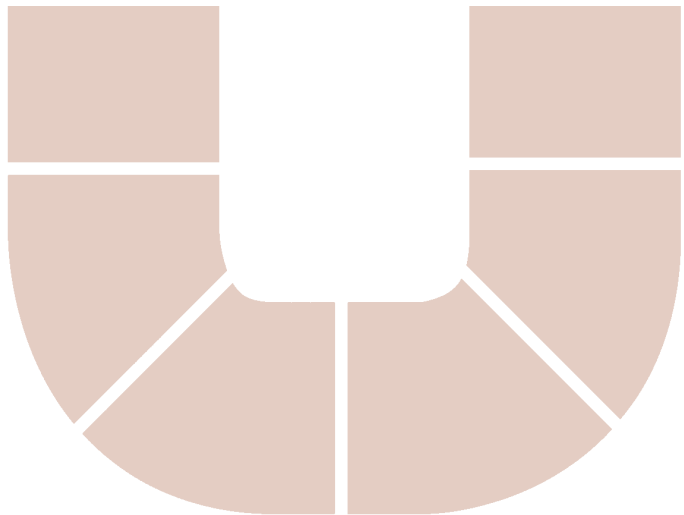
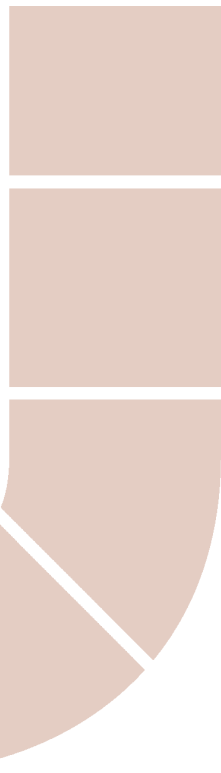


선입견을 깨고

수학 바로 보기

미적분 II

김현우 | 백경린



smart is sexy

Orbi



‘수학 바로 보기’ 는..

선입견은 우리의 감각을 가로막는다!

누구나 어렸을 때, 수학의 기초 개념인 ‘덧셈’ 을 열심히 연습했던 기억이 있을 것이다.

$1+2=3$, $3+7=10$, $10+10=20$, ...

그런데, 이러한 개념을 반복적으로 훈련하다 보면 자신도 모르게 3, 10, 20과 같은 각각의 수만을 하나의 단위로 인식하는 선입견에 빠지게 된다. 그래서 ‘3’이라는 수를 (역으로)

‘ $1+2$ ’또는 ‘ $2+1$ ’

과 같이 새로운 표현 단위로 나타낼 수 있다는 사실에는 매우 무감각해지기 쉽다.

허나, 단단한 바위 틈에서도 새싹이 피어나듯이 무감각한 선입견을 깨뜨린 천재소년이 있었으니, 그가 바로 가우스(Carl F. Gauss; 1777~1855)다. 열 살의 가우스는 감각적으로

‘ $1+2+3+\dots+99+100$ ’또는 ‘ $100+99+\dots+3+2+1$ ’

이 하나의 수 ‘S’를 나타내는 새로운 표현 단위임을 인식하였다. 그 결과, 새로운 표현 방식에 드러난 수 ‘S’의 규칙성을 쉽게 확인할 수 있었던 것이다.

$$1+2+3+\dots+99+100=S$$

$$100+99+\dots+3+2+1=S$$

$$\therefore 2S=101 \times 100$$

선입견은 감각을 살리는 도구가 되어야 한다!

특히, 우리에게 어렵고 복잡해 보이는 문제들 속에는 어김없이 선입견이 작용하고 있을 가능성이 크다. 이를 극복하기 위해 무작정 어려운 문제를 많이 푸는 것은 오히려 선입견을 더욱 강화시키기도 한다.

그렇지만, 역설적이게도 선입견이 개입하기 쉬운 문제들은 선입견을 깨뜨릴 수 있는 최상의 도구가 될 수 있다. 선입견은 우리가 그것을 제대로 인식하지 못할 때까지만 선입견으로 작용할 수 있기 때문이다. 이 책은 역대 기출 문제 중 가장 정답률이 낮았던 문제들을 통해 어떠한 선입견들이 우리의 감각을 가로막고 있었는지 여실히 드러내 준다. 몇 가지 선입견을 확인하고 나면 문제를 바라보는 자신의 시각이 확연히 달라져 있음을 느낄 것이다.

선입견을 깨트리는 것이야말로 수학이 주는 가장 큰 교훈 중의 하나가 아닐까! 이러한 교훈을 널리 공유할 수 있도록 애써주신 모든 출판 관계자분들께 깊이 감사드린다.

2016년 어느 가을날..



Contents



첫 번째, 무엇을 기본 단위로 볼 것인가?

- 7 1-01 1995학년도 수능
- 8 1-02 2013학년도 평가원
- 9 1-03 2012학년도 평가원
- 11 1-04 2012학년도 평가원
- 12 1-05 2015학년도 평가원
- 14 1-06 2010학년도 수능
- 18 연습해 보기

두 번째, 무엇을 상수로 볼 것인가?

- 25 2-01 2013학년도 수능
- 27 2-02 2016학년도 교육청
- 29 2-03 2013학년도 수능
- 30 2-04 2016학년도 수능
- 33 2-05 2014학년도 평가원
- 35 2-06 2016학년도 평가원
- 37 2-07 2011학년도 평가원
- 40 연습해 보기

세 번째, 무엇이 경계를 결정하는가?

- 47 3-01 2015학년도 평가원
- 49 3-02 2017학년도 평가원
- 51 3-03 2012학년도 수능
- 54 3-04 2015학년도 수능
- 55 3-05 2010학년도 교육청
- 57 3-06 2012학년도 수능
- 59 3-07 2014학년도 평가원
- 60 3-08 2015학년도 수능
- 64 연습해 보기

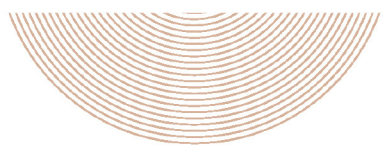
네 번째, 무엇이 도형을 결정하는가?

- 71 4-01 2009학년도 수능
- 72 4-02 2015학년도 평가원
- 74 4-03 2013학년도 평가원
- 75 4-04 2014학년도 평가원
- 76 4-05 2014학년도 예비평가
- 78 4-06 2011학년도 교육청
- 79 4-07 2016학년도 교육청
- 81 4-08 2010학년도 교육청
- 84 연습해 보기

| 부록 | 무엇을 기본 변수로 볼 것인가?



첫 번째, 무엇을 기본 단위로 볼 것인가?



논리의 기본 과정은 ‘이미 알고 있는 정보’를 이용하여 새로운 (정확히는 새롭게 보이는) 정보를 파악하는 데 있다. 따라서 문제를 논리적으로 해결하기 위해서는 무엇보다 주어진 정보를 정확히 확인하는 것이 중요하다.

수학의 가장 큰 미덕은 바로 근거 없는 선입견을 깨트리는 것!!

그런데 주어진 정보를 이해하는 데 종종 걸림돌로 작용하는 것이 있으니, 그것은 알게 모르게 축적된 우리의 선입견이다.

아마도 가장 큰 선입견 중의 하나는 식의 기본 형태에 대한 고정 관념일 것이다.

예를 들어, 함수 $f(x)$ 에 관한 문제에서 ‘ $xf(x)$ ’ 또는 ‘ $f(x)-x$ ’에 대한 정보가 주어져 있는데, 이를 무시하고 고집스럽게 ‘ $f(x)$ ’의 형태에만 초점을 맞춘다면 뜻하지 않은 어려움에 빠질 가능성이 높다.

모든 물질에는 기본 단위가 있다..

반대로, 함수는 무조건 $f(x)$ 의 형태로 나타내야 한다는 선입견을 버리고 **주어진 조건에 따라 함수 ‘ $xf(x)$ ’ 또는 ‘ $f(x)-x$ ’를 기본 단위로 볼 수 있다면** 불필요한 사고를 줄일 수 있다는 뜻이다!

문제를 통해 직접 확인해 보자.

1-01

95 수능

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 다음 〈보기〉 중 $x=0$ 에서 미분 가능한 함수를 모두 고르면?

〈보 기〉

$$\neg. y = xf(x)$$

$$\neg. y = x^2f(x)$$

$$\neg. y = \frac{1}{1+xf(x)}$$

\neg . 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하지 않으므로 미분계수의 정의에 따라 $x=0$ 에서 함수 $xf(x)$ 의 미분가능성을 조사해 보면

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분 가능하지 않으므로 함수 $xf(x)$ 에 대하여 곱의 미분법을 적용할 수는 없다.

$(xf(x))'$

$\neq f(x) + xf'(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (\because \text{함수 } f(x) \text{는 } x=0 \text{에서 연속})$$

따라서 $y = xf(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다. (참)

\neg . 함수 $x^2f(x)$ 에 대하여 미분계수의 정의를 다시 한번 적용할 수도 있지만, \neg 에서 함수 $xf(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능함을 알았으므로 **함수 ‘ $xf(x)$ ’를 기본 단위로 보면**

$$y = x^2f(x) = x \cdot xf(x)$$

가 $x=0$ 에서 미분가능한 두 함수 $y = x$, $y = xf(x)$ 의 곱으로 이루어져 있음을 알 수 있다. 따라서 곱의 미분법에 의해 함수 $y = x^2f(x)$ 도 $x=0$ 에서 미분가능하다. (참)

\neg . \neg 에서와 같이 미분가능성을 알고 있는 함수를 기본 함수로 이용하는 것은 합·차·몫의 미분법에 대해서도 동일하게 적용된다! 즉,

$$x=0 \text{ 일 때, } 1 + xf(x) = 1 \neq 0$$

이므로 몫의 미분법에 의해 함수 $y = \frac{1}{1+xf(x)}$ 도 $x=0$ 에서 미분가능하다. (참)

즉, 옳은 것은 \neg , \neg , \neg 이다.

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ 과 실수 m 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq mx) \\ mx & (f(x) < mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m 의 값은?

우선, 미분가능한 두 함수 $y = f(x)$, $y = mx$ 를 이용하여 새로운 함수 $g(x)$ 의 미분가능성을 조사해 보자.

함수 $g(x)$ 는 $f(x) > mx$ 인 구간에서 $g(x) = f(x)$ 이므로 미분가능하고, $f(x) < mx$ 인 구간에서는 $g(x) = mx$ 이므로 역시 미분가능하다.

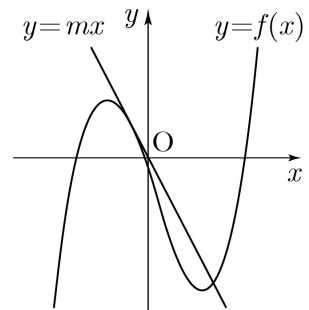
따라서 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 두 함수 $y = f(x)$, $y = mx$ 의 그래프가 만나는 지점에서 접선의 기울기가 서로 같아야 하므로

$$f(x) = mx \text{ 일 때, } f'(x) = m \cdots \textcircled{1}$$

이 성립해야 한다.

이때, $\textcircled{1}$ 을 만족하는 m 의 값을 찾기 위해 삼차함수 $f(x)$ 를 미분하여 곡선 $y = f(x)$ 의 개형을 그리고, 이 곡선에 접하면서 원점을 지나는 직선 $y = mx$ 의 후보들을 조사한다면 꽤 많은 계산을 거쳐야 할 것이다.

직선 $y = mx$ 의 후보들이 점점 이외의 지점에서는 곡선과 다시 접할 수 없는 지를 확인해 보아야 때문이다.



하지만, $\textcircled{1}$ 에서 두 번째 식은 첫 번째 식을 미분한 결과와 같으므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = mx$ 의 관계가 아니라, 하나의 함수 $f(x) - mx$ 와 x 축의 관계로 해석하면 함수식을 간단히 끌어낼 수 있다.

즉, 삼차함수 $y = f(x)$ 와 일차함수 $y = mx$ 대신 **삼차함수 ‘ $h(x) = f(x) - mx$ ’를 기본 단위로 보면**

$$h(x) = 0 \text{ 일 때, 항상 } h'(x) = 0$$

이 성립해야 하므로 삼차방정식 $h(x) = 0$ 의 모든 실근은 중근이어야 한다!

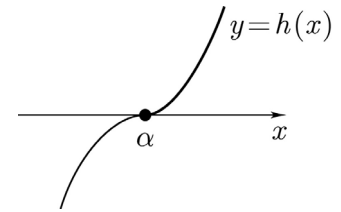
(삼차방정식의 실근의 개수는 최대 3개이므로 정확하게는 삼중근을 가져야 한다.)

대강의 개형
만으로 답을
확정할 수는
없으니...

이때, $h(x)$ 의 최고차항의 계수는 $f(x)$ 의 최고차항의 계수
인 1과 같으므로 삼중근을 α 라고 하면

$$h(x) = (x - \alpha)^3$$

$$\therefore (x^3 - 3x^2 - 9x - 1) - mx = (x - \alpha)^3$$



따라서 위의 등식의 양변을 x 에 대하여 두 번 미분하면

$$6(x - 1) = 6(x - \alpha) \quad \therefore \alpha = 1$$

양변의 상수
항을 비교하
여 $\alpha=1$ 임을
바로 확인할
수도 있다.

이므로

$$(x^3 - 3x^2 - 9x - 1) - mx = (x - 1)^3$$

결국, 위의 결과에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-12 - m = 0$$

이므로 구하는 값은 $m = -12$ 임을 알 수 있다.

1-03

12 평가원

양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x) = \frac{1}{27}(x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 19x)$$

에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고르면?

— <보 기> —

- ㄱ. 점 $(2, 2)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.
- ㄴ. 방정식 $f(x) = x$ 의 실근 중 양수인 것은 $x = 2$ 하나뿐이다.
- ㄷ. 함수 $|f(x) - g(x)|$ 는 $x = 2$ 에서 미분가능하다.

위와 같은 명제 판단 문제는 늘 <보기> ㄱ, ㄴ, ㄷ 사이의 연관성을 염두에 둘 필요가 있다.

(i) ㄱ에서 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 에 대하여

$$\{f(x) - x\}'' = f''(x)$$

이므로 곡선 $y = f(x) - x$ 의 변곡점의 x 좌표는 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표와 같다.

(ii) ㄴ에서는 방정식 $f(x) - x = 0$ 의 실근이 $x = 2$ 임을 확인해야 한다.

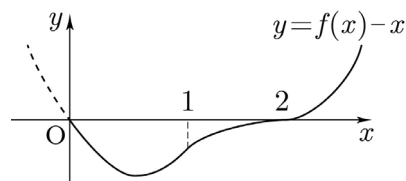
서로 역함수
관계에 있는
두 함수의 그
래프는 직선
 $y=x$ 에 대하여
대칭이므로...

(iii) ㄷ에서도 $x=2$ 의 근방에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 위치 관계를 알면 함수 $f(x)$ 와 그 역함수 $g(x)$ 의 위치 관계를 추론할 수 있다.

(i)~(iii)을 종합해 보면 함수 $f(x)$ 대신 **사차함수 ‘ $f(x)-x$ ’**를 **기본 단위로** 이용하는 것이 매우 유리해 보인다!

ㄱ. 곡선 $y=f(x)-x$ 의 변곡점을 조사하기 위해 $f(x)-x$ 를 정리해 보면

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{1}{27}(x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 19x) - x \\ &= \frac{1}{27}x(x-2)^3 \quad (\text{단, } x > 0) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$



이므로 곡선 $y=f(x)-x$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

이때, 점 $(2, 0)$ 이 곡선 $y=f(x)-x$ 의 변곡점이므로 점 $(2, 2)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점임을 알 수 있다. (참)

$f(x)$ 를 그대로
이용한다면
ㄱ, ㄴ, ㄷ을
판단하는 등
안 여러 번의
미분과 인수
분해를 반복
해야 한다.

ㄴ. ㄱ의 결과에 의해 방정식 $f(x)-x=0$ 의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 뿐임을 알 수 있다. (참)

ㄷ. 곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 ㄱ에서 구한 곡선 $y=f(x)-x$ 의 개형에 의해

$$|f(x)-g(x)| = \begin{cases} f(x)-g(x) & (x \geq 2) \\ g(x)-f(x) & (x < 2) \end{cases}$$

임을 알 수 있다.

이때, ㉠에서 $f(2)=2$, $f'(2)=1$ 이므로

$$g(2)=2, \quad g'(2)=\frac{1}{f'(2)}=1 \quad \therefore f'(2)=g'(2)$$

따라서 $h(x)=|f(x)-g(x)|$ 로 놓으면

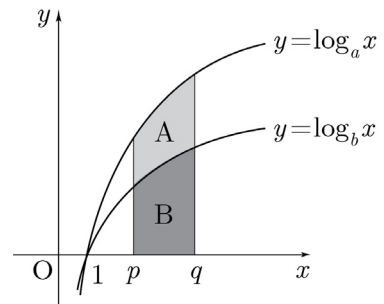
$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = g'(2)-f'(2) = f'(2)-g'(2) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{h(x)-h(2)}{x-2}$$

이므로 함수 $|f(x)-g(x)|$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다. (참)

즉, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

첫 번째, 연습해 보기

- 01** 그림과 같이 두 직선 $x=p$, $x=q$ 와 x 축 및 곡선 $y=\log_a x$ 로 둘러싸인 부분을 곡선 $y=\log_b x$ 가 두 부분 A와 B로 나눈다. A와 B의 넓이를 각각 α, β 라 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?
(단, $1 < a < b$, $1 < p < q$)



- ① $\left(\frac{b}{a}-1\right)(q-p)$ ② $\frac{a}{b}-1$
③ $\log_a b-1$ ④ $\log_b a-1$ ⑤ $(q-p)\log_b a$

- 02** $x=0$ 에서 극댓값을 갖는 모든 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르면?

— <보 기> —

- ㄱ. 함수 $|f(x)|$ 은 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(|x|)$ 은 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $f(x)-x^2|x|$ 은 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

03 함수 $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르면?

- <보 기> —
- ㄱ. 최솟값은 $-1 - \sqrt{2}$ 이다.
 - ㄴ. $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 최댓값을 갖는다.
 - ㄷ. $x = \frac{5}{4}\pi$ 에서 극댓값을 갖는다.

04 $x > a$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -1 인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a 는 상수이다.)

- (가) $x > a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$ 이다.
- (나) 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$,
 $x = \beta$ 에서 동일한 극댓값 M 을 갖는다. (단, $M > 0$)
- (다) 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 함수
 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$ 일 때, M 의 최솟값을 구하시오.

05 양수 a 와 두 실수 b, c 에 대하여 함수 $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$ 는 $x = -\sqrt{3}$ 과 $x = \sqrt{3}$ 에서 극값을 갖는다.

(나) $0 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$f(x_2) - f(x_1) + x_2 - x_1 \geq 0 \text{이다.}$$

세 수 a, b, c 의 곱 abc 의 최댓값을 $\frac{k}{e^3}$ 라 할 때, $60k$ 의 값을 구하시오.

06 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 최솟값은?

(가) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이다.

(나) $f(0) = f'(0)$

(다) $x \geq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$ 이다.

- 07 함수 $y = x^3 + ax$ 의 그래프를 양의 방향으로 45° 회전시켜서 얻은 곡선이 실수 전체에서 정의된 어떤 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 되는 a 의 범위는?

- 08 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 양의 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = x^2 e^{-x^2} \\ \text{(나)} \quad & g(x) = \frac{4}{e^4} \int_1^x e^{t^2} f(t) dt \end{aligned}$$

$f(1) = \frac{1}{e}$ 일 때, $f(2) - g(2)$ 의 값은?

첫 번째, 무엇을 기본 단위로 볼 것인가..... P.18

01) 답 ③

로그함수의 적분은 $\ln x$ 를 기본 단위로 이용하는 것이 유리하다. 즉,

$$\alpha = \int_p^q (\log_a x - \log_b x) dx = \int_p^q \frac{\ln x}{\ln a} dx - \int_p^q \frac{\ln x}{\ln b} dx, \quad \beta = \int_p^q \log_b x dx = \int_p^q \frac{\ln x}{\ln b} dx$$

이므로

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{1}{\ln a} \int_p^q \ln x dx - \frac{1}{\ln b} \int_p^q \ln x dx}{\frac{1}{\ln b} \int_p^q \ln x dx} = \frac{\ln b}{\ln a} - 1 \quad \therefore \frac{\alpha}{\beta} = \log_a b - 1$$

02) 답 ㄴ, ㄷ

연속함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 0을 포함하는 어떤 열린 구간의 모든 x 에 대하여

$$f(x) \leq f(0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

ㄱ. $\textcircled{1}$ 에 의해 $f(0) < 0$ 이면

$$|f(x)| \geq |f(0)|$$

이므로 일반적으로 함수 $|f(x)|$ 은 $x=0$ 에서 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\textcircled{1}$ 은 x 값의 부호에 관계없이 성립하므로

$$x \geq 0 \text{이면 } f(|x|) = f(x) \leq f(0), \quad x < 0 \text{ 이면 } f(|x|) = f(-x) \leq f(0)$$

따라서 함수 $f(|x|)$ 은 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

$$\textcircled{2}. -x^2|x| = -|x^3| \leq 0$$

이므로 함수 $g(x) = -x^2|x|$ 는 $x=0$ 에서 극대이다.

따라서 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 기본 단위로 보면 0을 포함하는 어떤 열린 구간의 모든 x 에 대하여

$$f(x) + g(x) \leq f(0) + g(0)$$

이 성립하므로 함수 $f(x) - x^2|x|$ 는 $x=0$ 에서 극대임을 알 수 있다. (참)

03) 답 ㄱ, ㄷ

$\sin x + \cos x = t$ 를 기본 단위로 보면

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

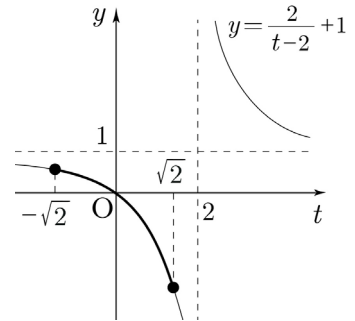
이므로

$$f(x) = \frac{t}{t-2} = \frac{2}{t-2} + 1 \quad (\text{단, } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$$

ㄱ. $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ 에서 함수 $f(x) = \frac{2}{t-2} + 1$ 은 감소하므로
 $t = \sqrt{2}$ 일 때 최솟값

$$\frac{2}{\sqrt{2}-2} + 1 = -1 - \sqrt{2}$$

를 갖는다. (참)



ㄴ. $f(x) = \frac{2}{t-2} + 1$ 은 $t = -\sqrt{2}$ 일 때 최댓값을 갖는다.

그런데, ㉠에 의해 $t = -\sqrt{2}$ 일 때, $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ 이므로

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad \therefore x + \frac{\pi}{4} = \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \dots$$

따라서 $f(x)$ 는 $x = \dots, -\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi, \dots$ 에서 최댓값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$ 는 모든 실수에서 연속이므로 $f(x)$ 의 최댓값은 극댓값 중의 하나이

다. 그런데, ㄴ의 결과에서 $f(x)$ 는 $x = \frac{5}{4}\pi$ 에서 최댓값을 가지므로 역시 $x = \frac{5}{4}\pi$ 에서 극댓값을 가짐을 알 수 있다. (참)

04) 답 216

조건 (가)에서

$$(x-a)f(x) = g(x) \quad (\text{단, } x > a) \quad \dots \text{㉠}$$

이므로 ‘사차함수 $g(x)$ ’의 정보를 통해 $f(x)$ 의 극댓값 M 의 정보를 파악해 보자.

조건 (나)에 의해

$$f(\alpha) = f(\beta) = M, \quad f'(\alpha) = f'(\beta) = 0 \quad \dots \text{(i)}$$

이므로 ㉠의 양변을 미분해 보면

$$f(x) + (x-a)f'(x) = g'(x) \quad \dots \text{㉡}$$

이때, ㉠, ㉡에 각각 α, β 를 대입해 보면 (i)에 의해

$$g(\alpha) = M(\alpha-a), \quad g(\beta) = M(\beta-a) \quad (\because \text{㉠})$$

$$g'(\alpha) = M, \quad g'(\beta) = M \quad (\because \text{㉡, (i)})$$

이므로 사차함수 $g(x)$ 에 대하여 α, β 는 두 방정식

$$g(x) = M(x-a), \quad g'(x) = M \quad \dots \text{(ii)}$$

의 실근이다.

그런데, (ii)에서 두 번째 식은 첫 번째 식을 미분한 결과와 같으므로 두 함수 $y = g(x), y = M(x-a)$ 대신 함수 $y = g(x) - M(x-a)$ 를 기본 단위로 보면 최고차항의 계수가 -1 인 사차방정식