[4점]

문 제

공략집

기하와 벡터

서문

저는 원래 수학을 전혀 못하던 학생이었습니다. 수능 시험을 보기 위해 수학을 처음 공부해야 했던 그때를 돌이켜보면, 눈앞이 캄캄하기만 했습니다. 수많은 수기와 수학 공부법을 보면서 수학 공부를 해야 했고, 그 흔한 과외나 학원도 못 다녀보고 혼자 끙끙대며 실력을 키워야 했습니다.

제가 수능 수학을 공부하며 항상 생각했던 것은, '수학 고수들도 내가 푸는 것처럼 이렇게 풀까? 아니라면 무슨 생각을 하면서 문제를 풀까?'였습니다. 주변에는 물어볼 사람도, 같이 공부를 해나가는 사람도 없었으니까요. 제가 공부하는 이 방법이 맞는지 끊임없이 고민해야 했고, 오르비같은 수능 커뮤니티에서 여러 정보를 얻으며 혼자 헤쳐 나가야만 했습니다.

인고의 시간을 거쳐 결국 수학을 잘하게 되었으나 그때는 이미 여러 번의 수능 시험을 거친 뒤였습니다. 나중에 생각해보니, 고통 속에서 혼자서 알아냈던 그 정보들은 어떻게 보면 수학을 잘하는 사람에게 배울 수 있었던 아주 간단한 정보들이었다는 생각이 들었습니다. 저는 지금 그때의 제 경험들을 토대로 3년째 수학 과외를 하고 있습니다.

바로 그 정보, '수학 고수들은 도대체 무슨 생각으로 4점 문제를 풀까?'에 대한 해답을 이 책에서 보여드리려고 합니다. 마치 옆에서 과외를 하는듯한 꼼꼼함으로, 수능 수학에서 어려움을 겪고 있는 여러분들이 궁금해하는 바로 그 부분들에 답해주는 책이 될 것입니다.

이 책에서 여러분이 얻을 수 있는 것은 2가지입니다.

1 수능 수학에서 4점 문제를 풀기 위해 필요한 최소한의 수학 도구를 제공합니다. 여러분이 수능날 받게 되는 수능 수학 시험지의 모든 문제는 교과서의 기본 개념 도구와 제가 제시하는 플러스 도구로 반드시 풀립니다. 플러스 도구는 전혀 새로운 개념이 아닙니다. 교과서에 있는 개념 도구들로 4점 문제들을 풀기 위한 '교두보' 역할을 해주는, 4점 문제를 풀기 위해 반드시 필요한 도구입니다. 여러분들이 수능 수학 100점을 받기 위해 필요한 '최소한의 도구'를 이 책에 담았습니다.

2 기본 개념 도구와 플러스 도구를 모두 장착했다면, 기출문제집이 제공하는 모든 4점 문제를 풀 수 있습니다. 그러나 여러분은 그 과정에서 많은 시행착오를 겪어야 할 것입니다. 저는 그 시행착오를 최소한으로 줄여드리기 위해, 여러분이 가지고 있는 그 도구로 ‘실전에서’ 어떻게 문제를 푸는지 보여드립니다. 과외를 하는듯한 느낌으로, 4점 문제를 푸는 동안 머릿속에서 일어나는 모든 생각을 해설에 담았습니다. 이 생각들은 여러분이 n수를 하게 되면 자연히 얻을 수 있는 실전 경험들입니다. 여러분이 굳이 n수를 하지 않아도, 그 경험을 온전히 가질 수 있도록 하는 해설이 될 것입니다.

이 책이, 수능 수학에서 정점을 찍으려고 하는 분들에게 큰 도움이 되어 기억에 남는 책이 되었으면 좋겠습니다.

마지막으로, 감사를 드릴 분들이 너무나 많습니다.

경험이 없는 저에게 출판을 허락해주신 박성준 대표님,
저에게는 아이돌과 같은 분이신 이광복 이사님,
늦은 마감과 번거로운 작업에도 내색 없이 작업해주신 오르비 직원분들
모두에게 감사드립니다.
바쁜 핑계로 자주 만나지 못했는데도 항상 응원해준 친구들,
사소한 것 하나까지 꼼꼼하게 검토해주신 검토자 분들,
사랑하는 아버지와 어머니, 우리형
모두에게 감사드립니다.
그리고 이 책의 처음부터 끝까지 함께 해준 다인이에게 고맙다는 말 전하고 싶습니다.

이 책의 구성

단원 설명

해당 단원이 수능에서 어떻게 출제되는지와 공략하는 방법을 개략적으로 설명합니다. 단원 설명에는 기본 개념 도구가 포함되어 있는데, 기본 개념 도구는 교과서에 있는 해당 단원의 모든 기본적인 도구를 뜻합니다. 이 책에서는 자세하게 다루지 않으므로 반드시 교과서로 공부를 해야 합니다.

플러스 도구

기본 개념 도구는 4점 문제에서도 똑같이 사용됩니다. 다만 4점 문제에 기본 개념 도구를 그대로 적용시키려 하면 4점 문제의 표현법이나 논리에서 어려움을 느낄 것입니다. 이러한 고충을 덜고자 플러스 도구는 기본 개념 도구와 4점 문제 사이의 멀어 보이는 간격에 다리를 놓아주는 역할을 할 것입니다. 플러스 도구는 전혀 새로운 개념을 배우는 것이 아닙니다. 기본적으로 플러스 도구는 기본 개념 도구의 연장선에 있으므로, 수능 출제 범위에서 벗어나지 않습니다. 플러스 도구가 익숙해진다면, 기본 개념 도구로 2점, 3점 문제를 풀 듯 4점 문제에서도 기본 개념 도구의 사용이 능숙해질 것입니다.

4점 문제 풀어보기&풀이법

여러분이 장착한 기본 개념 도구와 플러스 도구를 가지고 본격적으로 문제를 풀어보게 됩니다. 그리고 여러분이 장착한 그 도구들만으로 어떻게 문제를 풀어나가는지 보여줍니다. 그 모든 생각들은 수많은 문제들을 풀면서 쌓아온 생생한 경험으로 이루어져 있습니다. 여러분은 그 경험들을 시행착오 없이 얻을 수 있으며, 특히 실전 경험은 직접 시험에서 겪어본 사람들만이 알 수 있는 정보들이므로 여러분들에게 귀중한 자산이 될 것입니다.

목차

이 책을 공부하는 방법

1. **교과서에서 기본 개념 도구의 설명을 보세요.**
2. **교과서의 예제와 유제를 풀면서 기본 개념 도구를 이해하세요.**
3. **기출문제집에서 2점, 3점 문제를 모두 풀어 기본 개념 도구를 익숙하게 만드세요.**

기본 개념 도구를 손에 익히기 위해 반드시 해야 하는 과정입니다. 아직 2점, 3점 문제가 어렵다면 도구들이 손에 익지 않은 것입니다. 머리로 생각하기 전에 손이 먼저 가는 수준이 되었다면 숙달된 것입니다.

4. **플러스 도구의 설명을 보세요.**

플러스 도구까지 모두 장착을 한다면, 여러분은 4점 문제를 풀 준비가 된 것입니다. 4점 문제는 기본 개념 도구와 플러스 도구만으로 반드시 풀리기 때문입니다.

5. **익숙하게 만든 기본 개념 도구와 플러스 도구를 이용해서 4점 문제에 도전해보세요.**
6. **문제를 맞혔든 틀렸든, 다음 장의 풀이법을 보고 내가 생각한 것과 해설이 생각한 것을 비교해보세요. 문제를 풀고 그 직후 바로 봐야 합니다.**
7. **4점 문제를 모두 이렇게 공부한 후, 기출문제집에서 4점 문제를 연습하세요.**

4점 문제에 본격적으로 도전하고, 부딪히고, 뚫어내면서 여러분이 가진 도구들로 직접 경험하세요. 그리고 해설은 여러분이 이미 가지고 있는 도구로 어떻게 답을 만들어내는지 그 생각을 공부하세요. 여러분은 이미 수능 문제 모두를 풀어낼 수 있는 도구를 가지고 있는 겁니다.
한 번 뚫어내기 시작했다면 어떤 문제가 다가와도 다 풀 수 있도록 4점 문제로 다시 연마하세요. 무사가 검술을 끊임없이 연마하는 것처럼, 여러분의 도구와 생각들은 연마하면 할수록 더욱 능숙해질 것이고, 문제가 그 어떤 것을 물어봐도 모두 답할 수 있는 고수의 경지에 오르게 될 것입니다.

앞으로 여러분이 보는 시험에 나오는 문제는 그 모습이 계속 바뀌겠지만, 그 문제 속에서 생각하는 방법은 바뀌지 않을 것입니다. 이 책의 핵심은 그 생각하는 법을 배우는 것입니다.

머리 좋은 사람이 수학을 잘하는 것이 아닙니다.
수학을 하다 보니 머리가 좋아지는 것입니다.

수능 수학 공부의 목적

잘 생각해보면, 우리가 수학 공부를 하고 있는 궁극적인 이유는 수능 시험을 잘 보기 위함입니다. 수능 수학에서 100점을 받는 것이 목적이지요. 그런데 많은 수험생들이 수학 공부를 할 때 문제를 맞히는 것에 집착합니다.

수학 시험에서는 문제를 맞히는 것이 당연합니다. 우리는 그것을 위해 그동안 그 많은 수학 문제를 풀어왔으니까요. 그런데, 수학 문제를 '연습'할 때도 우린 맞히는 것을 목적으로 공부할 때가 많습니다.

아닙니다. 수학을 연습할 때는 문제를 맞히는 것이 중요한 게 아닙니다.
풀이를 정교하게 만드는 것이 중요합니다.
어떤 상황에서도 풀이에 쓰이는 도구를 능숙하게 쓰기 위해서, 그 풀이의 연결고리와 논리가 완벽해지기 위해서 수학 문제를 풀면서 공부하고 있는 겁니다.

공부를 할 때 문제를 맞히지 못하면 시험에서도 맞히지 못하는 것 아니냐고 물어보는 수험생들이 있을 겁니다.
맞습니다. 공부할 때도 못 푸는 문제는 시험에서도 못 풉니다.
그런데 공부할 때 맞힌 문제도 시험에서 틀리는 경우가 너무나 많습니다. 그 경우가 바로 연습에서 문제를 풀어내는 것에만 집착했을 때입니다.

우리는 수많은 수학 해설집이 논리적인 풀이로 이루어져 있음을 알고 있습니다. 하지만 정작 많은 수험생들은 스스로 그 논리적인 풀이를 했는지 안 했는지 별로 따져보지 않습니다. 그저 맞혔으면 다음에도 맞겠지, 이런 낙관적인 태도로 일관합니다. 감으로 풀어낸 문제조차도요.
틀린 문제는 해설지를 보지 말라는 말을 그렇게 많이 들었는데, 정작 맞힌 문제는 해설지를 봐야 한다는 말을 많이 듣지 못합니다.

여러분의 수학 공부 목적은 문제를 맞히기 위함이 아닙니다.
여러분은 풀이를 정교하게 만들어야 합니다.
우리가 수학 문제를 푸는 이유는,
수학 문제를 풀어냄으로써 얻는 쾌감 때문이 아니라,
수능에서 처음 보는 새로운 문제에 정교한 풀이를 써내기 위함입니다.

이제부터 바꾸십시오.
수학문제를 풀고, 맞힌 문제는 반드시 해설을 보면서 내 풀이가 논리적으로 타당하고 정교했는지, 그렇지 못하다면 더 논리적이고 더 정교하게 바꿀 방법을 끊임없이 고민하세요.
시험에서, 그동안 여러분이 감으로 풀어내고 투박하게 풀어낸 연습문제들은 전혀 도움이 되지 않습니다.
오직 완벽한 풀이를 위해 끊임없이 고민한 그 시간만이 시험에서 점수로 환원됩니다.

2

공간도형과 공간좌표

많은 수험생들이 공간도형을 어려워하는데 사실 문제에서 체감하는 것만큼 내용이 그렇게 어려운 것은 아닙니다. 교과서에 있는 논리는 우리의 인식으로는 너무 당연해보이고 쉽지요. 직선과 평면의 위치관계나, 평면과 평면의 위치 관계 등 읽으면서 전혀 막힘이 없습니다. 그런데 정작 문제를 마주치면 손을 댈 수가 없습니다. 어디서부터 시작해야 할지 모르겠고, 어디에 교과서 개념을 써야 할지 몰라서 풀이의 시작조차도 안 되는 경우가 많습니다.

그래서 많은 수험생들은 이 어려움을 공간지각력의 탓으로 돌립니다. 마치 공간지각력을 타고난 학생들만 정복할 수 있는 단원처럼 여기고, 쉽게 포기합니다. 그래서 여러 해 동안 이 단원은 머리 좋은 학생들의 성역처럼 여겨져 왔습니다.

단언하건대 이 단원은 절대 공간지각력 하나만으로 승부를 보는 단원이 아닙니다. 교육 과정은 모든 학생이 동등한 내용을 익힐 수 있도록 구성되는데 만약 공간지각력이 뛰어난 학생만 이 단원을 정복할 수 있다면 그건 교육과정이 잘못됐단 소리겠지요. 잘못된 교육과정이라면 고쳤어야 했을 텐데, 오랜 세월 이 단원은 그 명맥을 유지했습니다. 즉, 이 단원은 모든 학생들이 정복할 수 있는 단원이라는 말입니다.

교과서에서 설명하는 그 많은 논리들과 생각들은 공간도형 문제를 푸는 데에 필요한 재료가 됩니다. 예를 들면, 우리가 교과서를 학습하면서 아주 당연하게 여겼던 평면과 평면의 위치관계는 우리가 공간지각력으로 해결할 수 없는 수많은 평면들의 위치를 논리적으로 파악할 수 있게 해줍니다. 수선정리는 평면에 수직인 직선은 평면 위의 모든 직선들과 수직이라는 논리를 펼치고, 이는 문제에서 막강한 힘을 발휘합니다. 우리는 공간지각력이 부족해도 그 빈틈을 논리로 채워낼 수 있습니다.

논리가 반복이 되면 직관이 됩니다. 교과서의 논리적인 풀이 과정을 반복하다 보면 어느 순간 선천적인 탓으로만 돌렸던 그 공간지각력이 내 머릿속에 자리를 잡을 것입니다.

공간도형이 어렵고 하기 싫은 이유는 유전자 때문이 아닙니다. 공간도형은 공부하는 것만으로 해결할 수 없다는 불신과 공부하는 길을 찾지 못해 방황하는 그 불안 때문입니다.

이 단원에서 공간도형을 논리로 풀어내는 그 과정을 익히시고 끊임없이 반복하세요. 그토록 어려워하던 공간도형을 누군가에게 설명해주고 있는 나 자신을 발견할 수 있을 것입니다.

기본 개념 도구	기본 개념 도구 익히기 Step
직선, 평면의 위치 관계 이면각 삼수선의 정리 정사영 좌표공간에서의 점의 좌표 두 점 사이의 거리 선분의 내분점과 외분점 구의 방정식	1. 교과서에서 기본 개념 도구의 설명을 보세요. 2. 교과서의 예제와 유제를 풀면서 기본 개념 도구를 이해하세요. 3. 기출문제집에서 2점, 3점 문제를 모두 풀어 기본 개념 도구를 익숙하게 만드세요.

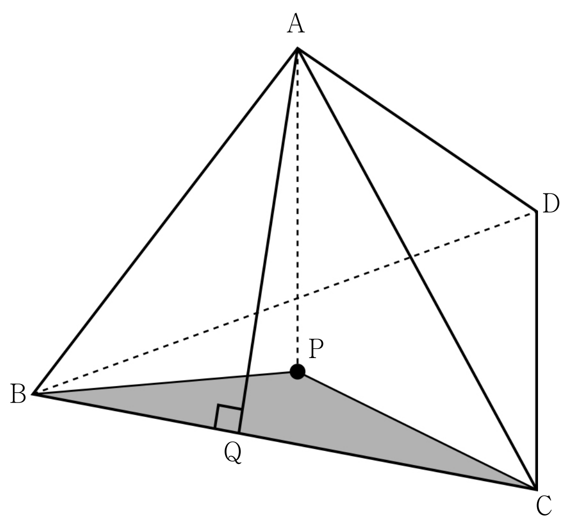
기본 개념 도구를 손에 익히기 위해 반드시 해야 하는 과정입니다. 아직 2점, 3점 문제가 어렵다면 도구들이 손에 익지 않은 것입니다. 머리로 생각하기 전에 손이 먼저 가는 수준이 되었다면 숙달된 것입니다.

플러스 도구

▶도구 2-2 직선, 평면의 위치관계 실전

교과서에서 수험생들이 가장 무심코 지나가는 내용이 바로 직선, 평면의 위치관계입니다. 내용이 단순하고 당연한 사실들로 서술되어 있기 때문에 그렇습니다. 그런데 이 부분을 소홀히 하고 넘어간 대다수의 수험생들은 이 부분을 문제에서 적용하는 방법을 몰라 4점 문제에서 고전하곤 합니다.

도구 2-1에서 설명했던 단면화를 하는 이유는 머릿속으로 공간상의 도형을 그리기가 어렵기 때문입니다. 같은 이유로, 우리는 공간도형을 보면 공간의 위치관계를 쉽게 머릿속으로 그리기가 어렵습니다. 예를 들면, 다음 그림과 같은 경우입니다.

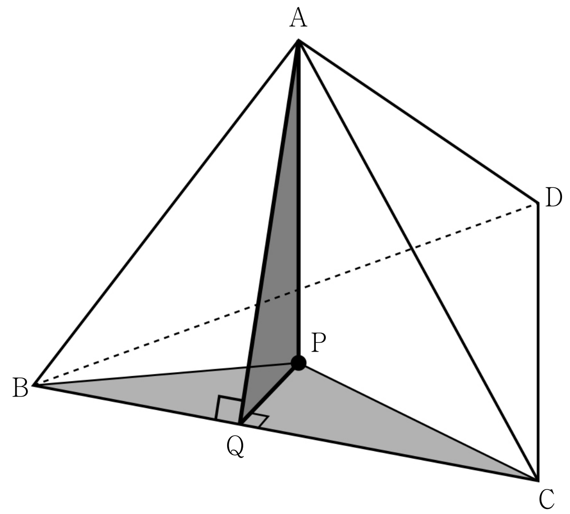


2016학년도 9월 평가원 모의고사에서 나왔던 공간도형 문제의 그림입니다. 점 P는 점 A에서 평면 BCD에 그은 수선의 발입니다. 여기서 구해야 했던 것은 삼각형 BCP의 넓이였는데, $\overline{BC}$의 길이는 문제에서 제시했었습니다. 따라서 삼각형 BCP의 높이만 구하면 답이 나오는 상황이었습니다.

여러분은 이 그림을 보고 $\overline{PQ}$가 삼각형 BCP의 높이라는 것을 단번에 알 수 있나요?
삼수선의 정리와 위치관계 등을 다 빼고 생각해보면, 절대 확신할 수 없습니다. 그림으로는 직각처럼 보일 수도 있는데, 이게 평면 그림도 아니고 공간을 평면에 그려둔 것이기 때문에 그림 자체가 왜곡될 수밖에 없습니다.

그럼 평면에 그려진 공간도형들은 모두 그림이 왜곡되므로 그림만 가지고는 판단할 수 없다는 결론이 나옵니다. 여기서 이 도형을 생각하는 방법이 두 가지가 있는데, 하나가 공간지각력으로 머릿속에서 도형을 그려보는 것, 또 하나가 논리적으로 증명하는 것입니다.
교과서에서 설명하는 것이 바로 두 번째 방법, 논리적으로 증명하는 것입니다. 만약 이 문제들을 공간지각력을 이용해서 풀어야 했다면 선택된 몇몇 학생들만 가능했겠지요. 모든 수험생들이 공간상의 도형들을 이해할 수 있도록 하기 위해 교과서에서 직선, 평면의 위치관계와 수선정리 등을 설명했던 것입니다.

교과서에 따르면, 꼬인 위치가 아니면서 일치하지 않는 두 직선은 하나의 평면을 결정합니다. 따라서 직선 AP와 직선 AQ는 한 점에서 만나는 직선이므로 하나의 평면을 결정합니다. 다음으로, 직선 AP는 평면 BCD와 수직이므로 수선정리에 따라 평면 BCD에 포함되는 직선 BC와 수직입니다. 직선 AQ 또한 직선 BC와 수직이므로, 수선정리에 따라 직선 BC는 직선 AP, 직선 AQ로 만들어지는 평면과 수직입니다. 따라서 평면 APQ에 포함되는 직선 PQ는 직선 BC와 수직이고, $\overline{PQ}$는 삼각형 BCP의 높이가 됩니다.



이것이 바로 문제가 원하는 공간도형의 해석법입니다! 공간지각력으로 도형들을 해석하라는 것이 아니라, 수학적인 논리로 우리가 머릿속으로 지각할 수 없는 공간상의 도형들을 논리적으로 확신하라는 교과서의 깊은 뜻이 있는 것입니다.

교과서에서 배울 수 있는 직선, 평면의 위치관계와 결정조건들을 책 한번 보는 것으로 완전히 습득할 수는 없습니다. 수많은 공간도형들을 마주하면서 항상 논리적으로 해석하려 노력하고, 그 논리들을 계속 다시 보면서 어떤 도형에서 어떤 상황일 때 논리적으로 판단해야 하는 지를 꾸준히 반복해야 합니다.
교과서를 여러 번 읽고 문제를 많이 접하면서 오랜 시간을 투자할 생각으로 공간도형과 공간좌표 단원을 공부하세요. 이 과정이 제대로 이루어졌을 때 비로소 여러분에게도 공간지각력이 자리 잡을 것입니다.

4점 문제 풀이법 3

29. 좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}| = |\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}| = 2$
>
> (나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right) = \cos\frac{3-k}{3}\pi$
>
> $(k = 1, 2, 3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]

2013학년도 9월 평가원 모의고사에서 29번으로 출제된 문제인데, 당시 30번과 더불어서 시간을 많이 잡아먹은 문제였습니다. 실제로 풀이를 시작하기도 매우 어려웠습니다. 네 점의 위치가 추상적이라, 어디서부터 시작해야 할지 모르는 경우가 많았을 것입니다.

문제를 읽어보면, 조건 (가)와 (나)가 주어져있고, 구해야 하는 것은 $|\overrightarrow{A_1A_2}|$의 최댓값입니다. (가)는 두 벡터의 크기를 제시했고, (나)는 단순히 봐서는 알 수 없는 식입니다.

조건을 준 이유는 문제를 푸는데 필요한 정보들을 숨겨놓고 알아서 해석하라는 뜻이고, 우리는 조건을 해석하여 문제가 제시하는 모든 정보들을 모아야 합니다. 정보를 이용하는 것은 그 다음입니다. 우선 되는대로 정보를 모두 뽑아봅시다.

우선, (나)를 해석하기 위해 k에 $1, 2, 3$을 대입하여 식을 만들어 봅시다.

$k=1$일 때, $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3} \cdot (\overrightarrow{A_0A_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}) = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$k=2$일 때, $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3} \cdot (\overrightarrow{A_0A_2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}) = \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$

$k=3$일 때, $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3} \cdot (\overrightarrow{A_0A_3} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}) = \frac{1}{4}|\overrightarrow{A_0A_3}|^2 = \cos 0 = 1$, $|\overrightarrow{A_0A_3}| = 2$

식이 많이 복잡합니다. 우선 계산이 가능한 부분들부터 먼저 계산해서 최대한 간단하게 만들어 봅시다.

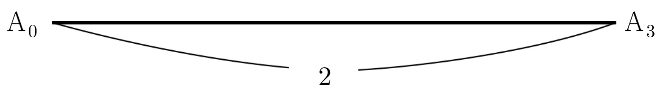
$k=1$일 때, $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3} \cdot \overrightarrow{A_0A_1} - \frac{1}{4}|\overrightarrow{A_0A_3}|^2 = -\frac{1}{2}$, $|\overrightarrow{A_0A_3}| = 2$이므로

$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3} \cdot \overrightarrow{A_0A_1} - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3} \cdot \overrightarrow{A_0A_1} = \frac{1}{2}$ 따라서 $\overrightarrow{A_0A_3} \cdot \overrightarrow{A_0A_1} = 1$입니다.

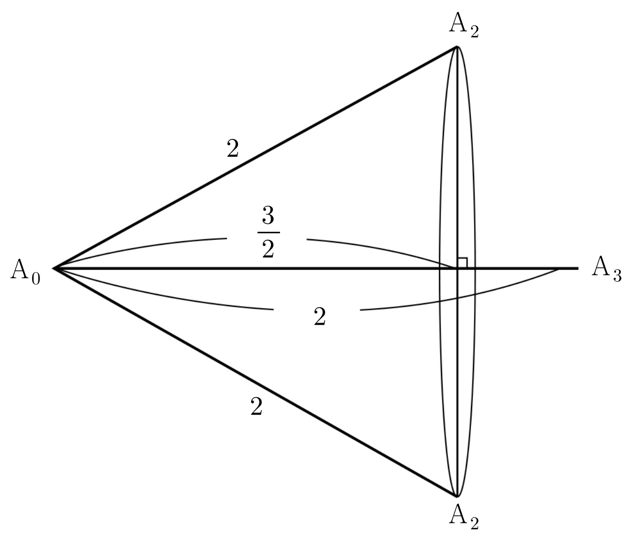
$k=2$일 때도 마찬가지로 $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3} \cdot \overrightarrow{A_0A_2} - 1 = \frac{1}{2}$이므로 $\overrightarrow{A_0A_3} \cdot \overrightarrow{A_0A_2} = 3$입니다.

우리가 조건 (가), (나)를 통해 얻은 모든 정보를 나열하면,
$|\overrightarrow{A_0A_2}|=2$, $|\overrightarrow{A_1A_3}|=2$, $|\overrightarrow{A_0A_3}|=2$, $\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}=1$, $\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}=3$입니다.
이 이상 뽑을 정보는 없는 것 같습니다. 이제 이 정보들만 가지고 공간에서 A_0, A_1, A_2, A_3의 위치를 표현해야 합니다.

이 문제에서 정보를 모두 뽑아놓고 풀이 진행이 막히는 경우가 많을 텐데, 점 위치가 벡터의 크기와 내적으로 표현되어 있어서 추상적이니 당연한 것입니다. 문제만 보고 추측해보기로는, 최댓값을 구하는 것이니 어떤 점은 위치가 변할 수 있다고 생각할 수 있고, 내적 값이 고정되어 있으니 두 벡터가 이루는 각은 고정되어 있다고 생각할 수도 있습니다. 그런데, 이런 생각들을 생각으로만 하고 있으면 머릿속이 복잡해지고 풀이의 길이 추상적으로만 진행될 것입니다. 우선 길이가 정해진 두 점을 먼저 찍어두고 생각해봅시다. 길이도 알고 내적 정보에서도 모두 보이는 A_0과 A_3가 좋겠습니다.

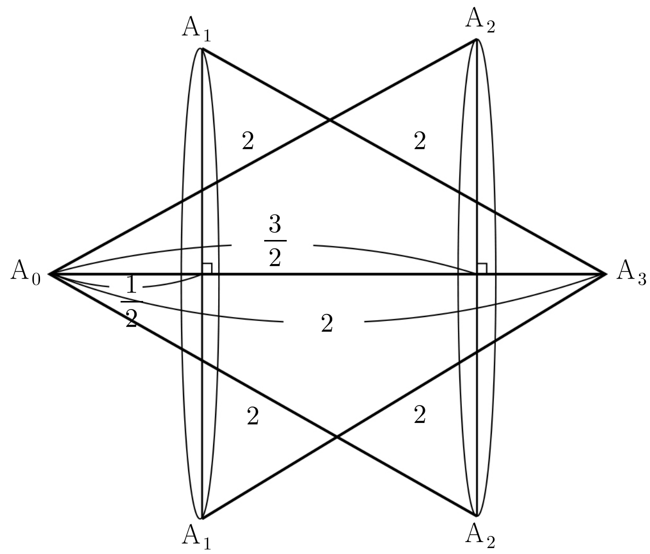


두 점 A_0, A_3을 기준으로 점 A_2의 위치를 예상해보면, $|\overrightarrow{A_0A_2}|=2$를 통해 점 A_0에서부터 거리가 2인 위치인데, 공간이므로 점 A_0을 중심으로 하는 구 위에 있다고 생각할 수 있습니다.
$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}=3$을 통해 $\overrightarrow{A_0A_3}$과 $\overrightarrow{A_0A_2}$, 즉, 점 A_0를 시점으로 하는 두 벡터의 내적 값이 정해져 있으므로 두 벡터의 각은 정해져 있다는 것을 알 수 있습니다.
따라서 구 위에 있는 점 A_2의 위치는 다시 한정되는데,
$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}=|\overrightarrow{A_0A_3}||\overrightarrow{A_0A_2}|\cos\theta=3$에서 $|\overrightarrow{A_0A_3}|=2$이고 $|\overrightarrow{A_0A_2}|=2$이므로
$|\overrightarrow{A_0A_2}|\cos\theta=\dfrac{3}{2}$ 또는 $|\overrightarrow{A_0A_3}|\cos\theta=\dfrac{3}{2}$로 생각할 수 있습니다.
$\overrightarrow{A_0A_3}$은 기준 벡터로 두고 $|\overrightarrow{A_0A_2}|\cos\theta=\dfrac{3}{2}$로 생각해보면, 선분 A_0A_2가 선분 A_0A_3 위에 내린 정사영의 길이가 $\dfrac{3}{2}$라고 생각할 수 있습니다.



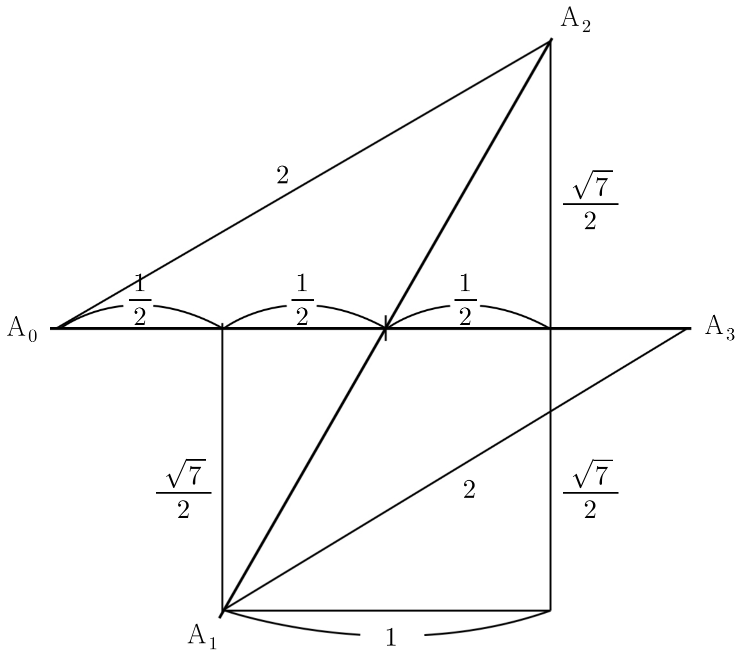
점 A_0를 중심으로 하는 구 위의 점에서 점 A_0를 꼭짓점으로 하는 원뿔의 밑면 위의 점으로 A_2의 위치가 한정되었습니다.

이번엔 점 A_1의 위치를 예상해봅시다.
$|\overrightarrow{A_1A_3}|=2$이고 $\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}=1$이므로, 점 A_2의 위치를 예상했던 것과 동일한 방법으로 생각해보면 $\overrightarrow{A_1A_3}$의 크기가 2로 정해져있고, 선분 A_0A_1의 선분 A_0A_3 위로의 정사영의 길이가 $\frac{1}{2}$입니다.
따라서 점 A_1도 점 A_0 또는 점 A_3을 꼭짓점으로 하는 원뿔의 밑면 위의 점으로 생각할 수 있습니다.



점 A_0, A_1, A_2, A_3의 위치를 모두 정했습니다. 우리가 여기까지 풀이를 진행하는 동안 했던 것은, 문제를 통해 얻을 수 있는 정보를 모두 얻고 그 정보를 바탕으로 또 다른 정보를 얻거나 해석한 것입니다. 4점 문제는 큰 틀에서 이런 방식으로 풀이를 진행하는 것이고, 이건 난이도가 쉽던 어렵던 항상 같은 패턴입니다. 문제를 푸는 수험생들은 무의식중에 이런 풀이 진행을 해왔겠지만 의식적으로 정보를 뽑으려 하고 해석하려 노력하면, 풀이 전개에서 붕 뜬 느낌이나 막연하게 문제가 어렵다는 느낌이 많이 줄어들 것입니다.

구해야 하는 것은 $|\overrightarrow{A_1A_2}|$의 최댓값이므로 점 A_1과 점 A_2가 가장 멀리 있을 때를 정하여 길이를 구해줍시다.



점 A_1과 A_2가 각각의 원에서 직선 A_0A_3으로부터 가장 멀리 떨어져 있으면서 반대 방향일 때 두 점은 가장 멀리 떨어져 있습니다.

위 그림과 같이 길이를 피타고라스의 정리로 구하고, 선분 A_1A_2의 길이를 구하면 $\sqrt{(\sqrt{7})^2+1^2}=2\sqrt{2}$ 입니다.
따라서 답은 8입니다.

이 문제가 최근 6개년 동안 출제된 평가원 시험의 벡터 문제 중 가장 어려운 문제입니다. 이 문제 이후로, 그러니까 2014학년도부터는 벡터 단일 문제에서 이렇게 어렵게 나온 적이 한 번도 없었습니다. 하지만 개정 이후 기하와 벡터 단원에서 10문제가 출제되므로, 벡터에서 어려운 문제가 나올 가능성을 여전히 배제할 수 없습니다. 이 문제를 여러 번 분석하면서, 어떤 생각과 과정으로 풀이 전개가 이루어졌는지 다시 검토해보시길 바랍니다.

답) 8