[4점]

문 제

공략집

미적분 1

서문

저는 원래 수학을 전혀 못하던 학생이었습니다. 수능 시험을 보기 위해 수학을 처음 공부해야 했던 그때를 돌이켜보면, 눈앞이 캄캄하기만 했습니다. 수많은 수기와 수학 공부법을 보면서 수학 공부를 해야 했고, 그 흔한 과외나 학원도 못 다녀보고 혼자 끙끙대며 실력을 키워야 했습니다.

제가 수능 수학을 공부하며 항상 생각했던 것은, '수학 고수들도 내가 푸는 것처럼 이렇게 풀까? 아니라면 무슨 생각을 하면서 문제를 풀까?'였습니다. 주변에는 물어볼 사람도, 같이 공부를 해나가는 사람도 없었으니까요. 제가 공부하는 이 방법이 맞는지 끊임없이 고민해야 했고, 오르비같은 수능 커뮤니티에서 여러 정보를 얻으며 혼자 헤쳐 나가야만 했습니다.

인고의 시간을 거쳐 결국 수학을 잘하게 되었으나 그때는 이미 여러 번의 수능 시험을 거친 뒤였습니다. 나중에 생각해보니, 고통 속에서 혼자서 알아냈던 그 정보들은 어떻게 보면 수학을 잘하는 사람에게 배울 수 있었던 아주 간단한 정보들이었다는 생각이 들었습니다. 저는 지금 그때의 제 경험들을 토대로 3년째 수학 과외를 하고 있습니다.

바로 그 정보, '수학 고수들은 도대체 무슨 생각으로 4점 문제를 풀까?'에 대한 해답을 이 책에서 보여드리려고 합니다. 마치 옆에서 과외를 하는듯한 꼼꼼함으로, 수능 수학에서 어려움을 겪고 있는 여러분들이 궁금해 하는 바로 그 부분들에 답해주는 책이 될 것입니다.

이 책에서 여러분이 얻을 수 있는 것은 2가지입니다.

1 수능 수학에서 4점 문제를 풀기 위해 필요한 최소한의 수학 도구를 제공합니다. 여러분이 수능날 받게 되는 수능 수학 시험지의 모든 문제는 교과서의 기본 개념 도구와 제가 제시하는 플러스 도구로 반드시 풀립니다. 플러스 도구는 전혀 새로운 개념이 아닙니다. 교과서에 있는 개념 도구들로 4점 문제들을 풀기 위한 '교두보' 역할을 해주는, 4점 문제를 풀기 위해 반드시 필요한 도구입니다. 여러분들이 수능 수학 100점을 받기 위해 필요한 '최소한의 도구'를 이 책에 담았습니다.

2 기본 개념 도구와 플러스 도구를 모두 장착했다면, 기출문제집이 제공하는 모든 4점 문제를 풀 수 있습니다. 그러나 여러분은 그 과정에서 많은 시행착오를 겪어야 할 것입니다. 저는 그 시행착오를 최소한으로 줄여드리기 위해, 여러분이 가지고 있는 그 도구로 '실전에서' 어떻게 문제를 푸는지 보여드립니다. 과외를 하는듯한 느낌으로, 4점 문제를 푸는 동안 머릿속에서 일어나는 모든 생각을 해설에 담았습니다. 이 생각들은 여러분이 n수를 하게 되면 자연히 얻을 수 있는 실전 경험들입니다. 여러분이 굳이 n수를 하지 않아도, 그 경험을 온전히 가질 수 있도록 하는 해설이 될 것입니다.

이 책이, 수능 수학에서 정점을 찍으려고 하는 분들에게 큰 도움이 되어 기억에 남는 책이 되었으면 좋겠습니다.

마지막으로, 감사를 드릴 분들이 너무나 많습니다.

경험이 없는 저에게 출판을 허락해주신 박성준 대표님,
저에게는 아이돌과 같은 분이신 이광복 이사님,
늦은 마감과 번거로운 작업에도 내색 없이 작업해주신 오르비 직원분들
모두에게 감사드립니다.
바쁜 핑계로 자주 만나지 못했는데도 항상 응원해준 친구들,
사소한 것 하나까지 꼼꼼하게 검토해주신 검토자 분들,
사랑하는 아버지와 어머니, 우리형
모두에게 감사드립니다.
그리고 이 책의 처음부터 끝까지 함께 해준 다인이에게 고맙다는 말 전하고 싶습니다.

검토자 서평

강병관(2016학년도 수능 수학 B형 1등급)

이 책은 수많은 기출문제 중 현 교육과정에 꼭 필요한 주요 기출문제들을 정리하였습니다. 또한 저자는 해설과 플러스 도구에서, 학생이 문제를 풀면서 무의식중에 지녀야 할 생각들을 심어주려고 노력하였습니다.

제가 이 책을 검토하면서 가장 마음에 들었던 부분은 각각의 문제 해설 끝에 노하우와 충고로 이루어진 작가의 생각이 적혀 있고, 이것이 문제에 접근하는 데 매우 유용하다는 점입니다. 이 책에서 저자가 의도한, 문제에 접근하는 방식을 이해한다면 새로이 출제되는 문제도 결국은 여러 기출문제와 비슷한 문제란 것을 깨닫고 쉽게 접근할 수 있을 것입니다.

김동근 (2014학년도 수능 수학 B형 1등급)

이 책의 저자는 교과서 수준을 넘는 문제들을 강조하는 게 아니라, 철저한 ‘기본’을 바탕으로 4점 문제를 풀기를 권하고 있습니다. 그렇기에 이 문제집을 풀고 이해하고 싶으시다면 여러분들도 다시금 교과서를 펼치시고 교과서의 기본 내용들을 읽고 문제를 푸시기를 권장합니다. 그 내용들을 다시 한 번 숙지하시고 이 책을 풀게 된다면, 여러분들에게 있어서 이 책은 단순한 문제집이 아닌 수학을 좀 더 간단하게 접근하게 하고 어떠한 문제도 기본을 바탕으로 해석할 수 있게 하는 선생님이 될 수 있다고 생각합니다.

저는 이 책을 검토하면서, 두 번의 수험 생활이 떠올랐습니다. 이 책에서 저자가 문제를 해석하면서 진행하는 설명들은 수학을 알아가던 저의 수험 생활 시절에 갈고 닦던 기본을 떠올리기에 충분했습니다. 아니, 충분을 넘어서 그 시절 간과했던 기본이 저의 생각보다 중요했다는 점을 알게 되었습니다. 여러 번의 수험생활동안에서 느낀 점은 많은 수험생들이 수학이라는 과목을 너무 어렵게 받아들이고, 그리고 그 어려움을 헤쳐 나가는 데에 있어서 기본을 많이 무시하고 있다는 점입니다. 허나 어떠한 문제도 여러분들이 모르는 개념으로 만들어지지 않았으며, 해석할 수 없는 문제는 없다는 것입니다. 그 점을 이 책을 읽고 푸시면서 많이 깨닫기 바랍니다. 그 점을 알게 된다면, 위에서 말했듯이 이 책을 단순한 문제집이 아닌 여러분이 새로운 눈으로 수학을 접근하게 하는 선생님이 될 것입니다.

여러분들이 단순히 풀어왔던 어렵기만 한 책이 아닙니다. 앞으로 남은 수험생활, 수학이라는 학문을 함께 헤쳐나갈 길잡이가 될 것입니다. 저자의 경험과 지식을 여러분들 것으로 만들고, 더 나아가 어떠한 4점 문제, 어떠한 수학 문제를 만나도 겁먹지 않는 여러분으로 만드세요. 그러신다면 수험이 끝났을 때의 승자는 이 책을 만난 여러분이 되어있을 것입니다.

신석민 (2014학년도 수능 수학 B형 1등급)

‘기본을 쌓는 것이 모든 일의 정도(正道)이다’라는 말이 있습니다. 축구나 농구를 할 때도 기본기를 충실히 연습하듯, 공부에 있어서도 기본을 쌓는 것이 가장 중요하다고 생각합니다. 본 책을 통해 ‘기본’을 중시하는 학습을 할 때 ‘정도’에 다다를 수 있다는 성취감과 희열을 느끼시기를 바라며 학습자에게 다가오는 수능에 큰 도움이 되기를 기원하겠습니다.

검토를 하며 저자 역시 ‘기본’을 쌓는 것을 굉장히 중요시하고 있음을 느꼈습니다. 저자의 언어로 표현하면 ‘기본 개념 도구’가 이에 해당합니다. 교과서를 통해 해당 개념을 알고 교과서 문제를 통해 기본 개념 도구의 사용이 숙달 되었을 때 본 책에서 소개하는 ‘플러스 도구’를 학습하시기를 권장합니다. 글쓴이는 이 방향으로 학습하기를 강조하고 있으며, 학습자가 이를 지키며 공부를 할 시에 본 책을 통한 학습효과를 극대화 할 수 있으리라 장담합니다.

이 책을 살펴보면 크게 ‘플러스 도구’와 ‘4점 문제 풀어보기’로 구성되어 있습니다.
먼저, ‘플러스 도구’를 통해 저자가 쌓아온 다년간의 노하우를 학습할 수 있습니다. 여기서의 ‘플러스 도구’는 특별한 공식이나 교과과정을 벗어난 말 그대로 지름길이 될 수 있는 기술이 아닙니다. 저자의 경험으로부터 우러나오는 ‘기본 도구를 활용하는 방법’, 문제를 정확히 읽을 수 있는 방법 그리고 문제를 풀어나가는 가장 근본적인 사고과정이 담겨져 있습니다. 다시 한번 강조 드리지만, 기본 도구를 정확히 익힌 후 플러스 도구를 학습하기를 당부 드립니다. 말 그대로 기본에 ‘날개’를 달아 줄 것입니다.
‘4점 문제 풀어보기’ 파트는 학습자가 2, 3점 문제로 충분히 익힌 기본 개념 도구와, 저자가 전달하는 ‘플러스 도구’를 활용하여 수능 고난이도, 흔히 말하는 ‘킬러문제’를 학습하는 파트입니다. 플러스 도구를 학습하고 스스로 충분히 생각하며 문제를 풀어본 후, 저자의 풀이를 통해 자신의 풀이와 비교해보고 공부할 수 있는 파트라고 생각합니다. 제가 이 파트를 읽으며 감탄한 점은 ‘경험’이 녹아있는 것이었습니다. 시중의 학습기본서나 문제 해설집, 혹은 인강을 통해 학습하다 보면 한 번에 빠르고 정확한 풀이를 구사하는 경우가 많습니다. 하지만 저자는 실제 시험상황에서의 생각들, 그리고 풀이를 해 나가는 과정을 특수한 도구가 아닌 교과서가 전해주는 ‘기본 개념 도구’와 저자의 ‘플러스 도구’로 풀어 나갑니다. 이 과정에서 학습자는 단순한 지식이 아닌 경험, 즉 지혜까지 엿볼 수 있을 거라 생각합니다. 다른 책들과 차별화되는 가장 중요한 부분이라 생각합니다.

저 또한 수능을 세 번 준비하며 특히 수학 과목에 있어서는 ‘기본’을 바탕으로 한 풀이를 중요시하며 학습했습니다. 저자의 책을 검토하며 제가 그 동안 학습하며 경험한 것들이 잘 정리되어 있음을 느꼈습니다. 저자의 풍부한 시각과 다양한 경험을 통해 충분히 배워가시기를 바랍니다. 학습자 여러분에게 본 책이 큰 도움이 되기를 바라며, 다시 한번 다가오는 시험에 ‘건승’하시기를 기원합니다.

안다인 (수학 강사, 대표 검토)

〈4점 문제 공략집〉은 책 이름 그대로 모든 등급의 학생이 넘기 어려워하는 벽인 4점 문제를 극복 할 수 있도록 도와주는 책입니다. 문제를 풀 때 가장 중요한 것은 풀이를 쓸 때 다음 과정을 생각해 내는 사고방식이라고 생각합니다. 문제와 풀이를 나열해놓은 책을 암기식으로 학습하는 것은, 계속해서 문제가 변형되어 나오기 때문에 고난도의 4점 문제 풀이에 전혀 도움이 되지 않습니다. 그 점에서 이 책은 기존의 단순하게 풀이 과정만을 나열한 책들과는 확실히 차별화가 되어있습니다.

저자는 이 책에서 '기본 개념 도구', '플러스 도구'를 통해 4점 문제에 꼭 필요한 개념과 학습법, 그리고 말 그대로 문제를 위한 도구를 설명 하였고 그 도구를 이용하여 4점 문제를 논리적으로 푸는 관점을 옆에서 과외를 하듯 친절하게 설명하였습니다. 수학 문제를 볼 때의 논리적인 관점과, 화려한 기술보단 투박하지만 빈틈이 없는 풀이 과정으로 무장한 책입니다. 개념에 충실하고 논리적이며 빈틈이 없는 〈4점 문제 공략집〉으로 수능 수학 영역 만점을 향해 달려가시길 바랍니다.

안형준 (수학 강사)

수능을 준비하는 이과 학생들의 대부분은 수학 고난도 문제에 대한 막연한 두려움을 가지고 있습니다. 가령, 수능 고난도 기출문제를 풀다가 풀리지 않아 풀이를 보면서 '내가 이 문제와 비슷한 수준으로 나오는 문항을 제한된 시간 내에 풀어낼 수 있을까?' 라는 생각을 많이 합니다. 이 때 학생들은 아직 자신들이 모르는 내용이 있어서 못 푼다고 생각하며, 기본 개념의 중요성에 대해서는 생각하지 못합니다. 즉, 기본 개념이 자신에게 완벽히 익숙하지 않은데 심화학습을 합니다.

이렇게 방향을 못 잡는 학생들에게, 이 책은 4점 문제에 대해 학습자가 나아갈 방향을 잡아주고 있습니다. 이 책의 저자는 4점 문항들을 풀기 위해 필요한 것은 아주 기본적인 개념의 숙달임을 강조하고 있습니다. 이를 기본 개념 도구와 플러스 도구에서 공부할 수 있도록 책을 구성했고, 이후 4점 문제들을 기본 개념 도구 및 플러스 도구를 사용해 푼 풀이를 제시함으로써 4점 문제를 푸는 데 있어서 잡다한 지식이 필요하지 않다는 것을 느끼게 해줍니다.

이 책에 수록된 문제를 풀고 풀이를 꼼꼼히 공부해 나간다면 문제를 바라보는 시선이 바뀔 것이며 수학적으로 생각하는 깊이도 달라질 것입니다. 이 책으로 공부하는 사람들 모두가 수학에 대한 자신감을 얻어서 수능에서 만족스러운 점수를 받길 바랍니다.

주민지 (수학 강사)

〈4점 문제 공략집〉은 책의 각 단원 서두에 단원들의 기본도구과 플러스 도구를 제시하여 개념을 한 번 더 짚어나갈 수 있고, 도구들과 함께 저자의 노하우를 전수하여 문제풀이에 점진적으로 접근하는 법을 가르쳐줍니다. 이 접근하는 방법을 통해 실제로 난이도가 있는 4점짜리 문제들을 푸는 것뿐만 아니라, 새로운 유형에 대해서도 체계적으로 적용하는 방법을 익힐 수 있습니다. 또한 단원별 핵심개념과 함께 각 4점 기출문제들이 연결되어 있어 유기적으로 공부하기가 편리합니다. 교육과정에 맞추어 교과과정에서 벗어나지 않는 풀이와 출제의도를 파악하며 풀어내기 때문에 기본에 충실한 탄탄한 수학풀이에 도움이 될 것입니다.

따라서 이 책은

· 문제풀이의 시작은 가능하나, 더 이상 풀이가 진행되지 않는 학생.
· 개정된 교과과정에 맞추어 논리적으로 수학문제를 풀어나갈 힘이 필요한 학생.
· 기출 문제를 통해 신 유형에 대비하고 싶은 학생.

들에게 더욱 추천하는 책입니다. 정답을 맞히는 것에 급급한 것이 아닌 논리적인 사고를 풀이에 요구하며 수학문제를 풀어나가기 때문에 더욱 수학에 대한 깊은 이해와 흥미를 갖고 풀어나갈 수 있습니다. 이 책을 끈기있게 이해해나가고 각각의 문제들을 자기 것으로 흡수해 나간다면 수학 1등급의 주인공은 무리가 없을 것임을 확신합니다.

이 책의 구성

단원 설명

해당 단원이 수능에서 어떻게 출제되는지와 공략하는 방법을 개략적으로 설명합니다. 단원 설명에는 기본 개념 도구가 포함되어 있는데, 기본 개념 도구는 교과서에 있는 해당 단원의 모든 기본적인 도구를 뜻합니다. 이 책에서는 자세하게 다루지 않으므로 반드시 교과서로 공부를 해야 합니다.

플러스 도구

기본 개념 도구는 4점 문제에서도 똑같이 사용됩니다. 다만 4점 문제에 기본 개념 도구를 그대로 적용시키려 하면 4점 문제의 표현법이나 논리에서 어려움을 느낄 것입니다. 이러한 고충을 덜고자 플러스 도구는 기본 개념 도구와 4점 문제 사이의 멀어 보이는 간격에 다리를 놓아주는 역할을 할 것입니다. 플러스 도구는 전혀 새로운 개념을 배우는 것이 아닙니다. 기본적으로 플러스 도구는 기본 개념 도구의 연장선에 있으므로, 수능 출제 범위에서 벗어나지 않습니다. 플러스 도구가 익숙해진다면, 기본 개념 도구로 2점, 3점 문제를 풀 듯 4점 문제에서도 기본 개념 도구의 사용이 능숙해질 것입니다.

4점 문제 풀어보기&풀이법

여러분이 장착한 기본 개념 도구와 플러스 도구를 가지고 본격적으로 문제를 풀어보게 됩니다. 그리고 여러분이 장착한 그 도구들만으로 어떻게 문제를 풀어나가는지 보여줍니다. 그 모든 생각들은 수많은 문제들을 풀면서 쌓아온 생생한 경험으로 이루어져 있습니다. 여러분은 그 경험들을 시행착오 없이 얻을 수 있으며, 특히 실전 경험은 직접 시험에서 겪어본 사람들만이 알 수 있는 정보들이므로 여러분들에게 귀중한 자산이 될 것입니다.

목차

이 책을 공부하는 방법

1. 교과서에서 기본 개념 도구의 설명을 보세요.
2. 교과서의 예제와 유제를 풀면서 기본 개념 도구를 이해하세요.
3. 기출문제집에서 2점, 3점 문제를 모두 풀어 기본 개념 도구를 익숙하게 만드세요.

기본 개념 도구를 손에 익히기 위해 반드시 해야 하는 과정입니다. 아직 2점, 3점 문제가 어렵다면 도구들이 손에 익지 않은 것입니다. 머리로 생각하기 전에 손이 먼저 가는 수준이 되었다면 숙달된 것입니다.

4. 플러스 도구의 설명을 보세요.

플러스 도구까지 모두 장착을 한다면, 여러분은 4점 문제를 풀 준비가 된 것입니다. 4점 문제는 기본 개념 도구와 플러스 도구만으로 반드시 풀리기 때문입니다.

5. 익숙하게 만든 기본 개념 도구와 플러스 도구를 이용해서 4점 문제에 도전해보세요.
6. 문제를 맞혔든 틀렸든, 다음 장의 풀이법을 보고 내가 생각한 것과 해설이 생각한 것을 비교해보세요. 문제를 풀고 그 직후 바로 봐야 합니다.
7. 4점 문제를 모두 이렇게 공부한 후, 기출문제집에서 4점 문제를 연습하세요.

4점 문제에 본격적으로 도전하고, 부딪히고, 뚫어내면서 여러분이 가진 도구들로 직접 경험하세요. 그리고 해설은 여러분이 이미 가지고 있는 도구로 어떻게 답을 만들어내는지 그 생각을 공부하세요. 여러분은 이미 수능 문제 모두를 풀어낼 수 있는 도구를 가지고 있는 겁니다.
한 번 뚫어내기 시작했다면 어떤 문제가 다가와도 다 풀 수 있도록 4점 문제로 다시 연마하세요. 무사가 검술을 끊임없이 연마하는 것처럼, 여러분의 도구와 생각들은 연마하면 할수록 더욱 능숙해질 것이고, 문제가 그 어떤 것을 물어봐도 모두 답할 수 있는 고수의 경지에 오르게 될 것입니다.

앞으로 여러분이 보는 시험에 나오는 문제는 그 모습이 계속 바뀌겠지만, 그 문제 속에서 생각하는 방법은 바뀌지 않을 것입니다. 이 책의 핵심은 그 생각하는 법을 배우는 것입니다.

머리 좋은 사람이 수학을 잘하는 것이 아닙니다.
수학을 하다 보니 머리가 좋아지는 것입니다.

수능 수학 공부의 목적

잘 생각해보면, 우리가 수학 공부를 하고 있는 궁극적인 이유는 수능 시험을 잘 보기 위함입니다. 수능 수학에서 100점을 받는 것이 목적이지요. 그런데 많은 수험생들이 수학 공부를 할 때 문제를 맞히는 것에 집착합니다.

수학 시험에서는 문제를 맞히는 것이 당연합니다. 우리는 그것을 위해 그동안 그 많은 수학 문제를 풀어왔으니까요. 그런데, 수학 문제를 '연습'할 때도 우린 맞히는 것을 목적으로 공부할 때가 많습니다.

아닙니다. 수학을 연습할 때는 문제를 맞히는 것이 중요한 게 아닙니다.
풀이를 정교하게 만드는 것이 중요합니다.
어떤 상황에서도 풀이에 쓰이는 도구를 능숙하게 쓰기 위해서, 그 풀이의 연결고리와 논리가 완벽해지기 위해서 수학 문제를 풀면서 공부하고 있는 겁니다.

공부를 할 때 문제를 맞히지 못하면 시험에서도 맞히지 못하는 것 아니냐고 물어보는 수험생들이 있을 겁니다.
맞습니다. 공부할 때도 못 푸는 문제는 시험에서도 못 풉니다.
그런데 공부할 때 맞힌 문제도 시험에서 틀리는 경우가 너무나 많습니다. 그 경우가 바로 연습에서 문제를 풀어내는 것에만 집착했을 때입니다.

우리는 수많은 수학 해설집이 논리적인 풀이로 이루어져 있음을 알고 있습니다. 하지만 정작 많은 수험생들은 스스로 그 논리적인 풀이를 했는지 안 했는지 별로 따져보지 않습니다. 그저 맞혔으면 다음에도 맞겠지, 이런 낙관적인 태도로 일관합니다. 감으로 풀어낸 문제조차도요.
틀린 문제는 해설지를 보지 말라는 말을 그렇게 많이 들었는데, 정작 맞힌 문제는 해설지를 봐야 한다는 말을 많이 듣지 못합니다.

여러분의 수학 공부 목적은 문제를 맞히기 위함이 아닙니다.
여러분은 풀이를 정교하게 만들어야 합니다.
우리가 수학 문제를 푸는 이유는,
수학 문제를 풀어냄으로써 얻는 쾌감 때문이 아니라,
수능에서 처음 보는 새로운 문제에 정교한 풀이를 써내기 위함입니다.

이제부터 바꾸십시오.
수학문제를 풀고, 맞힌 문제는 반드시 해설을 보면서 내 풀이가 논리적으로 타당하고 정교했는지, 그렇지 못하다면 더 논리적이고 더 정교하게 바꿀 방법을 끊임없이 고민하세요.
시험에서, 그동안 여러분이 감으로 풀어내고 투박하게 풀어낸 연습문제들은 전혀 도움이 되지 않습니다.
오직 완벽한 풀이를 위해 끊임없이 고민한 그 시간만이 시험에서 점수로 환원됩니다.

3

미분법

3

미분법

문과와 이과에 구분 없이 모두 미분을 배우지만, 우리가 미분을 배우는 이유가 무엇인지 아는 수험생은 별로 없습니다. 문제를 풀면서도 우리가 미분을 배우는 이유를 알지 못해 문제의 의도나 유형의 큰 그림을 파악하지 못하는 경우도 많습니다.

우리가 미분을 배우는 궁극적인 이유는 대수적으로 해결하기 어려운 문제들을 그래프를 그려 해결하기 위함입니다. 그래프를 그리기 위해 함수의 극한, 연속, 미분가능성, 여러 미분법들을 공부했고, 본격적으로 그래프의 개형을 구하기 위해 도함수의 성질들을 배웠던 것입니다. 그리고 미분법의 마지막 단원은 도함수의 활용이고, 우리가 그래프를 그려 어디에 써먹을 지를 공부했습니다.

수능 시험에서는 그래프를 그리는 과정을 물어보기 위해 문제에서 여러 조건들을 제시하고 그 조건들을 해석하라는 방식으로 문제를 출제하는데, 해석의 난이도에 따라 문제의 난이도가 달라집니다. 그래서 최근 21번에 꾸준히 출제되는 미분법, 적분법 문제들은 모두 조건의 해석이 어려워서 정답률이 낮은 문제들인 것입니다.

많은 수험생들이 이 문제들을 해결하는 것에 애를 먹고 있는 것을 알고 있습니다. 때로는 수학 머리가 없어서 문제를 못 풀겠다는 얘기를 하기도 합니다.
단언컨대 이 단원은 머리로 승부를 보는 단원이 아닙니다. 조건을 해석하는 도구가 익숙하지 않아서, 그리고 도구를 이용해 풀이를 연결하는 과정이 익숙하지 않아서 그런 것입니다. 도구가 익숙해지고 많은 경험이 쌓이면 누구든지 쉽게 정복할 수 있는 단원이 미분법 단원입니다.

여러분은 교과서의 기본 개념 도구와 이 책의 플러스 도구만 가지고도 현재까지 출제된, 앞으로 출제 될 미분법 문제의 조건들을 모두 해석해낼 수 있습니다. 생각하기 전에 손이 먼저 갈 정도로 도구들을 체화시키고 많은 문제들을 접하면서 풀이를 이어나가는 그 생각을 공부해, 수능 날 마주치게 될 미분법 단원의 문제들을 웃으면서 풀어내길 바랍니다.

기본 개념 도구	기본 개념 도구 익히기 Step
미분계수 도함수 접선의 방정식 평균값 정리 함수의 증가와 감소 함수의 극대와 극소 함수의 그래프 방정식과 부등식에의 활용 속도와 가속도	1. 교과서에서 기본 개념 도구의 설명을 보세요. 2. 교과서의 예제와 유제를 풀면서 기본 개념 도구를 이해하세요. 3. 기출문제집에서 2점, 3점 문제를 모두 풀어 익숙하게 만드세요.

수능 수학을 처음 공부하는 학생들이 기본 개념 도구를 손에 익히기 위해 반드시 해야 하는 과정입니다. 아직 문제가 어렵다면 도구들이 손에 익지 않은 것입니다. 머리로 생각하기 전에 손이 먼저 가는 수준이 되었다면 숙달된 것입니다.

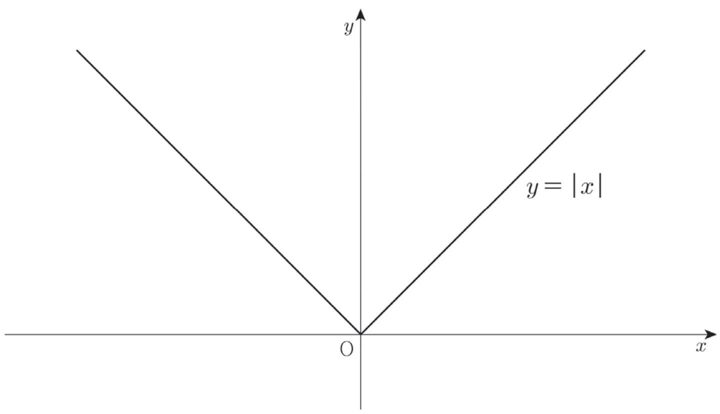
플러스 도구

▶도구 3-1 미분가능성 실전

함수의 극한과 연속 단원에서 익혔던 연속 실전과 비슷합니다.

어느 한 점에서 미분이 가능하다는 것은, 그 점에서 미분계수가 존재한다는 뜻입니다.
미분계수는 순간변화율과 같은 말이고, 순간변화율은 평균변화율의 극한값입니다.
즉, 평균변화율의 극한값이 존재해야 미분이 가능합니다.
극한값이 존재한다는 것은, 좌극한과 우극한이 같다는 뜻입니다.
따라서 $x=a$에서 $f(x)$가 미분 가능하다는 말은
$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$라는 뜻입니다.
$\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$로 표현할 수도 있습니다.

그래서 문제에서 미분이 가능하다 또는 불가능하다는 말이 나오면 '좌미분계수=우미분계수'를 떠올리면 됩니다. 연속에서 배운 '좌극한=우극한=함숫값'과 동일한 방식입니다.
특히, 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분가능성을 판단할 때 $x=a$의 근처에서 미분이 가능하다면, 즉, 아주 작은 양수 h에 대하여 $x=a+h, x=a-h$에서 미분이 가능하다면
$f'(a-h)=f'(a+h)$로 판단해도 됩니다.



좌미분계수와 우미분계수가 같다는 말은 풀어서 생각해보면 어떤 점의 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 같다는 말입니다.
여러분이 흔히 알고 있는 $y=|x|$의 그래프를 예로 들어보면, $x=0$의 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 각각 $-1, 1$이므로 좌미분계수와 우미분계수가 다릅니다.
그래서 뾰족점은 미분이 불가능하다고 하는 것입니다.
수식으로 표현하면 $y=|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$이고, $y'=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0)\end{cases}$입니다.
x의 범위에서 등호가 없어진 것에 주목하세요. 어떤 점이 미분이 불가능하다면 도함수에서 그 점은 불연속입니다. 도함수에서는 그 점이 존재하지 않기 때문입니다.

많은 수험생들이 미분가능성 개념을 '부드럽게 이어지면 미분가능, 뾰족하게 이어지면 미분불가능'으로만 생각하고 적용하려 합니다. 이렇게만 접근하면 풀리는 문제들도 있겠지만 엄밀하게 정확한 값을 물어보는 문제의 경우 풀리지 않을 가능성이 더 높습니다.
결국 기하학적인 해석도 정의에서부터 시작된 따름 정리로 볼 수 있기 때문에, 정의에 입각한 풀이를 하면서 기하학적인 해석에 대해 깊이 생각해보는 것이 더 중요하지 정의를 소홀히 한 채 기하학적인 해석에만 매달리면 실전에서 풀이가 꼬이는 현상이 나타날 수 있습니다.

이 도구에서 모든 미분가능성 문제를 풀어내는 단 하나의 핵심이 '좌미분계수=우미분계수'라는 것이고, 이 핵심으로부터 기하학적인 미분가능성 해석이 뻗어 나온다는 것을 알았다면 이 도구에 대한 공부는 충분합니다. 복잡한 문제에서 실전적으로 미분가능성을 빠르게 판단하는 방법은 각 문제마다 다르므로 4점 문제 풀이법에서 자세히 다뤄보겠습니다.

4점 문제 풀어보기 43

2011학년도 수능 가형 24번 문제 (난이도 최상)

24. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{가 } x=a\text{에서 } \underline{\text{미분가능하지 않다}}.\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

24. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$S=\{a \mid$ 함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

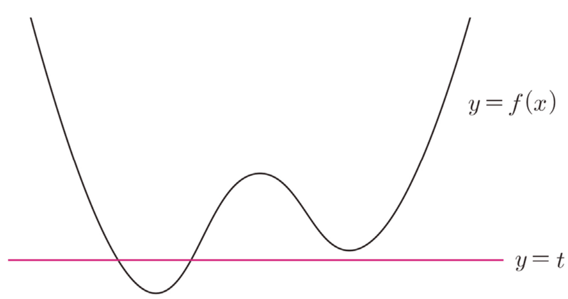
1등급 컷이 79점이었던 2011학년도 수능에서 가장 정답률이 낮았던 문제입니다.
시험 자체도 어려웠지만 현행 수능의 30번 난이도에 해당되는 문제가 이 시기에 24~25번 문제였던 것을 고려했을 때, 이 문제 자체의 난이도도 상당했습니다.
지금은 이 문제가 많이 분석되어 그 당시 체감 난이도보다 쉽게 느껴지는 경향이 있으니, 이 문제를 학습할 때는 생각의 흐름이 어떻게 진행되는지 스스로 체계화하면서 연습하는 것이 바람직합니다.

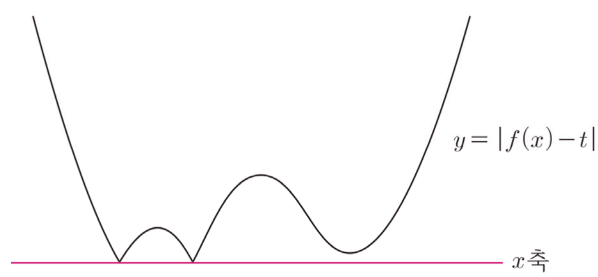
문제를 읽어보면, 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 $f(0)=3$, $f'(3)<0$을 만족합니다. 실수 t에 대하여 집합 $S=\{a \mid$ 함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$의 원소의 개수를 $g(t)$라 할 때, $g(t)$는 $t=3$, $t=19$에서만 불연속입니다. $f(x)$를 구하는 것이 문제입니다.

새로운 함수 $g(t)$를 정의하는 문제이므로 $g(t)$ 자체를 구할 생각을 해야 하고
$g(t)$를 구하려면 $g(t)$가 어떻게 만들어지는지 전체적인 상황의 이해가 필요합니다.

처음부터 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$로 두고 풀 수도 있겠지만, 이 문제는 이렇게 두고 풀이를 시작하면 사차함수 개형의 파악이 어렵게 느껴질 수 있습니다.
따라서 그동안 많은 미분 문제들을 풀면서 익혔던 사차함수의 개형에 대해 모든 가능성을 열어두고, 문제 상황 자체를 이해한 후에 $f(x)$를 어떻게 두고 계산을 할지 결정합시다.

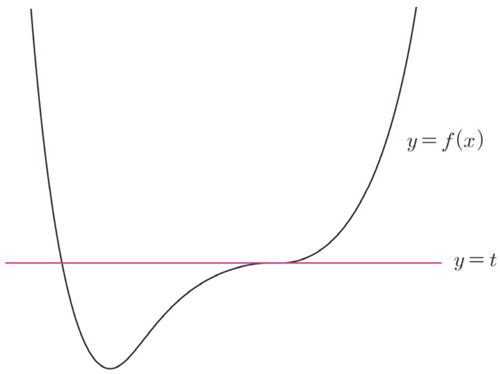
집합 $S=\{a \mid$ 함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$에서 $|f(x)-t|$를 생각해보면
사차함수 $y=f(x)$의 $y=t$ 아래에 있는 그래프를 위로 올리는 건데
이 조건이 이해가 잘 안 된다면 아무 사차함수나 그려서 생각해보면 됩니다.
즉, 예시를 들어서 생각해보면 됩니다.

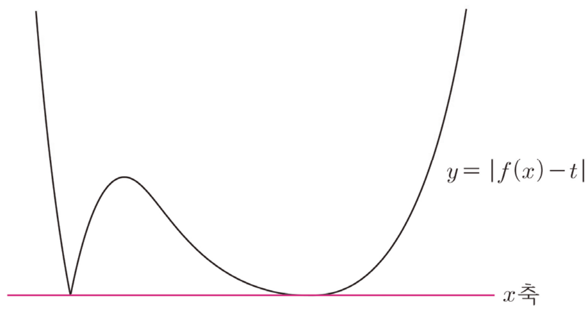




그림과 같이 $y=|f(x)-t|$의 그래프가 그려지고
$y=f(x)$와 $y=t$의 교점이 $y=|f(x)-t|$의 미분불가능한 점이 됩니다.
이 경우 미분불가능한 점이 2개이므로 $g(t)=2$가 되고요.

그럼 $y=f(x)$와 $y=t$의 교점이 항상 $y=|f(x)-t|$에서 미분이 불가능한지 생각해보면
꼭 그런 것은 아닙니다.
우리가 알고 있는 사차함수의 개형 중 다음과 같은 개형에서는 교점이 미분가능할 수도 있습니다.

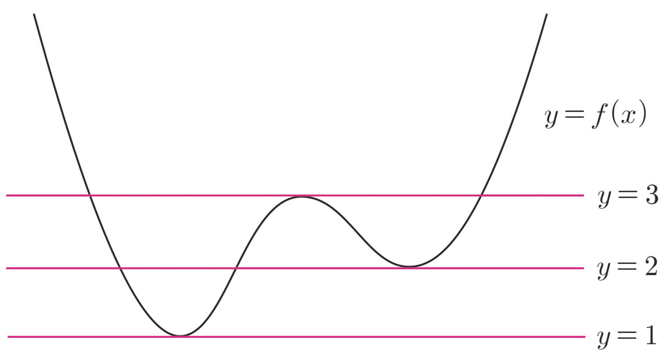




그림과 같이 $y=t$와 $f(x)$가 접하는 교점에서는 $y=|f(x)-t|$가 미분가능합니다.
이 경우는 $g(t)=1$이 되겠지요.

여기까지 생각해본 걸로 $g(t)$를 생각해보면
$g(t)$는 t의 범위에 따라 상수로 나타나게 되고
함수 $g(t)$가 $t=3$, $t=19$에서 불연속이라는 말은
$t=3$, $t=19$에서 $y=|f(x)-t|$의 미분불가능한 점의 개수가 바뀐다는 말이 됩니다.
사차함수 $f(x)$와 $y=t$가 접하는 t에서 $y=|f(x)-t|$의 미분불가능한 점의 개수가 바뀌게 될 것이므로 함수 $g(t)$가 $t=3$, $t=19$에서 불연속이라는 말은 곧 $f(x)$의 극대, 극소, 또는 $y=t$와 접하는 어떤 점에서의 함숫값이 $3, 19$가 될 것이라고 유추할 수 있습니다.

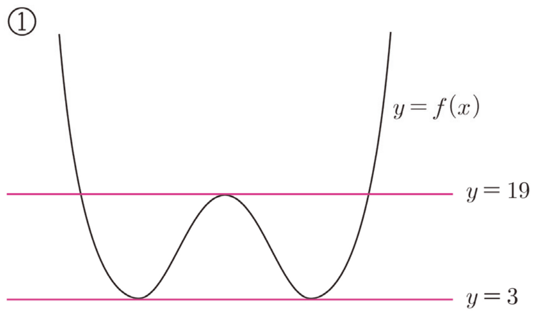
처음에 예시를 들었던 사차함수로 다시 생각해봅시다.

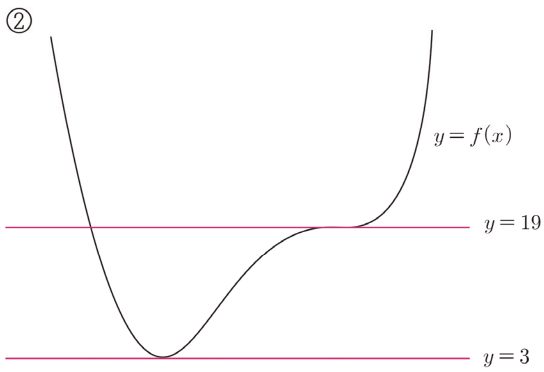


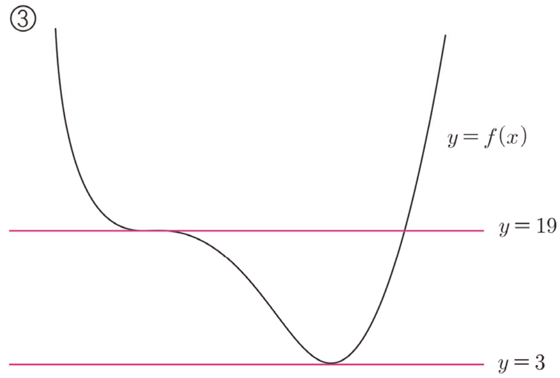
이 사차함수 $f(x)$의 경우, $y=t$와 접하는 경우가 총 세 가지인데
이렇게 되면 $g(t)$가 불연속인 점이 3개가 됩니다.

정확히 $g(t)$를 구해보면 $g(t)=\begin{cases} 0 & (t \le 1) \\ 2 & (1 < t \le 2) \\ 4 & (2 < t < 3) \\ 2 & (t \ge 3) \end{cases}$입니다.

$g(t)$가 $t=1$, $t=2$, $t=3$에서 불연속이므로 총 3개인데
2개에서만 불연속이어야 하므로 $f(x)$는 이런 개형이 되면 안 되고,
다른 개형을 생각해보면 총 3가지의 개형이 가능하겠습니다.







①, ②, ③ 모두 $g(t)$가 $t=3$, $t=19$에서만 불연속입니다.
이제 $f(0)=3$, $f'(3)<0$을 이용해서 정확히 어떤 개형인지만 밝혀내면 되겠습니다.

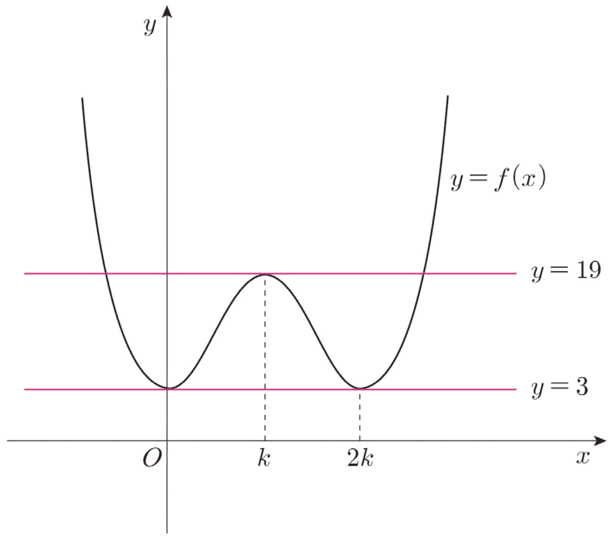
①의 경우, 왼쪽 극소점의 x좌표가 0이라고 생각해보면 $x>0$에서 $f(x)$가 감소하는 구간이 있으므로 이 구간에 $x=3$이 있다고 생각할 수 있고, 따라서 ①은 조건을 모두 만족시키는 개형입니다.

②의 경우, 극소점이 하나뿐이므로 이 극소점의 x좌표가 0일 텐데, $x>0$에서 $f(x)$는 항상 증가만 합니다. $f'(3)<0$을 만족시키지 못하므로 이 개형은 불가능합니다.

③의 경우도 마찬가지로, 극소점의 x좌표가 0이라 하면 $x>0$에서 $f(x)$가 항상 증가하므로 $f'(3)<0$을 만족시키지 못합니다.

따라서 ①이 사차함수 $f(x)$의 개형입니다.

이 문제를 많이 풀어본 수험생이라면 $f(x)$가 단번에 ①이라는 것을 알고 쉽게 풀어내거나, 논리적인 비약으로 ①이라고 확정을 짓고 풀이를 진행할 수도 있습니다.
강조하건대, 이런 식으로 문제를 풀면 그저 손 운동만 한 것일 뿐, 수학 실력에는 크게 도움이 되지 않습니다.
풀어본 문제일지라도 완전한 논리로 풀이를 진행해야 하고,
너무 많이 풀어봐서 논리적인 전개조차도 외울 정도라 한다면 지금 풀지 않고 몇 개월 후에 다시 풀어보는 게 더 낫습니다.



극대점의 x좌표를 k라 하면,
$f(x)$의 두 극소점이 $y=3$과 동시에 접하므로 $f(x)$는 $x=k$에 대칭인 사차함수이고
따라서 극소점의 x좌표는 각각 $x=0$, $x=2k$가 됩니다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라고 두고 구한 정보들을 대입해서 미지수를 구해내도 되고
$y=3$에서 두 극소가 접하므로 $f(x)-3=x^2(x-2k)^2$으로 둬도 되겠습니다.
$f(k)=19$이므로 $x=k$를 대입하면
$f(k)-3=16=k^4 \Leftrightarrow k=\pm 2$
k가 양수이므로 $k=2$입니다.

$f(x)=x^2(x-4)^2+3$이므로
$f(-2)=4\times 36+3=147$입니다.
답은 147입니다.

문제 상황 자체를 이해하는 게 많이 어려웠던 문제입니다.
최근에는 $|f(x)-t|$와 같은 형태의 수식들이 쉬운 문제에서도 많이 등장했고 기출을 통해 집중적인 학습이 가능해져서 이 문제를 처음 봐도 풀 수 있을 만큼 실력을 올리는 게 많이 수월해졌습니다.

여러분이 이 문제를 통해 생각해봐야 하는 것은
이 문제를 처음 마주했었을 때 어떤 느낌이었고, 상황 이해를 할 때 어떤 생각으로 이해를 했었고, 그 과정들에서 스스로 느꼈던 부족한 부분이 무엇인지와 같은 것들입니다.
이 문제와 같이 문제 상황 자체를 이해하는 것이 어려운 문제들은 앞으로도 꾸준히 나오게 될 것이므로, 상황 이해가 잘 안 될 때 어떤 생각과 판단을 해야 할지 스스로 플랜을 세워보고, 그 과정에서 부족한 부분을 채우기 위해 꾸준히 연습하는 것이 필요합니다.
너무나 당연한 이야기들 같지만, 이걸 중요하게 생각하지 하지 않아서 많은 수험생들이 실전에서 고배를 마시고 있습니다. 여러분들은 같은 실수를 하지 않길 바랍니다.

답) 147