선입견을 깨고

수학 바로 보기

미적분 I

김현우 | 백경린

smart is sexy
Orbi

'수학 바로 보기' 는..

선입견은 우리의 감각을 가로막는다!

누구나 어렸을 때, 수학의 기초 개념인 '덧셈' 을 열심히 연습했던 기억이 있을 것이다.

$1+2=3$, $3+7=10$, $10+10=20$, $\cdots$

그런데, 이러한 개념을 반복적으로 훈련하다 보면 자신도 모르게 3, 10, 20과 같은 각각의 수만을 하나의 단위로 인식하는 선입견에 빠지게 된다. 그래서 '3' 이라는 수를 (역으로)

'$1+2$' 또는 '$2+1$'

과 같이 새로운 표현 단위로 나타낼 수 있다는 사실에는 매우 무감각해지기 쉽다.

허나, 단단한 바위 틈에서도 새싹이 피어나듯이 무감각한 선입견을 깨뜨린 천재소년이 있었으니, 그가 바로 가우스(Carl F. Gauss; 1777~1855)다. 열 살의 가우스는 감각적으로

'$1+2+3+\cdots+99+100$' 또는 '$100+99+\cdots+3+2+1$'

이 하나의 수 'S' 를 나타내는 새로운 표현 단위임을 인식하였다. 그 결과, 새로운 표현 방식에 드러난 수 'S' 의 규칙성을 쉽게 확인할 수 있었던 것이다.

$1+2+3+\cdots+99+100=S$

$100+99+\cdots+3+2+1=S$

$\therefore\ 2S=101\times100$

선입견은 감각을 살리는 도구가 되어야 한다!

특히, 우리에게 어렵고 복잡해 보이는 문제들 속에는 어김없이 선입견이 작용하고 있을 가능성이 크다. 이를 극복하기 위해 무작정 어려운 문제를 많이 푸는 것은 오히려 선입견을 더욱 강화시키기도 한다.

그렇지만, 역설적이게도 선입견이 개입하기 쉬운 문제들은 선입견을 깨뜨릴 수 있는 최상의 도구가 될 수 있다. 선입견은 우리가 그것을 제대로 인식하지 못할 때까지만 선입견으로 작용할 수 있기 때문이다. 이 책은 역대 기출 문제 중 가장 정답률이 낮았던 문제들을 통해 어떠한 선입견들이 우리의 감각을 가로막고 있었는지 여실히 드러내 준다. 몇 가지 선입견을 확인하고 나면 문제를 바라보는 자신의 시각이 확연히 달라져 있음을 느낄 것이다.

선입견을 깨트리는 것이야말로 수학이 주는 가장 큰 교훈 중의 하나가 아닐까! 이러한 교훈을 널리 공유할 수 있도록 애써주신 모든 출판 관계자분들께 깊이 감사드린다.

2016년 지구에서..

Contents

첫 번째, 무엇을 기본 단위로 볼 것인가?

두 번째, 무엇을 상수로 볼 것인가?

세 번째, 무엇이 경계를 결정하는가?

네 번째, 무엇이 도형을 결정하는가?

첫 번째, 무엇을 기본 단위로 볼 것인가!

논리의 기본 과정은 '이미 알고 있는 정보'를 이용하여 새로운 (정확히는 새롭게 보이는) 정보를 파악하는 데 있다. 따라서 문제를 논리적으로 해결하기 위해서는 무엇보다 주어진 정보를 정확히 확인하는 것이 중요하다.

그런데 주어진 정보를 이해하는 데 종종 걸림돌로 작용하는 것이 있으니, 그것은 알게 모르게 축적된 우리의 선입견이다.

수학의 가장 큰 미덕은 바로 근거 없는 선입견을 깨트리는 것!!

아마도 가장 큰 선입견 중의 하나는 식의 기본 형태에 대한 고정 관념일 것이다.

예를 들어, 수열 a_n에 관한 문제에서 '$n \cdot a_n$' 또는 '$a_n - n$'에 대한 정보가 주어져 있는데, 이를 무시하고 고집스럽게 'a_n'의 형태에만 초점을 맞춘다면 뜻하지 않은 어려움에 빠질 가능성이 높다.

모든 물질에는 기본 단위가 있다..

반대로, 수열의 일반항은 무조건 a_n의 형태로 나타내야 한다는 선입견을 버리고 **주어진 조건에 따라 수열 '$n \cdot a_n$' 또는 '$a_n - n$'을 기본 단위로 볼 수 있다면** 불필요한 사고를 줄일 수 있다는 뜻이다!

문제를 통해 직접 확인해 보자.

1-01
11 평가원

수열 $\{a_n\}$이

$$7a_1 + 7^2 a_2 + \cdots + 7^n a_n = 3^n - 1$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}}$ 의 값은?

주어진 조건식은 일반항 a_n이 아니라 일반항 $7^n a_n$에 대한 규칙성을 나타내므로 a_n 대신 **'$7^n a_n$' 을 기본 단위로 보면**

$$S_n = 7a_1 + 7^2 a_2 + \cdots + 7^{n-1} a_n + 7^n a_n = 3^n - 1$$

$$S_{n-1} = 7a_1 + 7^2 a_2 + \cdots + 7^{n-1} a_{n-1} = 3^{n-1} - 1$$

이므로

$7^n a_n$을 구하면 당연히 a_n도 알 수 있다!

$$S_n - S_{n-1} = 7^n a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore \frac{a_n}{3^{n-1}} = \frac{2}{7^n}$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}}$ 은 첫째항이 $\frac{2}{7}$이고, 공비가 $\frac{1}{7}$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} = \frac{\frac{2}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{1}{3}$$

즉, 구하는 값은 $\frac{1}{3}$이다.

1-02
06 평가원

등차수열 $\{x_n\}$과 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고르면?

〈보 기〉

ㄱ. 수열 $\{f'(x_n)\}$은 등차수열이다.

ㄴ. 수열 $\{f(x_{n+1}) - f(x_n)\}$ 은 등차수열이다.

ㄷ. $f(0) = 3$, $f(2) = 5$, $f(4) = 9$이면 $f(6) = 15$이다.

ㄱ. 수열 $\{x_n\}$은 등차수열이므로 x_n은 n에 관한 일차식이다. 이때,

f(x)가 이차 함수이면 f'(x)는 일차 함수이다..

$$f'(x_n) = 2a \cdot x_n + b$$

도 n에 관한 일차식이므로 수열 $\{f'(x_n)\}$도 등차수열임을 알 수 있다. (참)

ㄴ. 수열 $\{x_n\}$은 등차수열이므로 $x_{n+1} - x_n = d$ (d는 상수)로 놓으면

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = a\left(x_{n+1}{}^2 - x_n{}^2\right) + b(x_{n+1} - x_n)$$
$$= d\{a(x_{n+1} + x_n) + b\}$$

이때, $(x_{n+1} + x_n)$도 n에 관한 일차식이므로 수열 $\{f(x_{n+1}) - f(x_n)\}$도 등차수열임을 알 수 있다. (참)

ㄷ. ㄴ의 결과에 따라 수열 $\{x_n\}$이 등차수열이면 수열 $\{f(x_{n+1}) - f(x_n)\}$도 등차수열이다.

그런데, 주어진 수열의 정의역에서

$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots$

이 등차수열이므로 **'$f(2(n+1)) - f(2n)$' 을 기본 단위로 보면**

만약, ㄷ의 조건을 미지수가 3개(a, b, c)인 연립방정식을 푸는 정보로 사용했다면, 시험에서는 불필요한 계산의 압박을 받았을 것이다.

$$f(2) - f(0) = 5 - 3 = 2$$
$$f(4) - f(2) = 9 - 5 = 4$$
$$f(6) - f(4) = f(6) - 9 = ?$$

도 공차가 2인 등차수열임을 알 수 있다!

따라서

$$f(6) - 9 = 6 \qquad \therefore\ f(6) = 15 \ \text{(참)}$$

즉, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

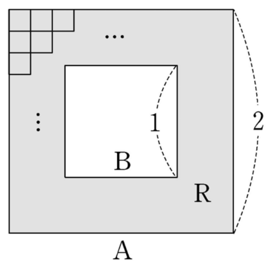
1-03
10 수능

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여 있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자. 2 이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

(가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다.
(나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2 = 12$, $a_3 = 20$이다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = c$라 할 때, $100c$의 값은?



얼핏 보면 홀수 번째 항인 a_{2n-1}과 짝수 번째 항인 a_{2n}의 규칙성을 따로따로 구해야 할 것 같지만, 묻고 있는 극한값에서와 같이

'$a_{2n} - a_{2n-1}$' 또는 '$a_{2n+1} - a_{2n}$'

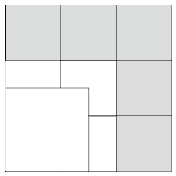
을 기본 단위로 보면 규칙성을 좀 더 간명하게 끌어낼 수 있다.

언제나 '묻고 있는 값의 형태'까지 문제의 조건에 포함시킬 필요가 있다!

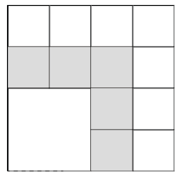
이때, 두 정사각형 A, B는 상하좌우로 완벽히 대칭이므로 작은 정사각형의 개수를 셀 때, 전체의 $\frac{1}{4}$조각만 보아도 '$a_{2n} - a_{2n-1}$과 $a_{2n+1} - a_{2n}$의 비율'에는 변함이 없다.

예를 들어, a_3에 해당하는 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{3}$이고, a_4에 해당하는 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{4}$이므로 전체의 $\frac{1}{4}$조각에는 작은 정사각형이 다음과 같이 배열된다.

정사각형의 ㄱ자 배열은 '연속된 홀수의 합'을 세는 가장 효율적인 방법이다!



$\langle a_3 \rangle$



$\langle a_4 \rangle$

따라서 작은 정사각형의 개수가 a_3에서 a_4로 늘어날 때는 (나머지 정사각형의 개수는 모두 중복되고) a_4의 가장 바깥쪽 열에 있는 정사각형의 개수만큼만 추가되므로

'개수'는 전체의 1/4조각만 세었으므로 구한 결과에 다시 4배를 해 주어야하지만, 1/4조각만 세어도 구하는 '비율'에는 변함이 없으므로 4배는 생략하였다.

$$a_4 - a_3 = 2 \cdot 4 - 1$$

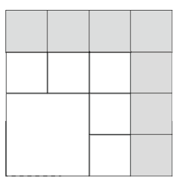
임을 알 수 있다!

그런데, 이러한 규칙은 작은 정사각형의 개수가 a_{2n-1}에서 a_{2n}으로 늘어날 때마다 같은 방식으로 반복되므로

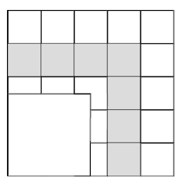
$$a_{2n} - a_{2n-1} = 2 \cdot 2n - 1 = 4n - 1 \quad \cdots \text{ (i)}$$

한편, 작은 정사각형의 개수가 a_4에서 a_5로 늘어날 때를 관찰해 보면

중간 열에 있는 정사각형의 개수는 모두 중복된다.



$\langle a_4 \rangle$



$\langle a_5 \rangle$

a_5의 가장 바깥 열에 있는 정사각형 개수와 a_4의 가장 안쪽 열에 있는 정사각형의 개수의 차이만큼만 추가되는데, 이때 a_{2n}의 가장 안쪽 열에 있는 정사각형의 개수는 항상 a_{2n}의 가장 바깥쪽 열에 있는 정사각형의 개수의 절반 정도로 줄어들므로

한번에 일반화시키기 어렵다면 한 두 개의 예시를 더 시행해 봐도 된다.

$$a_5 - a_4 = (2 \cdot 5 - 1) - \left(2 \cdot \frac{4}{2} + 1\right)$$

임을 알 수 있다!

그런데, 이러한 규칙은 작은 정사각형의 개수가 a_{2n}에서 a_{2n+1}로 늘어날 때마다 같은 방식으로 반복되므로

$$a_{2n+1} - a_{2n} = \{2 \cdot (2n+1) - 1\} - \left\{2 \cdot \frac{2n}{2} + 1\right\} = 2n \quad \cdots \text{ (ii)}$$

(i), (ii)에 의해

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n-1} = \frac{1}{2}$$

이므로 구하는 값은 $100c = 50$이다.

'대수학은 악마가 수학자에게 한 제안이다.'

– 아티야

첫 번째, **연습해 보기**

01 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n a_n}{3^n+1}$이 0이 아닌 상수일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$의 값은?

02 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

정답 및 해설 94p

03 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $a_n+a_{n+1}=3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르면?

〈보 기〉

ㄱ. $a_{11}=1$

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=2$

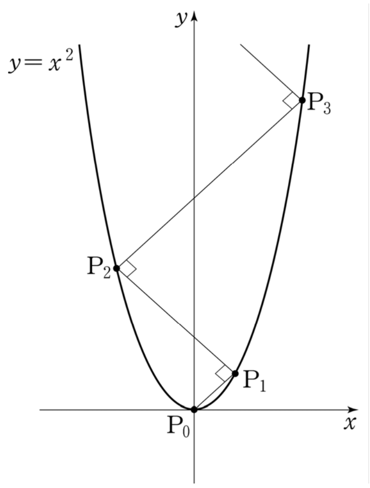
ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=\dfrac{3}{2}$

04 자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

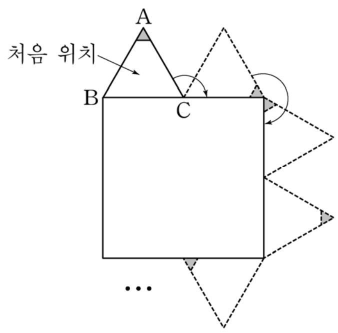
(가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(1, 1)$이다.

(나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다.
(단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

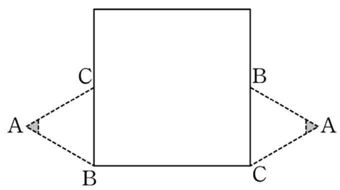
$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n}$의 값은?



05 한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=1$일 때, [그림 2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은?



[그림 1]



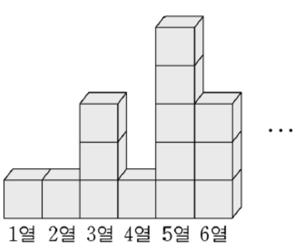
[그림 2]

06 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자. 예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



정답 및 해설

첫 번째, 무엇을 기본 단위로 볼 것인가!
p.18

01) 답 $\frac{5}{3}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n a_n}{3^n+1}=\alpha$ $(\alpha\neq 0)$이므로 a_n 대신 $\frac{5^n a_n}{3^n+1}$을 기본 단위로 보면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n a_n}{(3^n+1)}\cdot\frac{(3^{n+1}+1)}{5^{n+1}a_{n+1}}\cdot\frac{(3^n+1)5^{n+1}}{(3^{n+1}+1)5^n}$$
$$=\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

02) 답 10

첫 번째 조건식의 분모, 분자를 x^3으로 나누면 x 대신 $\frac{1}{x}$을 기본 단위로 변수를 통일시킬 수 있다.

즉,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^3}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=5\ \left(\text{단, } t=\frac{1}{x}\right)$$

이때, 분자에서 $f(t)-t^3$은 최고차항의 계수가 5인 이차식이어야 하므로

$f(x)-x^3=5x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

$\therefore\ f(x)=x^3+5x^2+ax+b$ ⋯ ㉠

한편, 두 번째 조건식의 분자에서 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이어야 하므로 ㉠에 의해

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=1+5+a+b=0$ $\therefore\ b=-(a+6)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$f(x)=x^3+5x^2+ax-(a+6)=(x-1)(x^2+6x+6+a)$

이므로 이 결과를 다시 두 번째 조건식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+6x+6+a)}{(x-1)(x+2)}=\frac{13+a}{3}=\frac{1}{3}\qquad\therefore\ a=-12$$

따라서

$f(x)=(x-1)(x^2+6x-6)$

이므로 $f(2)=10$

03) 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 주어진 조건식에 따라 a_n 대신 $a_n + a_{n+1}$을 기본 단위로 보면

$$a_{11} = S_{11} - S_{10} \text{ (단, } S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\text{)}$$
$$= \{a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{10} + a_{11})\} - \{(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_9 + a_{10})\}$$
$$= (1 + 3 \cdot 5) - (3 \cdot 5) = 1 \text{ (참)}$$

ㄴ. ㄱ에서와 같은 방식으로

$$a_{2n-1} = S_{2n-1} - S_{2n-2} = (1 + 3 \cdot (n-1)) - 3 \cdot (n-1) = 1$$

이므로

$$a_{2n-1} + a_{2n} = 1 + a_{2n} = 3 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a_{2n} = 2 \text{ (참)}$$

ㄷ. ㄴ의 결과에 의해

$$a_{2n-1} = 1, \ a_{2n} = 2$$

이므로

(i) $n = 2m$ (m은 자연수)일 때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m}\{(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2m-1} + a_{2m})\} = \lim_{m\to\infty} \frac{3m}{2m} = \frac{3}{2}$$

(ii) $n = 2m - 1$ (m은 자연수)일 때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m-1}\{(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + a_{2m-1}\} = \lim_{m\to\infty} \frac{3m-2}{2m-1} = \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에 의해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{3}{2}$ (참)

04) 답 $2\sqrt{2}$

조건 (가), (나)에 의해 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$의 기울기는 ± 1이므로 점 P_n의 x좌표를 x_n이라고 하면 선분 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$의 길이는

$$l_n = \sqrt{2}\,|x_n - x_{n-1}|$$

그런데,

직선 $\mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n}$의 기울기$= \dfrac{x_{2n}^{\ 2} - x_{2n-1}^{\ 2}}{x_{2n} - x_{2n-1}} = x_{2n} + x_{2n-1} = -1$ … ㉠

직선 $\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1}$의 기울기$= \dfrac{x_{2n+1}^{\ 2} - x_{2n}^{\ 2}}{x_{2n+1} - x_{2n}} = x_{2n+1} + x_{2n} = 1$ … ㉡

이므로 x_n 대신 x_{2n-1}을 기본 단위로 이용하면 규칙성을 쉽게 끌어낼 수 있다.

즉, ㉠−㉡에 의해

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = 2 \ \cdots \text{ (공차가 2인 등차수열)}$$

이고, $x_1 = 1$이므로

$$x_{2n-1} = 2n - 1, \ x_{2n} = -2n \ (\because \text{㉠})$$