고수확:LIGHT

미적분

'고등수학의 확장:Light'의 줄임말이다. 수학에 내재된 본질적인 단순함을 볼 줄 아는 통찰력을 기르고 수학적 사고력을 넓히자는 뜻을 가진다. 이 책을 공부하는 모든 사람들이 수능 시험에서 좋은 결과를 거두기를 바라는 저자의 마음도 담겨있다.

문제편

서문

나는 고등학교 때 수학을 썩 잘하지 못했다. 중학교 때까지만 해도 수학을 잘한다고 생각했다. 시험을 보면 모르는 문제가 아니라 실수로 틀리는 문제 때문에 만점과 만점이 아닌 점수 사이를 오갔다. 타고난 수준으로 잘하지는 않더라도 앞으로 수학으로 고민할 일은 없을 거라 믿었다. 물론 흔히들 말하는, 중학교 때 좀 한다던 애들 대다수가 고등학교에 들어가면 시험점수가 떨어지더니 급기야 수학을 포기하기까지 하더라는 얘기는 많이 들어서 알고 있었다. 그 '대다수'를 제외한 운 좋은 나머지에 내가 속한다고 생각했다. 착각이었다. 고등학교 수학이 출제 범위에 포함된 첫 모의고사에서 3등급을 받았다. 처음이니까 그럴 수 있다고 변명했다. 그 다음 모의고사에서도 3등급을 받았다. 오히려 자신 없었던 다른 과목들은 1등급을 누볐다. 내신 시험이라고 다를 바는 없었다. 친구들이 장난삼아 수학 못하는 이과생이라고 놀렸다. 수학에 대한 자신감이 점점 떨어졌다.

그럼에도 포기하지 않고 묵묵히 내가 해야 할 공부를 했다. 새로 배운 개념을 복습하고, 문제집을 사서 문제를 풀고, 틀린 문제를 다시 풀어보면서 오답노트를 만들고. 정말 느리지만 꾸준하게 내신 점수에서부터 변화가 나타나기 시작했다. 2학년 마지막 내신 시험에서는 전교에서 거의 유일하게 만점에 가까운 점수를 받기까지 했다. 상위권에 속하던 애들의 대부분이 두세 문제씩 더 틀린 시험이었다. 반면에 모의고사는 계속 점수 변동이 심했다. 평가원에서 시행한 9월 모의평가 때까지도 극복하지 못했다. 엉뚱한 문제에서 헤매느라 시간 배분을 제대로 못한 탓에 2등급을 받았다. 수능이 두 달도 남지 않은 시점이라 걱정이 많았지만 그저 남은 시간 최선을 다하기로 했다. 결과적으로 수능에서 1등급을 받았다. 만점은 아니지만 그 정도면 서울대학교에 입학하기에 충분했다.

이러한 과정에서 그 누구의 도움도 받지 않았다고 하면 거짓말일 것이다. 나는 고등학교의 첫 1년 동안 몇 군데의 학원을 돌아다녔다. 그러다 ‘내가 다닐 곳은 여기다’라는 확신이 강하게 드는 곳을 찾았다. 그 학원 선생님이 수학을 하는 방식이 다른 강사들과 비교해서 특별한 것은 아니었다. 그런데 오히려 그 평범함이 나를 끌어당겼다. 쉬운 문제든 어려운 문제든 풀이가 놀라울 정도로 간단하고 명료했다. 물론 간단하다는 이유만으로 다 좋은 풀이는 아니다. 일명 일타 강사들이 제시하는 ‘간단한 풀이’라는 것은 따지고 보면 그와 같은 풀이를 구사하기 위해 사전 지식이 필요하거나 평범한 학생이 가질 수 있는 수준의 것을 뛰어넘는 직관을 필요로 하는 경우가 상당수이다. 그 선생님이 보여주는 풀이는 그런 종류의 것이 아니었다. 말하자면, 본질적인 단순함이 내재된 풀이였다. 그 본질적인 단순함은 항상 주어진 수학적 상황을 명확하게 이해하는 것으로부터 나왔다.

이처럼 수학적 상황에 대한 명확한 이해를 바탕으로 풀이의 본질적인 단순함을 추구하는 태도는 내가 대학교 수학을 공부하는 데에도 깊은 영향을 끼쳤다. 전공이 공학인지라 졸업할 때까지 필수적으로 들어야 하는 수학 과목이 몇 개 있는데, 나는 필수 과목만 듣는 데에서 그치지 않고 더 나아가 수학과에서 열리는 여러 전공과목을 수강했다. 대학생 수학경시대회에 참가하여 당당히 입상하기도 했다. 고등학교 1학년 때에는 꿈도 꾸지 못했을 일이다.

그러는 동안 마음속에서 두 가지 감정이 싹텄다. 새로운 것을 올바르게 배우고 연습하는 방법만 알면 누구나 수학(뿐만 아니라 인생을 살아가면서 겪는 모든 일)을 잘하게 될 수 있겠다는 확신과 그럼에도 너무나 많은 학생들이 잘못된 방법으로 공부한다는 것에 대한 안타까움이었다. 대학교에 입학한 뒤로 해온 모의고사 출제, 과외, 칼럼 저술 등과 같은 여러 가지 활동들은 모두 이러한 확신과 안타까움에 기초한 것이다. 어떻게 하면 내가 이루어낼 수 있었던 일들을 다른 평범한 사람들도 노력을 통해 이루어내게 할 수 있을까? 어떻게 하면 내가 얻은 지식과 지혜를 다른 평범한 사람들에게도 전할 수 있을까?

이런 고민 속에서 가지게 된 꿈이 언젠가는 나만의 책을 쓰겠다는 것이었다. 다른 방법들로는 내 작은 소망을 이루기에 한계가 있었다. 누군가의 수학 실력에 근본적인 변화를 일으킬 만큼 많은 문제를 만들어내기에는 나의 창작력이 부족했다. 과외는 분명히 개개인에게는 효과적인 수단이지만 많은 사람을 상대할 수가 없었다. 칼럼은 관심을 가지고 찾아보는 사람에게만 나의 수학적 통찰력을 전할 수 있다는 단점이 있었다.

그럼에도 책을 쓴다는 것은 쉽사리 발을 내딛을만한 일이 아니었다. 자신의 논리와 관점을 책을 통해 세상에 펼쳐 보이는 행동에는 막중한 책임감이 뒤따르기 때문이다. 머뭇거릴 수밖에 없었다. 그저 언젠가 쓰게 될지도 모르는 책의 내용을 머릿속으로 조금씩 정리하고만 있을 뿐이었다. 그러다 2015년 말, 드디어 노트북을 펼쳤다.

새로운 책이 가치를 인정받기 위해서는 정체성이 뚜렷해야 한다. 지구상에 존재하는 무수한 책들의 목록에 의미 없는 항목을 하나 추가할 뿐인 책을 쓰고 싶지는 않았다. 그래서 이 책이 가져야 할 정체성에 대해서 많은 고민을 했다. 그 답을 찾기 위해, 내가 대학 입시를 준비하면서 어려움을 겪었던 몇 번의 시기를 떠올려봤다. 그 중 한 시기는 개념 공부를 마치고 기출문제를 처음 풀 때였다. 그리고 이 시기에 어떤 책을 통해 어떤 개념과 논리를 바탕으로 기출문제를 접하는가 하는 것이 향후 전반적인 수학 실력에 상당한 영향을 미친다는 생각을 하게 됐다. ‘실전으로 나아가기 위한 개념서’를 이 책의 정체성으로 삼기로 했다.

남녀관계를 생각해보자. 첫 경험만큼 떨리고 흥분되는 일도 없다. 모든 것이 낯설다. 몸의 모든 감각이 깨어나 매순간을 강렬하게 기억한다. 여러분이라면 첫 경험을 별로 좋아하지도 않는 상대와 하고 싶은가, 목숨을 바쳐 사랑하는 상대와 하고 싶은가? 기출문제를 공부하는 것도 마찬가지다. 기출문제를 처음 대면했을 때의 당혹스러움과 조심스러움, 떠오르는 여러 가지 가능성 중에 무엇이 옳은 것인지 찾아 헤맬 때의 답답함, 마침내 문제를 풀어냈을 때의 짜릿함 등은 두 번 볼 때는 다시 느낄 수 없는 것들이다. 그렇기 때문에 처음 볼 때 잘 보는 것이 중요하다. 사랑하는 상대와의 첫 경험이 희망찬 미래를 위한 출발점이 되듯이, 신중하고 세심하게 쓰인 책을 통해 처음 기출문제를 접하는 것이 자신의 잠재적인 수학 실력을 더 이른 시점에 더 많이 끌어낼 수 있는 방법이다.

흔히 수학을 잘하기 위해서 개념이 중요하다는 말을 많이 하지만, 정작 기출문제를 풀 때 함께 공부할 개념서를 고르라면 마땅한 것을 선뜻 정하지 못한다. 이는 대부분의 개념서가 독자들이 개념을 처음 배운다는 가정 하에 모든 기초적인 개념을 정해진 교육과정의 틀에 맞춰 하나도 빠짐없이 다루기 때문이다. 그러다 보니 대부분의 개념서가 실전적인 문제를 풀기 위해 필요한 유기적인 논리는 담아내지 못한다. 나는 이 책을 쓰면서 기존 개념서의 그런 한계에서 벗어나고자 노력했다. 처음 배우는 사람을 위한 책이 아닌, 기본적인 개념을 이미 습득한 사람이 실전적인 공부로 나아갈 때 방향성을 제시하고 도움을 줄 수

있는 책을 쓰고자 노력했다. 그런 의미에서 이 책은 기존의 개념서를 대체하려는 책이 아니다. 기존의 개념서가 다루지 못했던 영역을 새로이 개척하려는 책이다. 성패 여부를 판단하는 것은 독자들의 몫이다.

책을 쓰는 동안 많은 일이 있었다. 책이 잘 써지지 않아 힘든 적도 여러 번이었고, 인생을 살아가면서 겪게 되는 다른 힘든 일들을 잊으려는 발버둥으로 오직 책 쓰는 일에만 온 정신을 다해 매달리기도 했다.

돌아보면, 내가 여태까지 (비록 오랜 시간은 아니지만 – 난 아직 젊다) 인생을 살아오는 길에서 주저앉지 않을 수 있었던 것은 힘든 순간에도 곁을 지켜준 가까운 사람들이 있었기 때문이다. 이 자리를 빌려 그들에게 한없는 감사의 말을 전한다.

검토자

#사전 검토자

곽호연 (서울대 수학교육과, 12) 「샤인미 모의고사」의 대표 저자.

이덕영 (연세대 수학과, 11) 「포카칩 모의평가」로 유명하다. 먹기 위해 공부하는 사람.

오인수 (성균관대 수학교육과, 13) 취미와 특기가 모두 수학이다. 밥 먹을 때도 종종 수학 얘기를 하곤 한다.

#오프라인 검토자

김용환 (서울대 기계항공공학부, 13) 살면서 수학이 제일 쉬웠다는 공대생. 밴드에서 베이스 기타도 친다.

이동재 (서울대 기계항공공학부, 14) 장블랑제리는 사랑입니다♡ (장블랑제리 홍보대사?)

이동재 (서울대 기계항공공학부, 17) 같은 이름 같은 고등학교 같은 대학교 같은 학부 이것도 무스비

조성준 (서울대 기계항공공학부, 16) 수능수학은 다 맞았으나 대학수학은 드랍했다고 한다.…

장건호 (연세대 건축공학과, 16) 어떤 공부든 무슨 과목이든 '균형'이 가장 중요하죠:)*

#온라인 검토자

최락현 (고려대 기계공학부)

한상우 (고려대 보건환경융합과학부)

김관후 (서울대 의학과)

장영준 (서울대 전기정보공학부)

김정빈 (성균관대 수학교육과)

이준호 (성균관대 수학교육과)

권혁일 (한국교원대 수학교육과 졸업, 고등학교 정교사)

박주언 (풍무고 졸업)

우영범

#의견을 주신 분

이해원 (연세대 수학과)

박주혁 (메가스터디 재수정규반 강사)

---

* 네이버에서 '균형'이라는 닉네임으로 활동한다.

Thanks to

이 책이 나올 수 있도록 아낌없는 도움을 준 여러 사람들

삶을 대하는 내 태도에 깊은 영향을 준 고1 영어 선생님

내가 고등학교 때 활동했던 교지「인경」발간 동아리

지금도 자주 만나는 고3 친구들

1년 동안 연달아 세 번의 실패의 쓴맛을 맛보게 해준 서울대학교

그렇지만, 나에게 많은 가르침과 도움을 준 서울대학교 교직원들

포만한 수학연구소 회원들

내가 힘들 때마다 힘이 되어주는 아름다운 음악들

음악이라는 또 다른 넓은 세상의 일면을 조금이나마 엿볼 수 있도록 나를 이끌어준 여러 사람들

수능 때까지 지치지 않고 내 과외 수업을 열심히 따라준 두 차례의 소중한 동생들

살아오면서 스쳐지나간 수많은 사람들

그리고

내가 사랑하는 모든 사람들과

나를 사랑해주는 모든 사람들

책 소개

그동안 입시를 조용히 지켜보기만 했습니다. 여러 가지 현상을 바라보는 자신만의 시각을 가지기에 충분한 시간이었습니다. 고등학교 2학년이던 시절 한 살 많은 선배들이 치른 2011학년도 수능부터 이제는 저보다 몇 살은 더 어린 친구들이 수능을 치는 지금에 이르기까지 7년째니까요. 그러면서 고민을 참 많이 했습니다.

'왜 내 기대치에 미칠만한 책을 쓰는 사람은 아무도 없을까.'

'왜 나름 남들과 다르다고 내놓는 책들이 죄다 이 모양일까.'

'왜 개념을 이미 한 번 배우고 실전을 준비하려는 사람들을 위한 개념서는 없는 걸까.'

이 책은 이러한 고민 속에서 탄생했습니다.

수능 수학을 준비하면서 어려움을 가장 많이 겪는 두 번의 시기가 있습니다. 교과과정의 개념을 한 번 배우고 나서 처음 기출문제를 푸는 시점과 이미 기출문제를 충분히 풀어봤는데도 고난이도의 4점 문제는 풀 듯 말 듯 한 애매한 시점입니다. 저라고 예외는 아니었습니다. 이 책은 제가 수능을 준비하던 그 시절 스스로도 가장 필요성을 느꼈던 바로 그 책입니다.

수학을 잘하는 데에 개념이 중요하다는 말은 많이 하지만, 수능을 준비하면서 이 말에 괴리감을 느낄 때가 많습니다. 이는 기출문제를 공부할 때 같이 볼 만한 제대로 된 실전 개념서가 없기 때문입니다. 시중의 개념서는 독자들이 개념을 처음 배운다는 가정 하에 모든 기초적인 개념을 정해진 교육과정의 틀에 맞춰 하나도 빠짐없이 다루는 경우가 대부분입니다. 그러다 보니 실전적인 문제를 풀기 위해 필요한 유기적인 논리를 담아내지 못합니다.

『고등수학의 확장:Light』는 기존 개념서의 그런 한계를 극복하는 책입니다. 이 책은 고등학교 교육과정에 해당하는 미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ, 확률과 통계, 기하와 벡터의 기본적인 개념을 한 번 이상 학습한 학생들이 본격적으로 기출문제를 공부하는 시점에 볼 수 있도록 구성되어 있습니다.

결코 이 책에서 고등학교 수학의 모든 것을 다 다루겠다고 욕심 부리지 않습니다. 애초에, 수능을 잘 보기에 충분한 만큼의 수학 실력을 처음부터 끝까지 책 한 권으로 다 쌓을 수 있게 해주겠다는 것 자체가 말이 안 됩니다. 개념을 아직 배우지 않은 사람과 개념을 이미 배운 사람이 서있는 위치는 분명하게 다른데 말입니다.

그래서 이 책에서는 중요한 것과 그렇지 않은 것을 구별하는 데 많은 심혈을 기울였습니다. 기초적인 개념은 과감하게 생략했지만 그렇다고 책의 내용이 무진장 어렵기만 한 것도 아닙니다. 수학을 잘하기 위해 필요한 것은 '교육과정의 수준을 뛰어넘는 화려한 기술'보다는 '일관적이고 유기적인 논리 체계'라는 것을 잘 알기에, 쓸데없는 허세를 부리지 않습니다. 꼭 그래야 하는 경우가 아니라면 교과과

정의 수준을 뛰어넘는 어려운 내용을 다루지 않고, 반면에 쉬운 개념이라도 실전적으로 중요한 것이라면 하나도 빠짐없이 다루고 있습니다.

수능 수학을 바라보는 관점과 관련하여 몇 가지 논란거리가 있습니다. 그 중의 하나는 '논리적'이라는 단어로 대표되는 주제입니다. 이 말과 관련된 오해는 상당히 널리 퍼져있는 것처럼 보입니다. 과연 수식을 이용한 풀이만이 논리적인 풀이일까요? 논리적으로 푼다는 것이 수식만을 이용해 푸는 것을 의미한다면 고등학교 수학의 기초는 붕괴합니다. 중요한 것은 개념 또는 문제에 담겨있는 수학적 본질입니다. 수식이라는 것은 이것을 파악하기 위한 한 가지 도구에 지나지 않습니다. 그럼에도 대부분의 책들이 기존의 책과 차별화한다며 개념 설명과 해설을 수식으로 가득 채워놓고 정작 핵심적인 본질은 놓치는 모습을 보면서 도저히 안타까움을 참을 수 없습니다.

저는 수학을 대할 때 언제나 주어진 상황에 내재된 본질적인 단순함을 찾아내려고 노력합니다. 이 책의 해설에서 그런 태도를 특히 많이 느낄 수 있을 것입니다. 사람들이 흔히 '간단한 풀이'라고 내미는 것들은 따지고 보면 그와 같은 풀이를 구사하기 위해 사전 지식이 필요하거나 평범한 학생이 가질 수 있는 수준의 것을 뛰어넘는 직관을 필요로 할 때가 많습니다. 제가 추구하는 풀이는 그런 종류의 것이 아닙니다. 어느 검토자의 말처럼, 소위 '간지가 폭발하는' 그런 멋진 풀이가 아니라 보편적인 논리 흐름에 딱 들어맞는 자연스러운 풀이를 추구합니다.

제가 지난 몇 년 간의 공부와 경험을 통해 갖추게 된 수학적 통찰력이 『고등수학의 확장:Light』에 모두 담겨있습니다. 이 책에 담겨있는 논리는 시중의 그 어떤 교재보다도 우수하다고 자신할 수 있습니다.

이 책을 쓰면서 가끔씩 한 생각이 있습니다. '내가 수능을 준비할 때 이런 책이 있었다면 수학으로 고민하는 일이 훨씬 덜하지 않았을까.'

"제가 수능을 공부할 때에는 지금의 제가 없었지만, 지금 여러분에게는 제가 있습니다."

이 책의 구성

이 책은 고등학교 교육과정에 해당하는 미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ, 확률과 통계, 기하와 벡터의 기본적인 개념을 한 번 이상 학습한 학생들이 본격적으로 기출문제를 공부하는 시점에 볼 수 있도록 구성되어 있다. 문제를 해결하기 위해 필요한 실전적인 논리를 중심으로 개념 설명을 구성하고, 수능과 평가원에 출제된 문항들 중 개념적으로 중요한 모든 문항을 연습문제에 수록해 놓았다. 기출문제를 처음 공부하는 사람부터 이미 기출문제를 외울 만큼 여러 차례 풀어본 사람까지 누구나 얻어가는 부분이 있도록 고심해서 구성했다.

본문 (개념 설명)

일단 기본적인 개념과 기본적인 계산력이 어느 정도 자리를 잡은 뒤에는 논리력이 기출문제의 해결 여부를 결정하는 주요한 제한 요인이다. 그래서 이 책에서는 개념의 계산적인 측면보다는 논리적인 측면을 중심적으로 다룬다. 기초적인 개념은 과감하게 생략했지만 그렇다고 책의 내용이 무진장 어렵기만 한 것도 아니다. 꼭 필요한 경우가 아니라면 굳이 교육과정의 수준을 뛰어넘는 어려운 내용을 다루지 않으며, 쉬운 개념이라도 실전적으로 중요한 내용이라면 하나도 빠짐없이 다룬다.

예제

많이 들어봤겠지만, 이런 말이 있다.

'백문불여일견(百聞不如一見, a picture is worth a thousand words).'

백 번 듣는 것이 한 번 보는 것만 못하다는 뜻이다. 수학 공부도 마찬가지이다. 개념을 설명할 때 원론적인 수준에서 그치기보다는 그 개념을 실제로 문제에 적용하는 모습을 보여주는 것이 이해가 더 빠를 수 있다. 이 책에서는

(1) 해당 개념을 이해하는 데 도움을 주는 문제

(2) 해당 개념이 풀이의 핵심이 되는 문제

(3) 해당 개념을 적용하는 연습을 가볍게 할 수 있는 문제

등을 본문 중간에 예제로 실어놓았다. 본문을 공부하면서 마주치는 모든 예제를 풀어보고, 맞았든 틀렸든 반드시 해설을 읽어보자.

연습문제

각 본문의 끝에는 연습문제가 있다. 대부분은 기출문제이지만 책이 완결성을 갖출 수 있도록 새로이 만든 문제들도 있다.

개념문제 : 개념을 문제에 적용하는 연습을 할 수 있다. 반드시 수능 유형의 문제들로만 구성되어 있지는 않으며, 난이도는 대체로 쉬운 편이지만 중요한 문제들이 많다.

수능 기본문제 : 개념을 배운 그대로 적용하기만 하면 풀 수 있는 문제들로 이루어져 있다.

수능 연습문제 : 약간의 사고력과 논리력을 필요로 하지만 개념을 이해했으면 충분히 풀 수 있는 문제들로 이루어져 있다. 문제를 해결하는 능력을 훈련하기에 가장 좋은 문제들이다.

수능 발전문제 : 고도의 사고력과 논리력을 필요로 하는 문제들로 이루어져 있다. 복합적인 개념을 다루는 경우가 많아, 기출문제를 처음 푸는 학생이거나 기출문제에 익숙하지 않은 학생들은 이 책을 두 번째 볼 때 도전해보는 것이 좋다.

이 책의 학습방법

Case 1 : 기출문제를 처음 풀어보는 현역

[1] 1회독

① **개념 공부** : 이미 잘 알고 있는 개념과 그렇지 않은 개념이 뒤섞여있을 것이다. 기초적인 개념은 복습한다는 느낌으로 공부하고, 전에 보지 못했던 새로운 개념은 그것이 나오게 된 배경과 그것이 담고 있는 논리를 이해하는 데에 집중하자.

② **연습문제 공부** : 개념문제, 수능 기본문제, 수능 연습문제만 풀도록 하자. 개념설명 부분에서 공부한 내용을 바탕으로 문제에 접근하되, 자신만의 논리가 떠오른다면 그것을 그대로 활용해서 풀어도 상관없다. 계산으로 밀어붙여서 해결하든 직관과 논리적 비약을 동원해서 해결하든 그건 자유이다. 해설은 절대로 보지 않는 것을 원칙으로 한다. 어떠한 방법으로 풀든 괜찮으니까 최대한 많이 고민을 해보고, 그래도 못 푸는 문제는 우선 넘어간다.

③ **그 외** : 기출문제를 처음 푸는 시점의 학생이라면 개념이 명확하게 잡혀있지 않거나 계산력이 부족할 수도 있다. 기초적인 개념을 복습하고 계산력을 기를 수 있는 문제집을 하나 골라서 이 책과 같이 병행하는 것이 좋다.

[2] 2회독

① **개념 공부** : 이 책을 두 번째 볼 때는 처음 본다고 느끼는 개념이 없어야 한다. 한 단원이 끝날 때마다 잠시 멈춰 서서 내용이 전개되는 전체적인 흐름을 되새겨보자. 내용이 전개되는 방식에서 기존의 책과 다르게 느끼는 부분이 많을 것이다.

② **연습문제 공부** : 개념문제, 수능 기본문제, 수능 연습문제를 한 번씩 다시 풀어보고, 수능 발전문제도 도전해본다. 개념설명 부분에서 공부한 논리를 활용하여 문제를 해결하기 위해 노력해보자. 아예 답을 내지 못한 문제나, 풀기는 풀었는데 출제 의도와 다른 방법으로 푼 것 같다는 느낌이 드는 문제가 있다면 해설을 살펴봐도 좋다. 누군가 질문을 받아줄 사람이 있다면 먼저 그 사람에게 말로 설명을 듣고 해설을 공부하는 것이 낫다.

Case 2 : 기출문제를 이미 풀어본 현역 또는 N수생

[1] 1회독

① **개념 공부** : 대부분 이미 알고 있는 개념들이겠지만, 그렇다고 결코 가볍게 여기지는 말자. 자신만의 관점과 다르게 전개되는 내용이 있다면 두 관점에 각각 어떤 장점과 어떤 단점이 있을지 고민하면서 공부하는 것이 좋다. 책을 보지 않고도 주요 개념을 써내려갈 수 있을 정도로 전체적인 흐름을 명확하게 이해하고 기억해야 한다.

② **연습문제 공부** : 개념문제, 수능 기본문제, 수능 연습문제, 수능 발전문제를 모두 푼다. 문제에서 핵심적인 논리가 무엇이고 그 논리가 앞에서 살펴본 개념설명과 어떤 방식으로 연결되는지 고민해보자.

[2] 2회독

① **개념 공부** : 개념설명 부분을 다시 공부할 필요는 없다. 문제를 풀면서 명확하게 기억나지 않는 개념이 있을 때 찾아보는 정도면 충분하다.

② **연습문제 공부** : 수능 연습문제, 수능 발전문제 위주로 한 번씩 다시 풀어보고, 해설과 자신의 풀이를 비교해본다. 여러 가지 방법으로 풀 수 있는 문제들의 경우 해설에 간단하게라도 언급이 되어 있는 경우가 많은데, 각 방법이 논리적으로는 얼마나 완벽하고 직관적으로는 얼마나 이해하기 쉬운지, 시험장에서 자신이 쓸 수 있을 것 같은 방법은 어떤 것인지 고민하면서 공부하자.

③ **그 외** : 실전 모의고사 등을 병행하는 것이 좋다. 이 책의 논리와 어긋나는 문제가 있더라도 열린 마음으로 수용하자. 다만, 지나치다 싶을 정도의 문제는 자기 자신을 믿고 과감하게 버리는 결단력이 필요하다.

미분 INTRO

고등학교 수학에서 주된 관심을 가지고 다루는 함수는 대부분 실수로 이루어진 집합에서 실수로 이루어진 집합으로 가는 함수들이다. 그래프는 이러한 함수를 다룰 때 강력한 도구가 된다. 함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하거나, 방정식을 풀거나, 부등식을 풀거나, 함수의 연속성 또는 미분가능성을 따지는 문제들은 그래프를 이용해서 해결할 수 있는 경우가 많다.

함수 → 함수의 그래프 →
- 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제
- 방정식과 관련된 문제
- 부등식과 관련된 문제
- 함수의 연속성 또는 미분가능성과 관련된 문제

그래서 고등학교에서 배우는 미적분은 그래프의 학문이다. 반드시 모든 문제를 그래프를 이용해서 풀어야 하는 것은 아니지만, 항상 적절한 때에 그래프를 쓸 준비가 되어 있어야 한다. 대체로, 수학적인 상황에 대한 관찰이 필요할 때에는 그래프를 활용하고 조건을 구체적으로 해석하는 과정에서는 수식을 활용하는 것이 좋다.

수학적인 상황에 대한 관찰 → 그래프 활용
조건을 구체적으로 해석 → 수식 활용

이 원칙을 마음에 담아두는 것이 상당히 중요하다. 시험장에서 수식으로 접근하려다 못 풀었던 문제가 사실은 그래프를 이용하면 쉽게 풀린다든가, 그래프는 적절히 활용했는데 답을 구하지 못한 문제가 사실은 간단한 수식만으로 쉽게 풀린다든가 하는 일이 있기 때문이다. 언제 그래프를 활용하고 언제 수식을 활용할지 고민될 때 위의 원칙을 떠올리는 것이 큰 도움이 된다.

이 책에서는 이와 같은 관점에 기초해서 내용을 전개한다. 미분 단원의 큰 흐름을 요약하면 다음과 같다.

① 함수의 그래프를 해석하는 기본적인 방법에 대해 공부한다.
② 여러 가지 기본적인 함수의 성질과 그래프에 대해 공부한다.
③ 미분을 이용해 일반적인 함수의 그래프를 그리는 방법을 공부한다.
④ 함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하거나, 방정식을 풀거나, 부등식을 풀거나, 함수의 연속성 또는 미분가능성을 따지는 방법을 공부한다.

본격적인 이야기는 함수의 그래프부터 시작한다.

MEMO

Ⅵ 삼각함수의 평면도형에의 활용

삼각함수와 관련된 문제는 평면도형의 기하학적 요소와 결합하여 출제되는 경우가 많다. 평면도형을 제시하고 이로부터 삼각함수의 값을 찾도록 하는 문제나, 평면도형을 제시하고 길이나 넓이 등을 삼각함수가 포함된 식으로 표현하도록 하는 문제 등이 대표적이다. 이런 문제를 풀기 위해서는 길이를 이용해 각을 표현하는 방법과 거꾸로 각을 이용해 길이를 표현하는 방법을 자유자재로 다룰 수 있어야 한다. 기본적으로 중학교에서 배우는 유클리드 기하학에 대한 지식을 필요로 하는 것이지만 그 내용을 여기에서 전부 다룰 수는 없으므로 문제를 풀면서 자주 마주치게 되는 상황들 위주로 살펴본다. 독자들이 할 일은 이들을 적절하게 결합하여 상황에 알맞게 활용하는 것이다.

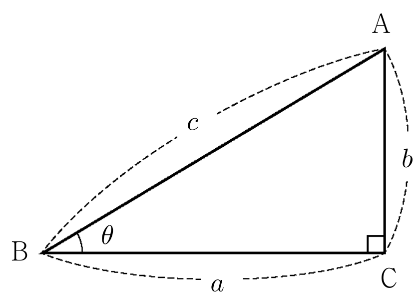
직각삼각형

각에 대한 삼각함수와 선분의 길이를 연관 짓는 가장 기본적인 방법은 직각삼각형에서 삼각비의 정의를 이용하는 것이다.

① 삼각비의 정의로부터

$$\sin\theta = \frac{b}{c},\ \cos\theta = \frac{a}{c},\ \tan\theta = \frac{b}{a}$$

이다.



② 위의 관계를 이용하면 삼각형을 이루는 각 변의 길이를 어느 한 변의 길이와 어느 한 각에 대한 삼각함수를 이용해 표현할 수 있다.

$\overline{AB}$ 의 값을 알 때 : $a = c\cos\theta$, $b = c\sin\theta$

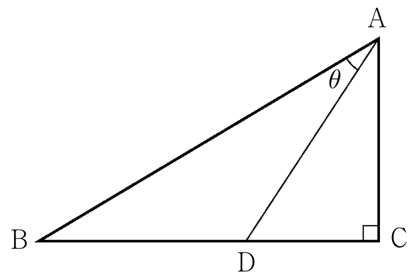
$\overline{BC}$ 의 값을 알 때 : $b = a\tan\theta$, $c = \dfrac{a}{\cos\theta}$

$\overline{CA}$ 의 값을 알 때 : $c = \dfrac{b}{\sin\theta}$, $a = \dfrac{b}{\tan\theta}$

※ Remark

직각삼각형에서 삼각비의 정의를 이용하겠다는 것이 실전에서 활용하기에는 너무 원론적인 수준의 방법 아니야? 라고 생각할 수 있지만, 그렇지 않다. 직각삼각형에서 삼각비의 정의를 이용하는 방법은 활용 범위가 상당히 넓다. 삼각함수 덧셈정리의 도움을 받을 수 있다면 특히 더 그렇다.

예를 들어, 다음과 같은 상황에서 $\angle \mathrm{BAD} = \theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하는 문제를 생각해보자.



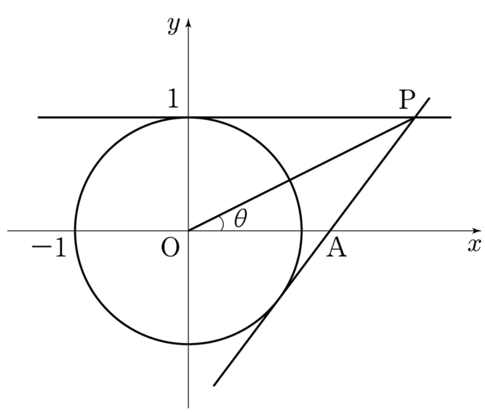
$\angle \mathrm{BAC} = \alpha$, $\angle \mathrm{DAC} = \beta$라 하면 두 직각삼각형 ABC, ADC에서 각각 $\tan\alpha$, $\tan\beta$의 값을 구할 수 있고,

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

와 같이 계산할 수 있다.

예제 1 | 2014학년도 예비시행 B형 16번

그림과 같이 직선 $y=1$위의 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하고, $\angle \mathrm{AOP} = \theta$라 하자. $\overline{\mathrm{OA}} = \frac{5}{4}$일 때, $\tan 3\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$이다.)

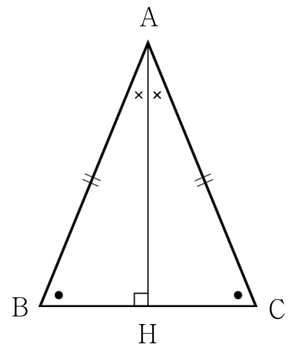


① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

MEMO

이등변삼각형

$\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC 에 대하여 꼭짓점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.



그러면 다음과 같은 성질이 성립한다.

$$\triangle AHB \equiv \triangle AHC \quad \text{(RHS 합동)}$$

$$\angle BAH = \angle CAH = \frac{1}{2}\angle BAC\,,\ \overline{BH}=\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{BC}$$

가 성립한다. 삼각형 ABH 가 직각삼각형이므로 각 변의 길이를 ∠ABH 또는 ∠BAH 에 대한 삼각함수를 이용하여 표현할 수 있다.

※ Remark

제2코사인 법칙

세 변의 길이 사이에 뚜렷한 관계가 없는 일반적인 삼각형에서 각과 길이 사이의 관계를 이용할 때에는 다음과 같은 공식을 활용할 수 있다.

정리

제2코사인 법칙

삼각형 ABC 의 세 변의 길이가 각각 a, b, c 일 때[6], 다음이 성립한다.

① $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

② $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

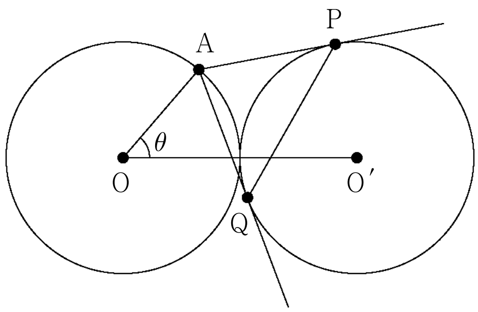
6) 삼각형 ABC 에서 각 A 와 마주보는 변의 길이를 a 로 나타내고, b, c 도 각각 마찬가지이다. 즉,
$a=\overline{BC}$, $b=\overline{CA}$, $c=\overline{AB}$

MEMO

MEMO

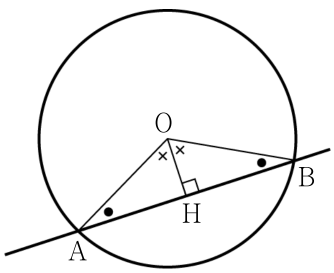
예제 2 | 2014학년도 6월 모의평가 B형 21번

그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O′이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A에서 원 O′에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\angle AOO' = \theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{PQ}}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



① 2　② $\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{3}$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우



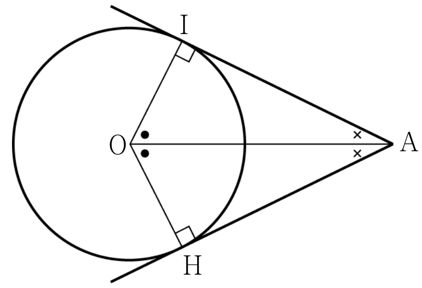
삼각형 OAB가 이등변삼각형이므로 꼭짓점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 다음과 같은 성질이 성립한다.

$$\overline{AH} = \overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

삼각형 OAH는 직각삼각형이므로 각 변의 길이를 $\angle OAH$ 또는 $\angle AOH$에 대한 삼각함수를 이용하여 표현할 수 있다.

MEMO

원과 직선이 접하는 경우



원과 직선이 접하는 점을 각각 H, I라 하면 다음과 같은 성질이 성립한다.

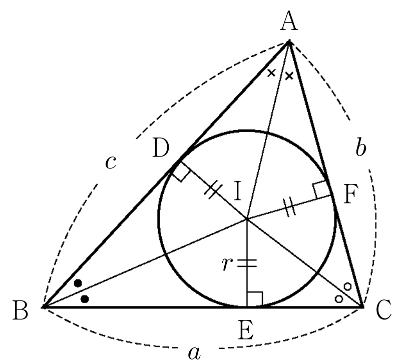
$\angle \mathrm{OHA} = \angle \mathrm{OIA} = 90°$, $\angle \mathrm{HAI} + \angle \mathrm{HOI} = 180°$

$\triangle \mathrm{OAH} \equiv \triangle \mathrm{OAI}$ (RHS 합동)

$\angle \mathrm{OAH} = \angle \mathrm{OAI} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{HAI}$, $\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{AI}}$

삼각형 OAH는 직각삼각형이므로 각 변의 길이를 $\angle \mathrm{OAH}$ 또는 $\angle \mathrm{AOH}$에 대한 삼각함수를 이용하여 표현할 수 있다.

내접원과 내심의 성질



삼각형 ABC의 내심이 I일 때, 다음과 같은 성질이 성립한다.

$\overline{\mathrm{ID}} = \overline{\mathrm{IE}} = \overline{\mathrm{IF}}$

$\triangle \mathrm{IAF} \equiv \triangle \mathrm{IAD}$, $\triangle \mathrm{IBD} \equiv \triangle \mathrm{IBE}$, $\triangle \mathrm{ICE} \equiv \triangle \mathrm{ICF}$ (RHS 합동)

$\angle \mathrm{IAF} = \angle \mathrm{IAD}$, $\angle \mathrm{IBD} = \angle \mathrm{IBE}$, $\angle \mathrm{ICE} = \angle \mathrm{ICF}$

$\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BE}}$, $\overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{CF}}$

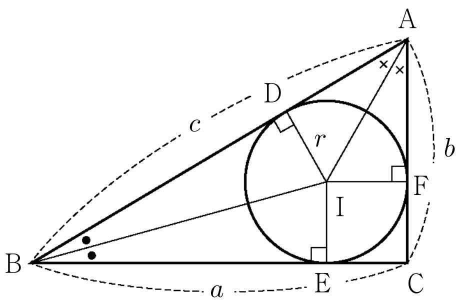
삼각형의 넓이 S와 세 변의 길이를 모두 알 때, 넓이를 이용하여 내접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.7)

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \qquad \therefore\ r = \frac{2S}{a+b+c}$$

7) 세 삼각형 IAB, IBC, ICA의 넓이의 합과 삼각형 ABC의 넓이가 같음을 이용한 것이다.

직각삼각형의 내접원

직각삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 구할 때 다음과 같은 방식들이 자주 활용된다. 삼각함수와 결합된 문제에서는 주로 세 번째 방식을 활용한다.



① 넓이 관계를 이용

직각삼각형 ABC 의 밑변과 높이를 각각 $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$ 로 생각하면 삼각형 ABC 의 넓이 S 는

$$S=\frac{1}{2}ab \quad \cdots \text{㉠}$$

와 같다. 한편, 내접원의 반지름의 길이를 이용해서 삼각형 ABC 의 넓이를 표현하면

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c) \quad \cdots \text{㉡}$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 r 의 값을 구할 수 있다.

② 길이 관계를 이용

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BD}}$ 인데 $\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AF}}=b-r$, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BE}}=a-r$ 이므로

$$c=(b-r)+(a-r) \qquad \therefore\ r=\frac{a+b-c}{2}$$

이다.

③ 삼각함수를 이용

삼각형 IBE 는 직각삼각형이므로

$$\tan(\angle \mathrm{IBE})=\frac{\overline{\mathrm{EI}}}{\overline{\mathrm{BE}}}=\frac{r}{a-r}$$

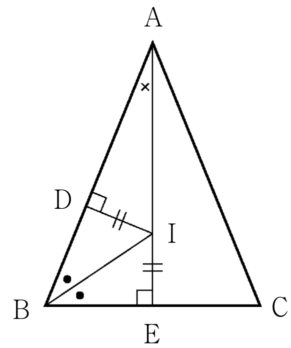
이 성립한다. 이 식을 정리하면 r 의 값을 $\angle\mathrm{IBE}$ 에 대한 삼각함수를 이용하여 표현할 수 있다.

MEMO

MEMO

이등변삼각형의 내접원

이등변삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 구할 때는 다음과 같은 방식들이 자주 활용된다. 삼각함수와 결합된 문제에서는 주로 두 번째 방식을 활용한다.



① 닮음을 이용

삼각형 AEB와 삼각형 ADI는 닮음이므로 $\angle \mathrm{IAD}$에 대한 삼각비로부터

$$\frac{\overline{\mathrm{ID}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{AE}}}$$

가 성립한다. 이 식을 정리하면 r의 값을 구할 수 있다.

② 삼각함수를 이용

삼각형 IEB는 직각삼각형이므로

$$r=\overline{\mathrm{BE}}\tan(\angle \mathrm{IBE})$$

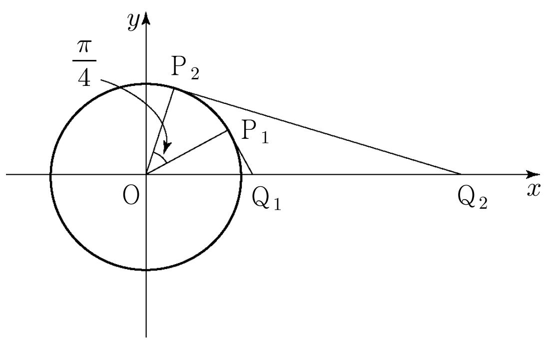
와 같이 표현할 수 있다.

Ⅵ 삼각함수의 평면도형에의 활용

수능 기본문제

문제 1 | 2007학년도 수능 가형 미분과 적분 28번

그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P_1에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_1이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{OQ}_1$의 넓이는 $\frac{1}{4}$이다. 점 P_1을 원점 O를 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시킨 점을 P_2라 하고, 점 P_2에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_2라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_2\mathrm{OQ}_2$의 넓이는? (단, 점 P_1은 제1사분면 위의 점이다.)

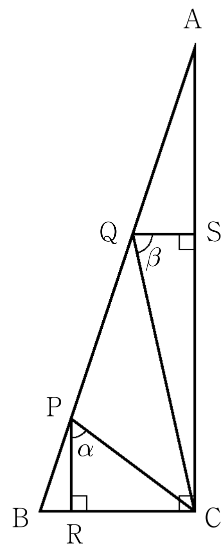


① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

문제 2 | 2014년 3월 교육청 B형 27번

$\overline{\mathrm{AC}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=1$, $\angle \mathrm{C}=90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $4:1$로 내분하는 점을 P, 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R, 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 S라 하자.

$\angle \mathrm{CPR}=\alpha$, $\angle \mathrm{CQS}=\beta$라 할 때, $\tan(\beta-\alpha)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

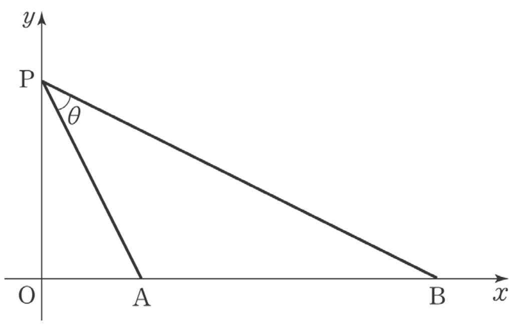


VI 삼각함수의 평면도형에의 활용

수능 연습문제

문제 3 | 2005학년도 9월 모의평가 가형 미분과 적분 30번

그림과 같이 x축 위의 두 점 $\mathrm{A}(20, 0)$, $\mathrm{B}(80, 0)$와 양의 y축 위의 점 $\mathrm{P}(0, y)$에 대하여 $\angle \mathrm{APB} = \theta$라고 할 때, $\tan\theta$의 값이 최대가 되는 점 P의 y좌표를 구하시오.

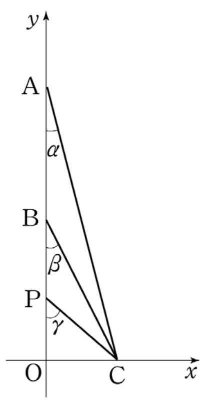


문제 4 | 2006학년도 6월 모의평가 가형 미분과 적분 28번

그림과 같이 y축 위의 두 점 $\mathrm{A}(0, 4)$, $\mathrm{B}(0, 2)$와 x축 위의 점 $\mathrm{C}(1, 0)$에 대하여

$\angle \mathrm{CAO} = \alpha$, $\angle \mathrm{CBO} = \beta$

라 하자. 양의 y축 위의 점 $\mathrm{P}(0, y)$에 대하여 $\angle \mathrm{CPO} = \gamma$라 할 때, $\alpha + \beta = \gamma$가 되는 점 P의 y좌표는?

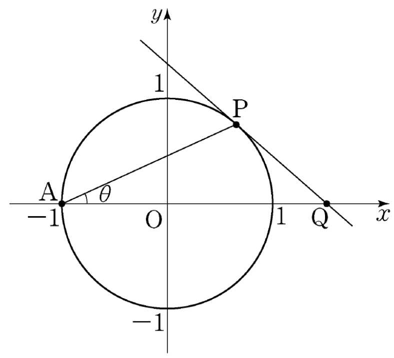


① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{8}{7}$ ⑤ $\frac{9}{8}$

문제 5 | 2010학년도 수능 가형 미분과 적분 28번

그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$과 원점 O에 대하여 $\angle \mathrm{PAO} = \theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}} - \overline{\mathrm{OQ}}}{\theta - \frac{\pi}{4}}$의 값은?

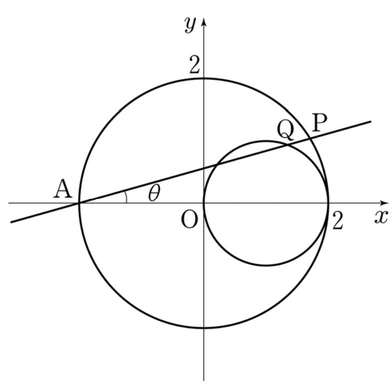
(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

문제 6 | 2013학년도 9월 모의평가 가형 20번

그림과 같이 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{OAP} = \theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^2}$의 값은?



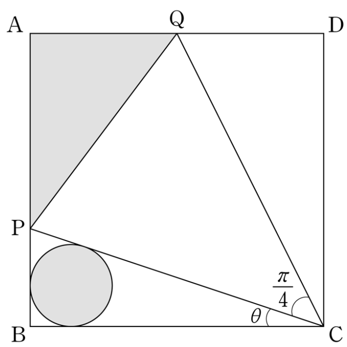
① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

문제 7 | 2014학년도 예비시행 B형 29번

한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 변 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{BCP}=\theta$라 하고, 변 AD 위의 점 Q를 $\angle\mathrm{PCQ}=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡는다. 삼각형 APQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 BCP의 내접원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\pi$$

이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

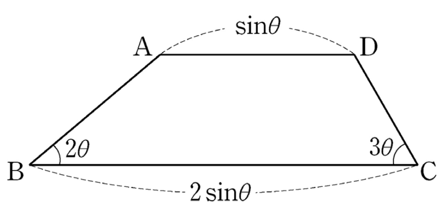


문제 8 | 2015학년도 6월 모의평가 B형 29번

그림과 같이 사다리꼴 ABCD에서 변 AD와 변 BC가 평행하고 $\angle\mathrm{B}=2\theta$, $\angle\mathrm{C}=3\theta$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sin\theta$이다.

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$

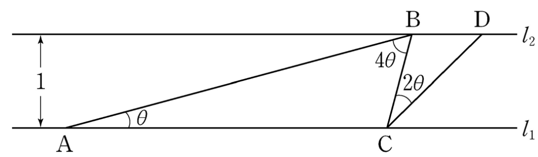
이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



문제 9 | 2015학년도 9월 모의평가 B형 28번

그림과 같이 서로 평행한 두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리가 1이다. 직선 l_1 위의 점 A에 대하여 직선 l_2 위에 점 B를 선분 AB와 직선 l_1이 이루는 각의 크기가 θ가 되도록 잡고, 직선 l_1 위에 점 C를 $\angle\mathrm{ABC}=4\theta$가 되도록 잡는다. 직선 l_2 위에 점 D를 $\angle\mathrm{BCD}=2\theta$이고 선분 CD가 선분 AB와 만나지 않도록 잡는다.

삼각형 ABC의 넓이를 T_1, 삼각형 BCD의 넓이를 T_2라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{T_1}{T_2}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{10}$)

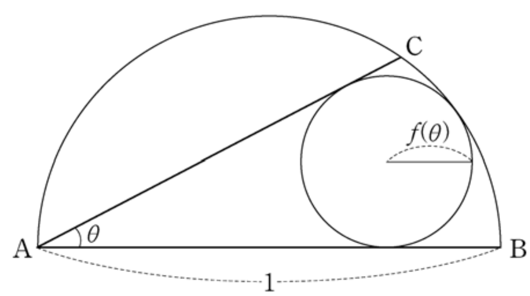


문제 10 | 2016학년도 6월 모의평가 B형 29번

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\alpha$$

이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

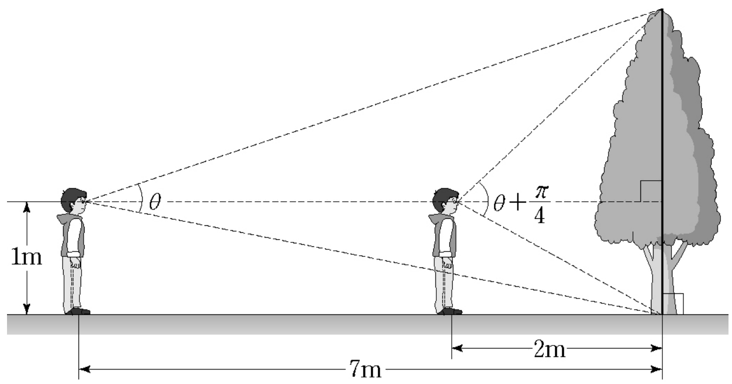


MEMO

수능 발전문제

문제 11 | 2009학년도 6월 모의평가 가형 미분과 적분 29번

눈높이가 1m인 어린이가 나무로부터 7m 떨어진 지점에서 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 θ이었다. 나무로부터 2m 떨어진 지점까지 다가가서 나무를 바라보았더니 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 $\theta+\frac{\pi}{4}$가 되었다. 나무의 높이는 $a(\mathrm{m})$ 또는 $b(\mathrm{m})$이다. $a+b$의 값은?[8)]



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

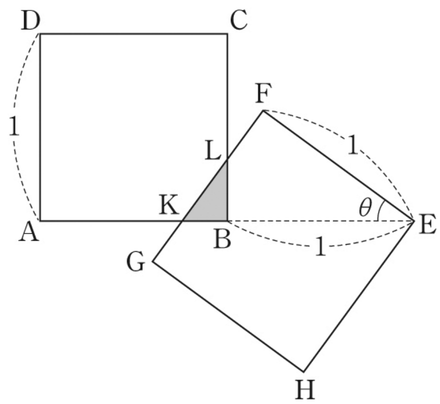
8) 계산이 좀 많아 보이지만 풀이의 방향 자체는 명확하다.
나무의 높이를 h로 설정하고 $\tan\theta$, $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$를 각각 h에 대한 식으로 나타내보자.

MEMO

문제 12 | 2009학년도 6월 모의평가 가형 미분과 적분 30번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 변 AB를 연장한 직선 위에 $\overline{\mathrm{BE}}=1$인 점 E가 있다. 점 E를 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH에 대하여 $\angle \mathrm{BEF}=\theta$일 때, 변 FG와 변 AB의 교점을 K, 변 FG와 변 BC의 교점을 L이라 하자. 삼각형 KBL의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{q}{p}$이다.

p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고, p, q는 서로소인 자연수이다.)

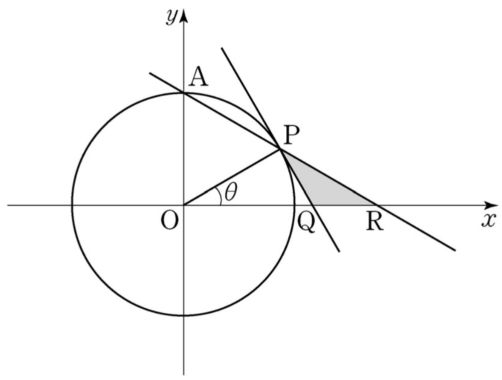


MEMO

문제 13 | 2011학년도 6월 모의평가 가형 미분과 적분 30번

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 $A(0, 1)$과 점 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R이라 하자. $\angle QOP = \theta$라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \alpha$일 때, 100α의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)[9]



9) 기하학적 감각이 뛰어나다면 주어진 수학적 상황을 명확하게 이해할 수 있을 것이다.
삼각형 PQR이 어떤 삼각형으로 보이는가?

문제 12

삼각형 BEL, FEL 에서 $\overline{BE}=\overline{FE}=1$, $\angle EBL=\angle EFL=90°$ 이고 선분 LE 는 공통이므로

$$\triangle BEL \equiv \triangle FEL$$

이다.

$$\therefore \angle BEL=\frac{\theta}{2},\ \overline{BL}=\overline{BE}\times\tan\frac{\theta}{2}=\tan\frac{\theta}{2} \quad \cdots ㉠$$

한편, $\angle EKF=\frac{\pi}{2}-\theta$ 이므로 $\angle BLK=\theta$ 이다.

$$\therefore \overline{BK}=\overline{BL}\times\tan\theta=\tan\frac{\theta}{2}\times\tan\theta \quad \cdots ㉡$$

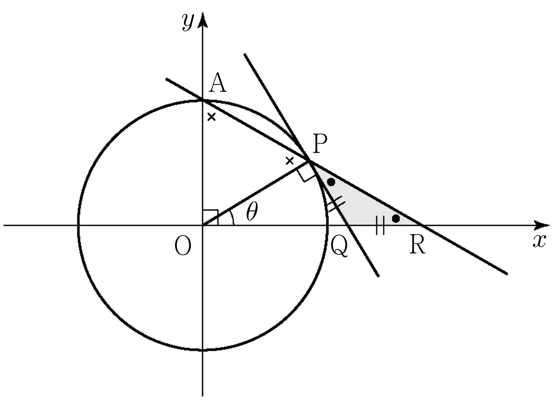
㉠, ㉡에 의해

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BK}\times\overline{BL}=\frac{1}{2}\times\tan^2\frac{\theta}{2}\times\tan\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{8}$$

답 : 65

문제 13



삼각형 OAP 는 이등변삼각형이므로 $\angle OAP=\angle OPA$ 이다. 삼각형 OAR 에서

$$\angle OAP+\angle PRQ=90° \quad \cdots ㉠$$

직선 $\overline{AR}$ 에서

$$\angle OPA+\angle QPR=90° \quad \cdots ㉡$$

$\angle OAP=\angle OPA$ 이므로 ㉠, ㉡에서 $\angle PRQ=\angle QPR$ 이다.

따라서 삼각형 PQR 은 $\overline{PQ}=\overline{QR}=\tan\theta$ $(\because \overline{PQ}=\overline{OP}\times\tan\theta)$인 이등변삼각형이다.

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{QR}\times\sin(\angle PQR)=\frac{1}{2}\tan^2\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{2}\tan^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\times\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\times\cos\theta=\frac{1}{2}$$

답 : 50

Ⅲ 미분계수의 기하학적 의미와 활용

미분계수의 기하학적 의미

함수의 미분계수는 주어진 상황의 맥락에 따라서 여러 가지 의미를 지닐 수 있다. 대수적인 관점에서는 함수의 변화율을 의미한다. 변화율로서의 미분계수는 물리학, 생물학, 화학 등을 비롯한 자연과학 분야나 경제학 등의 사회과학 분야에서 다양한 의미를 가지고 다양한 방식으로 활용된다. 예를 들어, 고전역학에서는 미분계수를 이용하여 변위, 속도, 가속도 등과 같은 여러 물리적 양들 사이의 관계를 규정한다.

이 단원에서는 미분계수가 가지는 기하학적 의미를 살펴보고, 접선의 정의와 성질을 살펴보자.

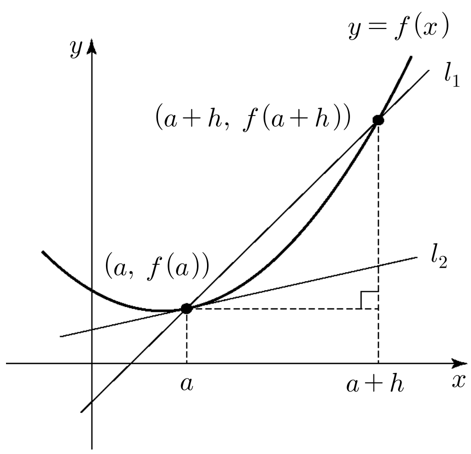
함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(a+h,\ f(a+h))$ 를 잇는 직선의 기울기를 나타낸다. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $h \to 0$ 일 때 이 값이 특정한 실수로 수렴하므로, 기하학적 관점에서는 점 $(a,\ f(a))$ 를 지나고 특정한 기울기 값을 가지는 직선을 하나 얻게 된다. 이 직선을 곡선 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 인 점에서의 접선이라고 정의[8)]하며,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

의 값이 이 직선의 기울기를 의미한다.



8) 수학적으로 접선을 일반화해서 정의하는 것은 쉬운 일이 아니다. 순수기하학에서 삼각형, 사각형, 원 등과 같은 평면도형을 다룰 때는 주어진 도형과 한 점에서만 만나는 직선을 접선이라고 정의한다. 만약 이를 해석기하학에서 다루는 접선에까지 적용되는 일반적인 정의로 받아들인다면, 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기의 절댓값이 1보다 작은 직선이 모두 $y=|x|$ 의 접선이 되는 문제가 생긴다. 뿐만 아니라, 거시적으로 보면 곡선의 접선이 그 곡선과 항상 한 점에서만 만나는 것도 아니므로 명백히 접선으로 보이는 것도 위의 정의에 따르면 접선이 아니게 된다.
이러한 이유로, 접선의 정의가 따로 존재한다고 받아들이기보다는 좌표평면 위의 곡선에 한해서 미분계수 자체가 접선을 정의한다고 생각하는 것이 더 맞다.

MEMO

MEMO

함수의 대칭성 · 주기성과 미분계수

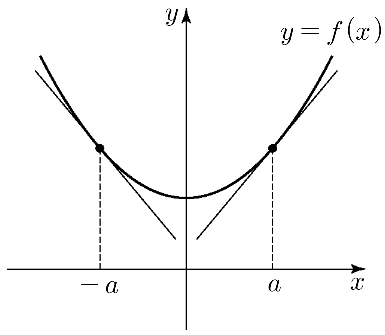
기하학적 관점에서 보면 미분계수는 접선의 기울기를 나타낸다. 따라서 어떤 함수가 대칭성 또는 주기성을 가지고 있으면 그 함수의 미분계수도 특정한 관계식을 만족한다. 몇 가지 간단한 경우를 살펴보자. 다음의 각 경우에서 따로 언급하지 않아도 함수 $f(x)$는 미분가능하다고 생각한다.

① 짝함수의 미분계수

함수 $f(x)$가 짝함수라 하자. 그러면 $f(-x)=f(x)$이므로 합성함수 미분법에 의해

$$-f'(-x)=f'(x) \qquad \therefore\ f'(-x)=-f'(x)$$

다음 그림은 이 관계식이 가지는 기하학적 의미를 표현한 것이다.



함수 $f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 $x=a$에서의 접선과 $x=-a$에서의 접선도 y축에 대하여 대칭이다. 따라서

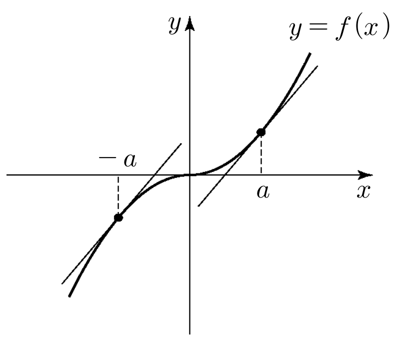
$$f'(-a)=-f'(a)$$

② 홀함수의 미분계수

함수 $f(x)$가 홀함수라 하자. 그러면 $f(-x)=-f(x)$이므로 합성함수 미분법에 의해

$$-f'(-x)=-f'(x) \qquad \therefore\ f'(-x)=f'(x)$$

다음 그림은 이 관계식이 가지는 기하학적 의미를 표현한 것이다.



함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $x=a$에서의 접선과 $x=-a$에서의 접선도 원점에 대하여 대칭이다. 따라서

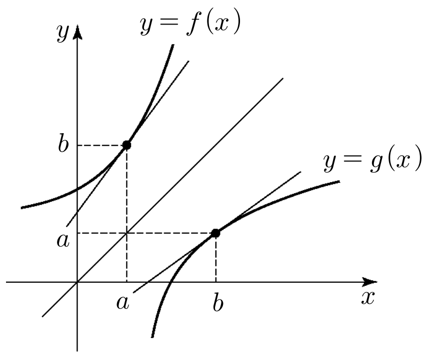
$$f'(-a)=f'(a)$$

③ 역함수의 미분계수

역함수가 존재하는 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 그러면 $f(g(x))=x$이므로 합성함수 미분법에 의해

$$f'(g(x))g'(x)=1 \qquad \therefore\ g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\ \ (\text{단, } f'(g(x))\neq 0)$$

다음 그림은 이 관계식이 가지는 기하학적 의미를 표현한 것이다.

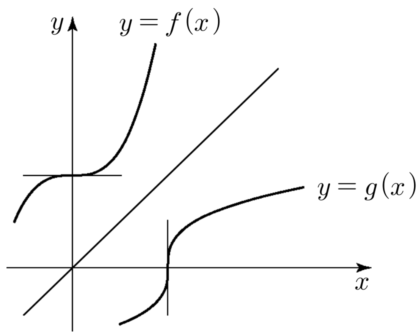


두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(b,\ a)$에서의 접선도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서

$$f'(a)\times g'(b)=1 \qquad \therefore\ g'(b)=\frac{1}{f'(a)}\ \ (\text{단, } f'(a)\neq 0)$$

※ Remark

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선이 x축에 평행하면 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(b,\ a)$에서의 접선은 y축에 평행하다. 그러면 이 점에서 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$가 $x=b$에서 미분불가능하다. 따라서 함수 $f(x)$가 정의역 전체에서 미분가능하다고 해도 함수 $g(x)$는 미분불가능한 점이 생길 수 있다.



④ 함수 $f(x)$가 주기가 p인 주기함수라 하자. 그러면 $f(x+p)=f(x)$이므로

$$f'(x+p)=f'(x)$$

이다. 이는 함수 $f'(x)$도 주기가 p인 주기함수임을 의미한다.

MEMO

MEMO

접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 접선의 정의에 따라

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)\ \cdots\ ㉠$$

와 같이 표현할 수 있다.

접선의 방정식을 구할 때는 항상 접점을 기준으로 식을 세운다. 접점의 좌표를 아는 경우에는 이를 ㉠에 그대로 대입해 접선의 방정식을 구하며, 접점의 좌표를 알지 못하는 경우에는 접점의 좌표를 미지수로 정하고 ㉠을 이용해 접선의 방정식을 세운 뒤 주어진 조건을 만족하도록 미지수의 값을 결정한다.

정리

접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 의 접선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.

① 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선 : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

② 곡선 $y=f(x)$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선 : $f'(a)=m$ 을 만족하는 a 의 값을 먼저 구한다.

③ 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 한 점에서 그은 접선 : 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$ 라 두고 이 점에서의 접선의 방정식을 세운 뒤, 이 접선이 주어진 점을 지날 조건을 이용해 a 의 값을 구한다.

※ Remark

일반적으로 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 접할 조건은

$$f(t)=g(t)\ \cdots\ ㉠ \qquad f'(t)=g'(t)\ \cdots\ ㉡$$

인 실수 t 가 존재하는 것이다. 각각 함숫값에 대한 조건(㉠)과 미분계수에 대한 조건(㉡)이며, 두 조건 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 t 의 값이 두 곡선이 접하는 점의 x 좌표이다.

함수의 볼록 · 오목과 접선

책의 초반부에서 위로 볼록한 함수와 아래로 볼록한 함수의 정의에 대해 살펴봤다. 여기에서는 위로 볼록한 함수와 아래로 볼록한 함수가 만족하는 성질을 접선과 관련지어 살펴본다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 위로 볼록이라고 하자. 그러면 임의의 실수 t에 대하여 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$f(x) \le f'(t)(x-t)+f(t)$ … ㉠

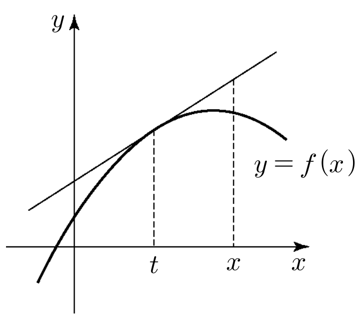
이 부등식을 해석하는 두 가지 방법을 살펴보자. 본질적으로는 동일한 방법이다.

① 접선의 방정식을 이용한 해석

㉠은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$의 상대적인 위치관계를 나타낸다. 여기에서 직선

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이다.



그런데 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이므로 t의 값에 관계없이 $x=t$에서의 접선이 항상 곡선보다 위에 있다. 따라서 ㉠이 성립한다.

② 직선의 기울기와 접선의 기울기를 이용한 해석

㉠을 정리하면

$f(x)-f(t) \le f'(t)(x-t)$

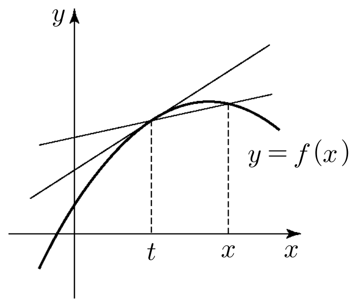
이다. $x=t$일 때는 좌변과 우변이 모두 0이므로 이 부등식이 자명하게 성립한다.

$x \ne t$일 때는

$x>t$일 때, $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t} \le f'(t)$

$x<t$일 때, $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t} \ge f'(t)$

와 같이 정리할 수 있다. 이 부등식들에서 좌변은 곡선 위의 두 점 $(x,\ f(x))$, $(t,\ f(t))$을 잇는 직선의 기울기를 의미하고, 우변은 곡선 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기를 의미한다.



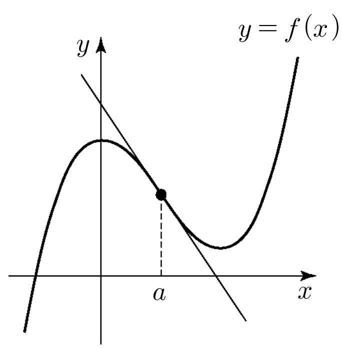
그런데 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이므로 앞에서 살펴본 두 부등식이 각각 성립한다.

함수 $f(x)$가 위로 볼록이면 ㉠이 성립하는 것을 살펴봤다. 그렇다면 거꾸로 ㉠이 성립할 때 함수 $f(x)$가 항상 위로 볼록이라고 말할 수 있을까? 이는 실수 t에 주어지는 제한 조건에 따라 다르다. ㉠이 임의의 실수 t에 대하여 성립하면 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다. 반면에 ㉠이 특정한 t에 대해서만 성립한다면 함수 $f(x)$는 위로 볼록이 아닐 수 있다.
그러므로 앞에서 살펴본 내용을 결과로서 외우기보다는, 부등식이 주어졌을 때 이를 접선의 방정식이나 기울기와 같은 도구를 이용해 해석하는 방법만 기억하면 충분하다.

변곡점에서의 접선

앞에서 살펴본 내용에서 중요한 수학적 사실을 발견할 수 있다. 위로 볼록한 곡선이나 아래로 볼록한 곡선에 의해 나누어지는 좌표평면의 두 영역 중 곡선에 둘러싸인 영역을 곡선의 안쪽, 곡선을 둘러싸는 영역을 곡선의 바깥쪽이라 정의하면, 곡선 위의 점에서 그은 접선은 항상 곡선의 바깥쪽에만 존재한다는 사실이다.
이는 다음과 같은 두 가지 수학적 결과를 가져온다.

① 변곡점에서의 접선의 형태
그림과 같이 위로 볼록한 부분과 아래로 볼록한 부분을 모두 포함하는 곡선을 생각해보자.

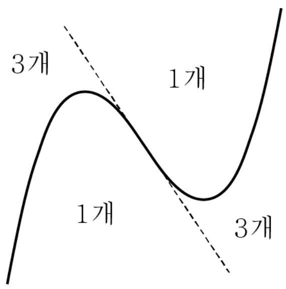


이 곡선의 변곡점의 x좌표를 a라 할 때, $x<a$인 구간에서는 곡선이 위로 볼록이므로 변곡점에서의 접선이 곡선보다 더 위쪽에 있어야 하고, $x>a$인 구간에서는 곡선이 아래로 볼록이므로 변곡점에서의 접선이 곡선보다 더 아래쪽에 있어야 한다. 이러한 이유로 변곡점에서의 접선은 곡선을 뚫고 지나가는 특별한 형태를 가지게 된다.

② 곡선 위에 있지 않은 점에서 그을 수 있는 접선의 개수

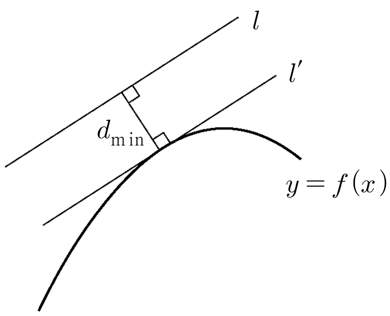
위로 볼록한 곡선이나 아래로 볼록한 곡선 위의 임의의 점에서 그은 접선은 항상 곡선의 바깥쪽에 존재하므로 곡선의 안쪽에 있는 점에서는 곡선에 접선을 그을 수 없다.[9) 다시 말해, 곡선 위에 있지 않은 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 그 점이 곡선을 기준으로 어느 영역에 속하느냐에 의해 결정된다. 그런데 위로 볼록한 부분과 아래로 볼록한 부분을 모두 포함하는 곡선에서는 변곡점에서의 접선을 기준으로 이 영역이 구분되므로, 곡선 위에 있지 않은 점에서 그을 수 있는 접선의 개수를 결정할 때도 변곡점에서의 접선이 핵심적인 기준이 된다.

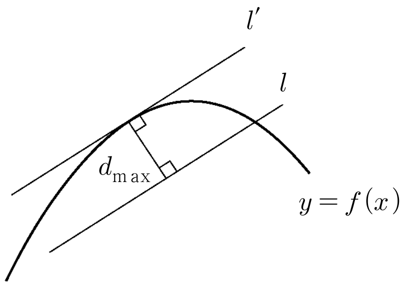
예를 들어, 다음은 삼차함수가 나타내는 곡선에 대하여 좌표평면의 각 영역에 속하는 점에서 이 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수를 나타낸 것이다.



곡선 위의 점에서 직선까지의 거리의 최댓값 · 최솟값

곡선 위를 움직이는 점에서 고정된 직선까지의 거리의 최댓값 또는 최솟값을 찾을 때, 접선의 개념을 활용할 수 있다.





① 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 위치관계가 위의 왼쪽 그림처럼 주어졌다고 하자. 그러면 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직이는 점에서 직선 l까지의 거리의 최솟값은 두 직선 l, l' 사이의 거리와 같다. 여기서 직선 l'은 직선 l과 같은 기울기를 가지는 접선이다.

② 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 위치관계가 위의 오른쪽 그림처럼 주어졌다고 하자. 그러면 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직이는 점에서 직선 l까지의 거리의 최댓값은 두 직선 l, l' 사이의 거리와 같다. 여기서 직선 l'은 직선 l과 같은 기울기를 가지는 접선이다.

9) 곡선 밖의 점에서 그은 접선이라는 말은 써도 곡선 안의 점에서 그은 접선이라는 말은 쓰지 않는다. 곡선 안에서는 접선을 그을 수 없으니까 당연하다.

MEMO

MEMO

평균값의 정리

평균값의 정리의 내용을 기하학적으로 풀어쓰면, 곡선 위의 서로 다른 두 점을 잇는 직선과 같은 기울기를 가지는 접선이 적어도 하나 이상 존재한다는 말이 된다.

미적분학과 관련된 많은 정리들이 평균값의 정리를 이용해서 도출된다. 그래서 평균값의 정리는 수학적으로 중요한 의미를 가진다. 다만 정리 자체가 다소 원론적인 성격을 가지기 때문에 수능에서는 직접적인 주제로 다루어지기보다는 주로 수학적 상황에 대한 직관적 판단을 뒷받침하는 도구로 많이 활용된다. 따라서 평균값의 정리를 단순히 수식적인 결과로만 이해하기보다는 평균값의 정리에 담긴 기하학적인 의미를 접선의 개념과 관련지어 가슴깊이 새겨두는 것이 좋다.

함수 $f(x)$가 미분가능하다고 하자. 그러면 함수 $f(x)$는 연속함수이기도 하므로 최대 · 최소의 정리에 의해 임의의 닫힌구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 이를 이용해 롤의 정리를 이끌어내고, 다시 롤의 정리를 이용해 평균값의 정리를 이끌어낼 수 있다.

정리

롤의 정리 (Rolle's Theorem)

구간 $[a, b]$에서 연속이고 구간 (a, b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

인 실수 c가 구간 (a, b)에 적어도 하나 이상 존재한다.

롤의 정리에 대한 증명은 생략한다. 궁금한 사람은 교과서를 찾아보자.

평균값의 정리는 다음과 같다.

정리

평균값의 정리 (Mean Value Theorem)

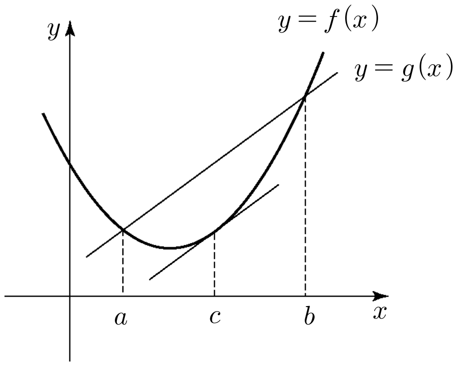
구간 $[a, b]$에서 연속이고 구간 (a, b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

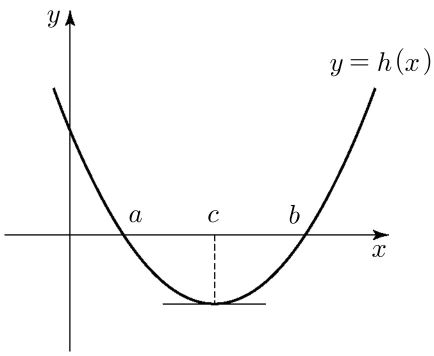
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 실수 c가 구간 (a, b)에 적어도 하나 이상 존재한다.

(증명)

그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.





함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$h(a)=0,\ h(b)=0$$

인 것은 쉽게 확인할 수 있다. 함수 $h(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로 롤의 정리에 의해

$$h'(c)=0$$

인 실수 c가 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 이상 존재한다. 이 식을 정리하면

$$f'(c)-g'(c)=0,\quad f'(c)=g'(c)\qquad \therefore\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

예제 1

$x>0$일 때, 평균값의 정리를 이용해

$$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$$

임을 보이시오.

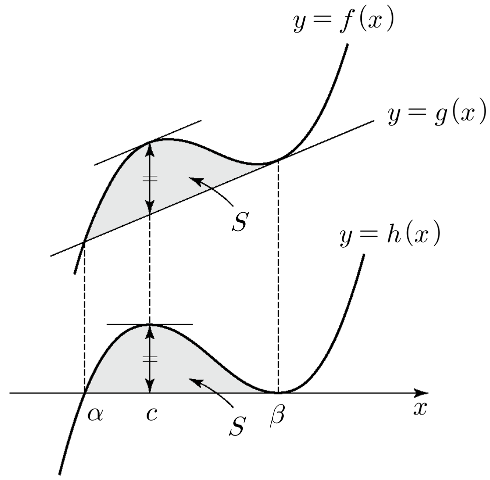
MEMO

MEMO

※ Remark

두 함수의 차로 정의된 함수

평균값의 정리의 증명에서와 같이, 두 함수의 차로 정의된 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$를 도입하는 것은 자주 쓰이는 아이디어이다. 이때 곡선 $y=h(x)$의 형태는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 상대적인 위치관계와 밀접한 관계가 있다. 특별히 $g(x)$가 일차함수인 경우를 살펴보자.



① x축에 수직인 직선이 각각 곡선 $y=h(x)$, x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 이 직선이 각각 곡선 $y=f(x)$, 직선 $y=g(x)$와 만나는 두 점 사이의 거리와 같다.

② 곡선 $y=h(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표와 같다.

③ 곡선 $y=h(x)$와 x축의 접점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 접점의 x좌표와 같다.

④ 곡선 $y=h(x)$의 극점의 x좌표는 접선의 기울기가 직선 $y=g(x)$의 기울기와 같아지도록 하는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점의 x좌표와 같다. 이는

$$h'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)-g'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=g'(x)$$

이기 때문이다.

⑤ 곡선 $y=h(x)$의 변곡점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표와 같다. 이는

$$h''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f''(x)-g''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f''(x)=0$$

이기 때문이다.

⑥ 곡선 $y=h(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

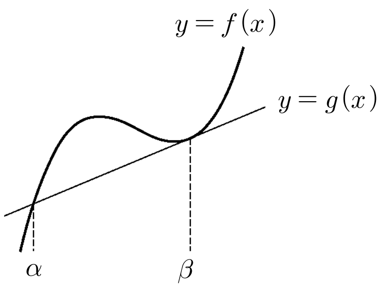
※ Remark

다항함수의 그래프와 직선

이 책의 초반부에서 다항함수의 그래프와 x축 사이의 관계가 주어졌을 때 다항함수의 식을 세우는 방법에 대해 간단히 살펴봤다. 두 함수의 차로 정의된 함수를 도입하면 다항함수의 그래프와 일반적인 직선 사이의 관계가 주어졌을 때도 다항함수의 식을 세울 수 있다.

몇 가지 예를 살펴보자.

[예] 함수 $f(x)$가 삼차함수이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같다고 하자.

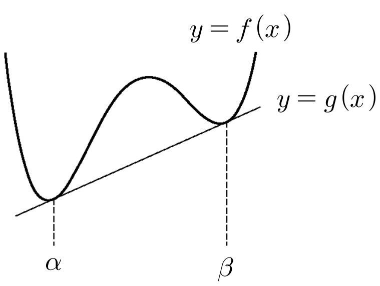


$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $y=h(x)$의 그래프가 x축과 $x=\alpha$에서 만나고 $x=\beta$에서 접한다. 함수 $h(x)$는 삼차함수이므로

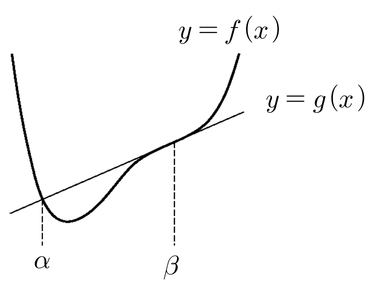
$$h(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)^2$$

$$\therefore\ f(x)-g(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)^2\ \ (k>0)$$

[예] 함수 $f(x)$가 사차함수라고 하자. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 이용해 위에서와 동일한 방식으로 식을 세울 수 있다. 자세한 과정은 생략한다.



$f(x)-g(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$



$f(x)-g(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)^3$

MEMO

Ⅲ 미분계수의 기하학적 의미와 활용

수능 기본문제

문제 1 | 2006학년도 9월 모의평가 가형 7번

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

〈보　기〉

ㄱ. $y=f(x)$에서 x의 값이 -1에서 7까지 변할 때의 평균변화율은 0이다.

ㄴ. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b=6$이면 $f'(a)+f'(b)=0$이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{15} f'(k-3)=0$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2 | 2007학년도 9월 모의평가 가형 미분과 적분 28번

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, $f(1)=0$을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

〈보　기〉

ㄱ. $f(a)=\frac{1}{2}$인 실수 a가 구간 $(-1,\ 1)$에 두 개 이상 존재한다.

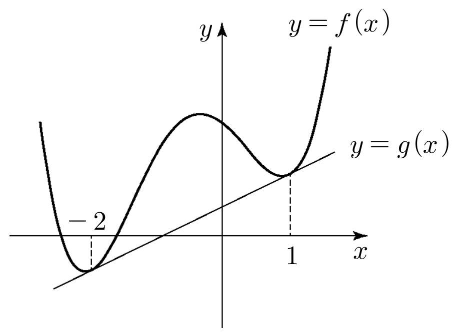
ㄴ. $f'(b)=-1$인 실수 b가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. $f''(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 3

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 x좌표가 -2, 1인 두 점에서 접한다. $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, $h(2)$의 값은?



III 미분계수의 기하학적 의미와 활용

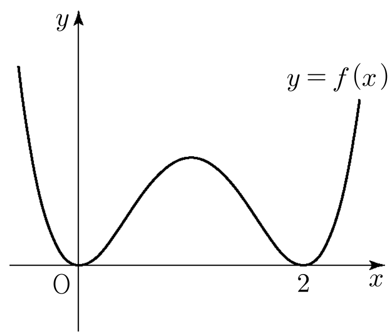
수능 연습문제

문제 4 | 2011년 3월 교육청 가형 30번

함수 $f(x)=x^2(x-2)^2$의 그래프가 다음과 같다. $0 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여

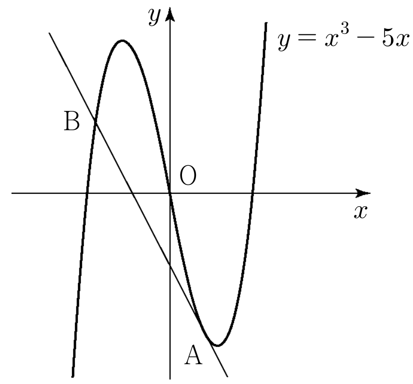
$$f(x) \le f'(t)(x-t)+f(t)$$

가 성립하도록 하는 실수 t의 최솟값과 최댓값을 각각 p, q라 하자. $36pq$의 값을 구하시오.



문제 5 | 2013학년도 6월 모의평가 나형 17번

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는?



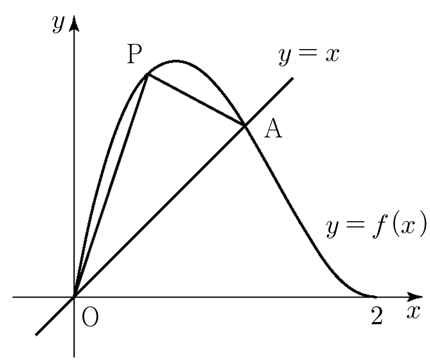
① $\sqrt{30}$　② $\sqrt{35}$　③ $2\sqrt{10}$　④ $3\sqrt{5}$　⑤ $5\sqrt{2}$

문제 6 | 2013학년도 9월 모의평가 나형 19번

닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 정의된 함수

$$f(x)=ax(x-2)^2\ \left(a>\frac{1}{2}\right)$$

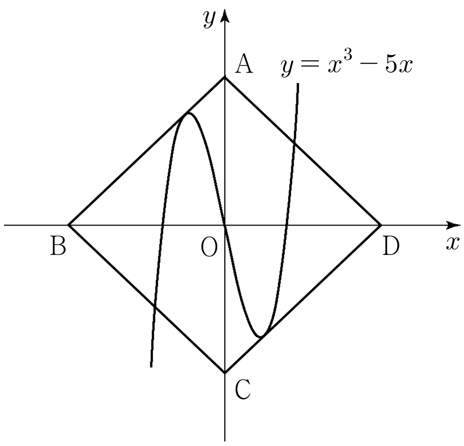
에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은?



① $\frac{5}{4}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{17}{12}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{19}{12}$

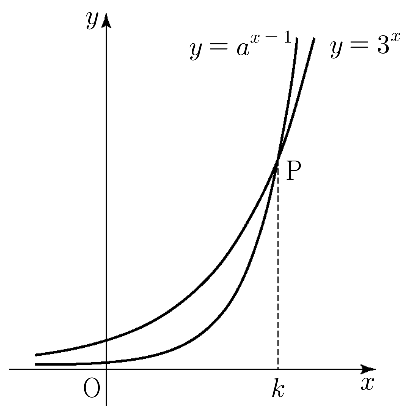
문제 7 | 2014학년도 예비시행 A형 30번

그림과 같이 정사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C는 y축 위에 있고, 두 꼭짓점 B, D는 x축 위에 있다. 변 AB와 변 CD가 각각 삼차함수 $y=x^3-5x$의 그래프에 접할 때, 정사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하시오.



문제 8 | 2015학년도 수능 B형 14번

$a>3$인 상수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{x-1}$과 $y=3^x$이 점 P에서 만난다. 점 P의 x좌표는 k이다. 점 P에서 곡선 $y=3^x$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 A, 점 P에서 곡선 $y=a^{x-1}$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 $\mathrm{H}(k,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$일 때, a의 값은?

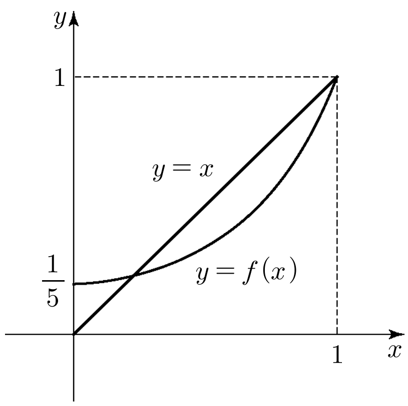


① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

수능 발전문제

문제 9 | 2006학년도 9월 모의평가 가형 미분과 적분 28번

다음 그림은 직선 $y=x$와 다항함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부이다. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이고 $f(0)=\frac{1}{5}$, $f(1)=1$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[10)]



〈보 기〉

ㄱ. $f'(x)=\frac{4}{5}$인 x가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄴ. $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{5}}^1 f^{-1}(x)\,dx=1$

ㄷ. $g(x)=(f\circ f)(x)$일 때, $g'(x)=1$인 x가
열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

MEMO

10) ㄷ선지에서, $(f\circ f)(x)=x$가 성립하도록 하는 실수 x의 값을 두 개만 찾아보자.

MEMO

문제 10 | 2007학년도 수능 가형 미분과 적분 29번

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 접할 때, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a \neq b$이다.)

〈보 기〉

ㄱ. $h'(b)=0$

ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.

ㄷ. 점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 11 | 2010학년도 9월 모의평가 가형 24번

다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합을 구하시오.

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

(나) 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ f(2))$에서
직선 $y=2$에 접한다.

(다) $f'(0)=0$

MEMO

문제 12 | 2015학년도 6월 모의평가 B형 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.

(나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는

점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$,

점 $(4n+3,\ 8n+7)$을 모두 지난다.

(다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌구간 $[2k,\ 2k+1]$에서 함수

$y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)\,dx=a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오.[11]

문제 13 | 2017학년도 수능 가형 20번

함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11) (가) 조건과 (나) 조건을 동시에 고려하여 어떤 수학적 결과를 이끌어낼 수 있는지 고민해보자.

문제 12

(나) 조건에서 $n=0$ 인 경우를 생각하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

$(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 7)$

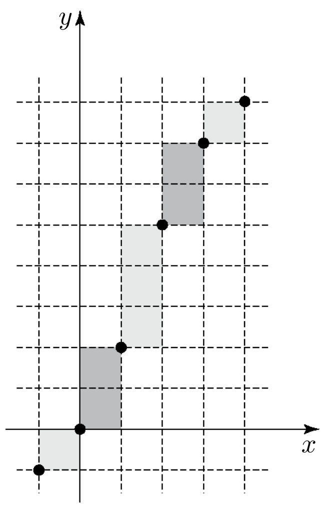
을 지난다. 마찬가지로, (나) 조건에서 $n=\pm 1$ 인 경우를 생각하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

$\cdots$, $(-1,\ -1)$,

$(4,\ 8)$, $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$, $\cdots$

을 지난다.

구간 $[-1,\ 4]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 지나는 점을 표시하면 다음과 같다.

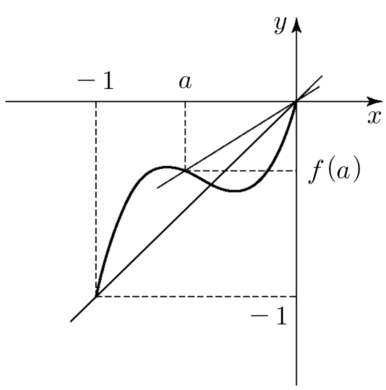


Step 1

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(-1,\ -1)$, $(0.\ 0)$ 을 지난다. 이 두 점을 잇는 직선의 기울기가 1 인데 (가) 조건에서 $f'(x) \geq 1$ 이므로 구간 $[-1,\ 0]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선이 될 수밖에 없다. 그 이유를 살펴보자.

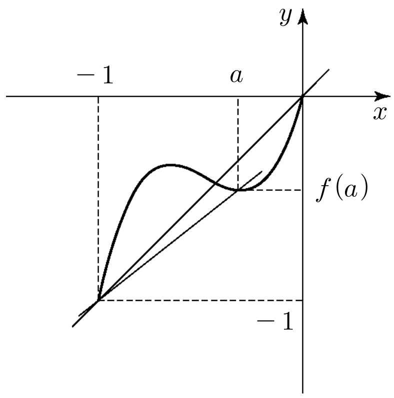
편의상 두 점 $(-1,\ -1)$, $(0.\ 0)$ 을 잇는 직선을 l 이라 하자. 구간 $[-1,\ 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선이 아니라고 가정하면 어떤 실수 a 가 존재하여 점 $(a,\ f(a))$ 가 직선 l 보다 위에 있거나 아래에 있게 된다.

(1) 점 $(a,\ f(a))$ 가 직선 l 보다 위에 있는 경우



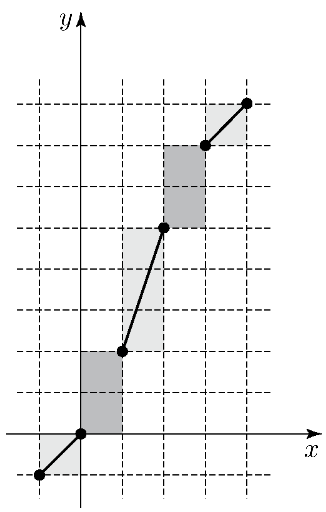
두 점 $(a,\ f(a))$, $(0,\ 0)$을 잇는 직선의 기울기는 1보다 작다. 그런데 평균값의 정리에 의해 이 직선의 기울기와 $f'(c)$의 값이 같아지도록 하는 실수 c가 적어도 하나 존재하므로 $f'(c)<1$이 되어 (가) 조건에 모순이다.

(2) 점 $(a,\ f(a))$가 직선 l보다 아래에 있는 경우



두 점 $(-1,\ -1)$, $(a,\ f(a))$을 잇는 직선의 기울기는 1보다 작다. 그런데 평균값의 정리에 의해 이 직선의 기울기와 $f'(c)$의 값이 같아지도록 하는 실수 c가 적어도 하나 존재하므로 마찬가지로 $f'(c)<1$이 되어 (가) 조건에 모순이다.

따라서 구간 $[-1,\ 0]$에서 함수의 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ -1)$, $(0,\ 0)$을 잇는 직선이 된다. 동일한 논리에 의해 구간 $[2k+1,\ 2k+2]$ (k는 정수)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 항상 직선의 형태가 된다.



Step 2

(다) 조건에 의해

$$f(x)=ax^2+bx+c\quad(0\le x\le 1)$$

와 같이 식을 세울 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$를 지나므로

$$f(0)=0,\ f(1)=2\ \cdots ㉠$$

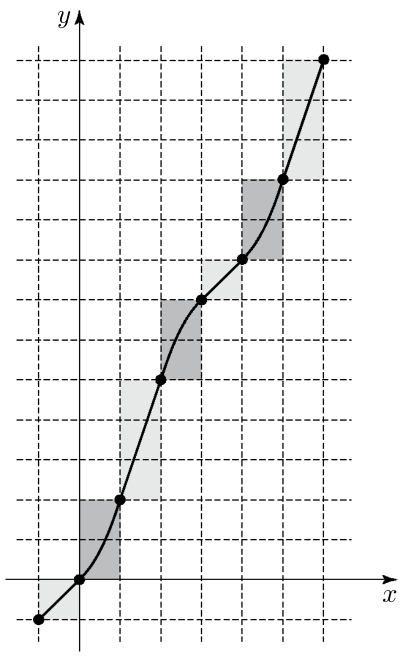
함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하므로

$$f'(0)=1,\ f'(1)=3 \ \cdots \ ㉡$$

㉠, ㉡을 만족하도록 상수 a, b, c의 값을 정하면

$$f(x)=x^2+x \ \ (0 \le x \le 1)$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$$\therefore \int_3^6 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\times(7+8)+\left(8+\int_0^1 f(x)\,dx\right)+\frac{1}{2}\times(10+13)=\frac{167}{6}$$

※ Remark

정적분의 성질을 이용하면 구간 $[2k+1,\ 2k+2]$ (k는 정수)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 직선임을 연역적으로 이끌어낼 수도 있다.

예를 들어, 구간 $[-1,\ 0]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ -1)$, $(0,\ 0)$을 잇는 직선임을 증명해 보자. $f'(x)\ge 1$이므로

$$\int_{-1}^{x} f'(t)\,dt \ge \int_{-1}^{x} 1\,dt,\quad f(x)-f(-1)\ge x+1$$

$$\therefore f(x)\ge x \ \ (\text{단, } -1\le x\le 0) \cdots ㉠$$

마찬가지로 $f'(x)\ge 1$이므로

$$\int_{x}^{0} f'(t)\,dt \ge \int_{x}^{0} 1\,dt,\quad f(0)-f(x)\ge -x$$

$$\therefore f(x)\le x \ \ (\text{단, } -1\le x\le 0) \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의해 구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)=x$임을 알 수 있다.

답 : 167

MEMO

※ Remark

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ 에 대한 논리적인 증명

이 결과를 증명하는 방법은 여러 가지가 있다. 여기에서는 함수의 최대 · 최소를 이용하는 증명법을 소개한다.

우선 $x>0$ 인 범위에서 함수 $f(x)=x^{n+1}e^{-x}$ 의 범위를 찾는다.

$$f'(x)=(n+1)x^n e^{-x}-x^{n+1}e^{-x}=x^n((n+1)-x)e^{-x}$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=n+1$ 에서 극댓값을 가진다. 이 값을 M 이라 하자.

	0	$\cdots$	$n+1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$		$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$

그러면 $x>0$ 인 범위에서

$$0<x^{n+1}e^{-x}\le M$$

이 성립한다. 이 부등식의 각 변에 x^{-1} 을 곱하고 $x\to\infty$ 인 극한을 취하면

$$0<x^n e^{-x}\le Mx^{-1},\quad 0\le\lim_{x\to\infty}x^n e^{-x}\le 0$$

이므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{x\to\infty}x^n e^{-x}=0$ 이다. 따라서 원하는 바를 증명했다.

방금 증명한 사실을 이용해 다항함수와 로그함수의 곱 또는 비로 이루어진 함수의 극한

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \quad \cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=0 \quad \cdots ㉡$$

을 각각 증명할 수 있다. ㉠에서 $\ln x=t$ 로 치환하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

이고, ㉡에서 $-\ln x=t$ 로 치환하면

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right)=0$$

이다.

적분 INTRO

미분이 그래프를 그리기 위한 도구라면, 적분은 구분구적법의 결과로 얻어지는 특정한 형태의 급수의 합을 계산하기 위한 도구이다. 구분구적법은 평면도형의 넓이나 입체도형의 부피나 곡선의 길이 등을 구할 때 보편적으로 적용할 수 있는 아이디어이다. 각 경우마다 구체적인 식의 형태는 조금씩 다르지만, 모두 일정한 형태의 급수를 포함한다는 공통점이 있다. 이렇게 급수의 형태로 표현된 길이, 넓이, 부피 등을 일관되고 체계적인 방법으로 쉽게 계산할 수 있게 해주는 것이 적분의 역할이다.

미분과 마찬가지로 적분을 다룰 때에도 상황에 따라 수식과 그래프를 적절히 선택하여 활용할 수 있어야 한다. 그러기 위해서는 급수, 정적분, 부정적분, 원함수 사이의 수학적인 관계를 명확하게 이해하는 것이 무엇보다 중요하다.

적분 단원의 큰 흐름을 요약하면 다음과 같다.

① 정적분의 정의에 대해서 공부한다.

② 정적분과 부정적분 사이의 관계에 대해서 공부한다.

③ 함수의 부정적분이나 정적분의 값을 구하는 여러 가지 방법을 공부한다.

④ 넓이, 부피 등을 급수로 표현하고 정적분을 이용해 그 값을 계산하는 방법을 공부한다.

⑤ 정적분이 포함된 함수를 해석하는 방법을 공부한다.

수능 및 모의평가 기출문제