하는 것이 집합 B의 원소가 되는데, 곡선

$$y=4x(x-a)(x+a)$$

의 그래프를 그리면 $y'=12\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$이므로 다음과 같습니다.



즉, $A\cap B=\{-2\}$이므로 $-\frac{a}{3}=-2 \Leftrightarrow a=6$을 만족시켜야 합니다.

$$\therefore\ M=256,\ n(B)=3,\ m+n(B)=259$$

문항 comment

간단하게 인수정리를 이용하여 함수를 가정하고, 그것을 이용하여 극값의 개수를 구할 수 있는 지를 물어보고 있습니다. 원본 문항은 이과의 2017학년도 수능 30번인데, 그 문제에서 가장 미적분I 내용을 쉽게 학습할 수 있는 부분만을 뽑아 만든 문제라고 생각하시면 됩니다. 기출문제와 풀이방법이 유사한 것은 아닙니다.

답 : 259

Stage 2, 토픽 13 추가 문제

[2017 수능 변형]

Stage 1 관련 Topic

Topic 8

13. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(0)$의 최솟값은? (단, $f'(0)>0$)

> (가) $\dfrac{f(0)}{2}=f'(0)=\dfrac{f(2)}{4}=f'(2)$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 극값의 개수는 1이다.

① $\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$　② $\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$　③ $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

④ $\dfrac{8}{9}\sqrt{3}$　⑤ $\dfrac{10}{9}\sqrt{3}$

Stage 2, 토픽 13 추가 해설

13.

Sol)

가 조건의 해석이 난해하지만, 차근차근 생각해봅시다.

$$\frac{f(0)-0}{0-(-2)}=f'(0)=\frac{f(2)-0}{2-(-2)}=f'(2)=M$$

이라 하면, 이 M은 다음과 같이 해석할 수 있습니다.

'두 점 $(0,\ f(0))$, $(-2,\ 0)$사이의 평균변화율이면서 $f'(0)$'

'두 점 $(2,\ f(2))$, $(-2,\ 0)$사이의 평균변화율이면서 $f'(2)$'

즉, 기울기를 M으로 하는 직선 $y=M(x+2)$에 대하여 $f(x)$와의 빼기함수

$$f(x)-M(x+2)$$

를 정의하고 $g(x)=f(x)-M(x+2)$라 하면, $g'(x)=f'(x)-M$ 이므로

$$g(0)=g(2)=0$$
$$g'(0)=g'(2)=0$$

이 성립합니다. 따라서 인수정리를 이용하면

$$\therefore\ f(x)-M(x+2)=-x^2(x-2)^2$$

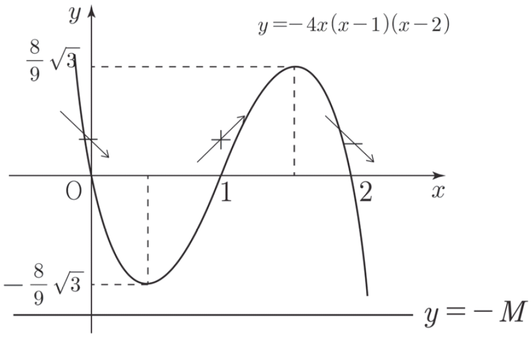
이제 (나)조건을 이용해봅시다.

$$f'(x)=-4x(x-1)(x-2)+M$$

의 부호변화가 단 한번만 일어나야 하는데, 개형을 모르니 $y=-4x(x-1)(x-2)$의 개형을 그려봅시다.

$$y'=-12x^2+24x-8=-4(3x^2-6x+2)=-12\left(x-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\left(x+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

이고, 부호표를 이용하여 개형을 추론하면,



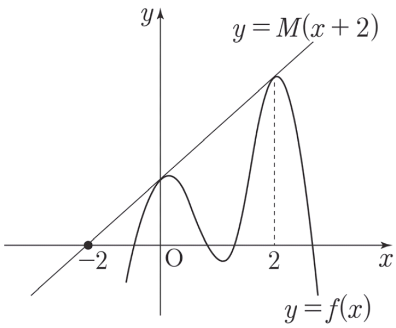
따라서 $f(x)$ 의 극값의 개수가 1개이기 위해선,

$$-M \leq -\frac{8}{9}\sqrt{3} \iff M \geq \frac{8}{9}\sqrt{3}$$

이므로 $f'(0)$ 의 최솟값 또한 $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ 이 됩니다.

문항 comment

문제 상황을 다시 생각해보면, 점 $(-2,\ 0)$에서 함수 $y=f(x)$에 그은 공통접선에 관련된 문항임을 알 수 있습니다. 그림으로 확인해보면,



위와 같은데, 사실 보자마자 다음과 같은 상황을 생각했다면 당신은 천재입니다.

이 문제는 2017학년도 수능 가형 30번 문제를 변형했고, 그 상황을 토대로 발상만 따왔기 때문에 굉장히 발상적이라고 생각할 수 있습니다. 하지만, 이 문제를 계산으로 밀어붙여서 풀 수 있는 방법도 있긴 합니다.

$f(x)=-x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

라고 한 뒤에

$$\frac{f(0)}{2}=f'(0)=\frac{f(2)}{4}=f'(2)$$

임을 이용하면, 하나의 문자로 정리할 수 있게 되어, (나) 조건을 이용할 수 있게 되겠지요?

답 : ④