[4점]

문 제

공략집

미적분 2

서문

저는 원래 수학을 전혀 못하던 학생이었습니다. 수능 시험을 보기 위해 수학을 처음 공부해야 했던 그때를 돌이켜보면, 눈앞이 캄캄하기만 했습니다. 수많은 수기와 수학 공부법을 보면서 수학 공부를 해야 했고, 그 흔한 과외나 학원도 못 다녀보고 혼자 끙끙대며 실력을 키워야 했습니다.

제가 수능 수학을 공부하며 항상 생각했던 것은, '수학 고수들도 내가 푸는 것처럼 이렇게 풀까? 아니라면 무슨 생각을 하면서 문제를 풀까?'였습니다. 주변에는 물어볼 사람도, 같이 공부를 해나가는 사람도 없었으니까요. 제가 공부하는 이 방법이 맞는지 끊임없이 고민해야 했고, 오르비같은 수능 커뮤니티에서 여러 정보를 얻으며 혼자 헤쳐 나가야만 했습니다.

인고의 시간을 거쳐 결국 수학을 잘하게 되었으나 그때는 이미 여러 번의 수능 시험을 거친 뒤였습니다. 나중에 생각해보니, 고통 속에서 혼자서 알아냈던 그 정보들은 어떻게 보면 수학을 잘하는 사람에게 배울 수 있었던 아주 간단한 정보들이었다는 생각이 들었습니다. 저는 지금 그때의 제 경험들을 토대로 3년째 수학 과외를 하고 있습니다.

바로 그 정보, '수학 고수들은 도대체 무슨 생각으로 4점 문제를 풀까?'에 대한 해답을 이 책에서 보여드리려고 합니다. 마치 옆에서 과외를 하는듯한 꼼꼼함으로, 수능 수학에서 어려움을 겪고 있는 여러분들이 궁금해 하는 바로 그 부분들에 답해주는 책이 될 것입니다.

이 책에서 여러분이 얻을 수 있는 것은 2가지입니다.

1 수능 수학에서 4점 문제를 풀기 위해 필요한 최소한의 수학 도구를 제공합니다. 여러분이 수능날 받게 되는 수능 수학 시험지의 모든 문제는 교과서의 기본 개념 도구와 제가 제시하는 플러스 도구로 반드시 풀립니다. 플러스 도구는 전혀 새로운 개념이 아닙니다. 교과서에 있는 개념 도구들로 4점 문제들을 풀기 위한 '교두보' 역할을 해주는, 4점 문제를 풀기 위해 반드시 필요한 도구입니다. 여러분들이 수능 수학 100점을 받기 위해 필요한 '최소한의 도구'를 이 책에 담았습니다.

2 기본 개념 도구와 플러스 도구를 모두 장착했다면, 기출문제집이 제공하는 모든 4점 문제를 풀 수 있습니다. 그러나 여러분은 그 과정에서 많은 시행착오를 겪어야 할 것입니다. 저는 그 시행착오를 최소한으로 줄여드리기 위해, 여러분이 가지고 있는 그 도구로 '실전에서' 어떻게 문제를 푸는지 보여드립니다. 과외를 하는듯한 느낌으로, 4점 문제를 푸는 동안 머릿속에서 일어나는 모든 생각을 해설에 담았습니다. 이 생각들은 여러분이 n수를 하게 되면 자연히 얻을 수 있는 실전 경험들입니다. 여러분이 굳이 n수를 하지 않아도, 그 경험을 온전히 가질 수 있도록 하는 해설이 될 것입니다.

이 책이, 수능 수학에서 정점을 찍으려고 하는 분들에게 큰 도움이 되어 기억에 남는 책이 되었으면 좋겠습니다.

마지막으로, 감사를 드릴 분들이 너무나 많습니다.

경험이 없는 저에게 출판을 허락해주신 박성준 대표님,
저에게는 아이돌과 같은 분이신 이광복 이사님,
늦은 마감과 번거로운 작업에도 내색 없이 작업해주신 오르비 직원분들
모두에게 감사드립니다.
바쁜 핑계로 자주 만나지 못했는데도 항상 응원해준 친구들,
사소한 것 하나까지 꼼꼼하게 검토해주신 검토자 분들,
사랑하는 아버지와 어머니, 우리형
모두에게 감사드립니다.
그리고 이 책의 처음부터 끝까지 함께 해준 다인이에게 고맙다는 말 전하고 싶습니다.

검토자 서평

강병관(2016학년도 수능 수학 B형 1등급)

이 책은 수많은 기출문제 중 현 교육과정에 꼭 필요한 주요 기출문제들을 정리하였습니다. 또한 저자는 해설과 플러스 도구에서, 학생이 문제를 풀면서 무의식중에 지녀야 할 생각들을 심어주려고 노력하였습니다.

제가 이 책을 검토하면서 가장 마음에 들었던 부분은 각각의 문제 해설 끝에 노하우와 충고로 이루어진 작가의 생각이 적혀 있고, 이것이 문제에 접근하는 데 매우 유용하다는 점입니다. 이 책에서 저자가 의도한, 문제에 접근하는 방식을 이해한다면 새로이 출제되는 문제도 결국은 여러 기출문제와 비슷한 문제란 것을 깨닫고 쉽게 접근할 수 있을 것입니다.

김동근 (2014학년도 수능 수학 B형 1등급)

이 책의 저자는 교과서 수준을 넘는 문제들을 강조하는 게 아니라, 철저한 '기본'을 바탕으로 4점 문제를 풀기를 권하고 있습니다. 그렇기에 이 문제집을 풀고 이해하고 싶으시다면 여러분들도 다시금 교과서를 펼치시고 교과서의 기본 내용들을 읽고 문제를 푸시기를 권장합니다. 그 내용들을 다시 한 번 숙지하시고 이 책을 풀게 된다면, 여러분들에게 있어서 이 책은 단순한 문제집이 아닌 수학을 좀 더 간단하게 접근하게 하고 어떠한 문제도 기본을 바탕으로 해석할 수 있게 하는 선생님이 될 수 있다고 생각합니다.

저는 이 책을 검토하면서, 두 번의 수험 생활이 떠올랐습니다. 이 책에서 저자가 문제를 해석하면서 진행하는 설명들은 수학을 알아가던 저의 수험 생활 시절에 갈고 닦던 기본을 떠올리기에 충분했습니다. 아니, 충분을 넘어서 그 시절 간과했던 기본이 저의 생각보다 중요했다는 점을 알게 되었습니다. 여러 번의 수험생활동안에서 느낀 점은 많은 수험생들이 수학이라는 과목을 너무 어렵게 받아들이고, 그리고 그 어려움을 헤쳐 나가는 데에 있어서 기본을 많이 무시하고 있다는 점입니다. 허나 어떠한 문제도 여러분들이 모르는 개념으로 만들어지지 않았으며, 해석할 수 없는 문제는 없다는 것입니다. 그 점을 이 책을 읽고 푸시면서 많이 깨닫기 바랍니다. 그 점을 알게 된다면, 위에서 말했듯이 이 책을 단순한 문제집이 아닌 여러분이 새로운 눈으로 수학을 접근하게 하는 선생님이 될 것입니다.

여러분들이 단순히 풀어왔던 어렵기만 한 책이 아닙니다. 앞으로 남은 수험생활, 수학이라는 학문을 함께 헤쳐나갈 길잡이가 될 것입니다. 저자의 경험과 지식을 여러분들 것으로 만들고, 더 나아가 어떠한 4점 문제, 어떠한 수학 문제를 만나도 겁먹지 않는 여러분으로 만드세요. 그러신다면 수험이 끝났을 때의 승자는 이 책을 만난 여러분이 되어있을 것입니다.

신석민 (2014학년도 수능 수학 B형 1등급)

'기본을 쌓는 것이 모든 일의 정도(正道)이다'라는 말이 있습니다. 축구나 농구를 할 때도 기본기를 충실히 연습하듯, 공부에 있어서도 기본을 쌓는 것이 가장 중요하다고 생각합니다. 본 책을 통해 '기본'을 중시하는 학습을 할 때 '정도'에 다다를 수 있다는 성취감과 희열을 느끼시기를 바라며 학습자에게 다가오는 수능에 큰 도움이 되기를 기원하겠습니다.

검토를 하며 저자 역시 '기본'을 쌓는 것을 굉장히 중요시하고 있음을 느꼈습니다. 저자의 언어로 표현하면 '기본 개념 도구'가 이에 해당합니다. 교과서를 통해 해당 개념을 알고 교과서 문제를 통해 기본 개념 도구의 사용이 숙달 되었을 때 본 책에서 소개하는 '플러스 도구'를 학습하시기를 권장합니다. 글쓴이는 이 방향으로 학습하기를 강조하고 있으며, 학습자가 이를 지키며 공부를 할 시에 본 책을 통한 학습효과를 극대화 할 수 있으리라 장담합니다.

이 책을 살펴보면 크게 '플러스 도구'와 '4점 문제 풀어보기'로 구성되어 있습니다.

먼저, '플러스 도구'를 통해 저자가 쌓아온 다년간의 노하우를 학습할 수 있습니다. 여기서의 '플러스 도구'는 특별한 공식이나 교과과정을 벗어난 말 그대로 지름길이 될 수 있는 기술이 아닙니다. 저자의 경험으로부터 우러나오는 '기본 도구를 활용하는 방법', 문제를 정확히 읽을 수 있는 방법 그리고 문제를 풀어나가는 가장 근본적인 사고과정이 담겨져 있습니다. 다시 한번 강조 드리지만, 기본 도구를 정확히 익힌 후 플러스 도구를 학습하기를 당부 드립니다. 말 그대로 기본에 '날개'를 달아 줄 것입니다.

'4점 문제 풀어보기' 파트는 학습자가 2, 3점 문제로 충분히 익힌 기본 개념 도구와, 저자가 전달하는 '플러스 도구'를 활용하여 수능 고난이도, 흔히 말하는 '킬러문제'를 학습하는 파트입니다. 플러스 도구를 학습하고 스스로 충분히 생각하며 문제를 풀어본 후, 저자의 풀이를 통해 자신의 풀이와 비교해보고 공부할 수 있는 파트라고 생각합니다. 제가 이 파트를 읽으며 감탄한 점은 '경험'이 녹아있는 것이었습니다. 시중의 학습기본서나 문제 해설집, 혹은 인강을 통해 학습하다 보면 한 번에 빠르고 정확한 풀이를 구사하는 경우가 많습니다. 하지만 저자는 실제 시험상황에서의 생각들, 그리고 풀이를 해 나가는 과정을 특수한 도구가 아닌 교과서가 전해주는 '기본 개념 도구'와 저자의 '플러스 도구'로 풀어 나갑니다. 이 과정에서 학습자는 단순한 지식이 아닌 경험, 즉 지혜까지 엿볼 수 있을 거라 생각합니다. 다른 책들과 차별화되는 가장 중요한 부분이라 생각합니다.

저 또한 수능을 세 번 준비하며 특히 수학 과목에 있어서는 '기본'을 바탕으로 한 풀이를 중요시하며 학습했습니다. 저자의 책을 검토하며 제가 그 동안 학습하며 경험한 것들이 잘 정리되어 있음을 느꼈습니다. 저자의 풍부한 시각과 다양한 경험을 통해 충분히 배워가시기를 바랍니다. 학습자 여러분에게 본 책이 큰 도움이 되기를 바라며, 다시 한번 다가오는 시험에 '건승'하시기를 기원합니다.

안다인 (수학 강사, 대표 검토)

〈4점 문제 공략집〉은 책 이름 그대로 모든 등급의 학생이 넘기 어려워하는 벽인 4점 문제를 극복 할 수 있도록 도와주는 책입니다. 문제를 풀 때 가장 중요한 것은 풀이를 쓸 때 다음 과정을 생각해 내는 사고방식이라고 생각합니다. 문제와 풀이를 나열해놓은 책을 암기식으로 학습하는 것은, 계속해서 문제가 변형되어 나오기 때문에 고난도의 4점 문제 풀이에 전혀 도움이 되지 않습니다. 그 점에서 이 책은 기존의 단순하게 풀이 과정만을 나열한 책들과는 확실히 차별화가 되어있습니다.

저자는 이 책에서 ‘기본 개념 도구’, ‘플러스 도구’를 통해 4점 문제에 꼭 필요한 개념과 학습법, 그리고 말 그대로 문제를 위한 도구를 설명 하였고 그 도구를 이용하여 4점 문제를 논리적으로 푸는 관점을 옆에서 과외를 하듯 친절하게 설명하였습니다. 수학 문제를 볼 때의 논리적인 관점과, 화려한 기술보단 투박하지만 빈틈이 없는 풀이 과정으로 무장한 책입니다. 개념에 충실하고 논리적이며 빈틈이 없는 〈4점 문제 공략집〉으로 수능 수학 영역 만점을 향해 달려가시길 바랍니다.

안형준 (수학 강사)

수능을 준비하는 이과 학생들의 대부분은 수학 고난도 문제에 대한 막연한 두려움을 가지고 있습니다. 가령, 수능 고난도 기출문제를 풀다가 풀리지 않아 풀이를 보면서 ‘내가 이 문제와 비슷한 수준으로 나오는 문항을 제한된 시간 내에 풀어낼 수 있을까?’ 라는 생각을 많이 합니다. 이 때 학생들은 아직 자신들이 모르는 내용이 있어서 못 푼다고 생각하며, 기본 개념의 중요성에 대해서는 생각하지 못합니다. 즉, 기본 개념이 자신에게 완벽히 익숙하지 않은데 심화학습을 합니다.

이렇게 방향을 못 잡는 학생들에게, 이 책은 4점 문제에 대해 학습자가 나아갈 방향을 잡아주고 있습니다. 이 책의 저자는 4점 문항들을 풀기 위해 필요한 것은 아주 기본적인 개념의 숙달임을 강조하고 있습니다. 이를 기본 개념 도구와 플러스 도구에서 공부할 수 있도록 책을 구성했고, 이후 4점 문제들을 기본 개념 도구 및 플러스 도구를 사용해 푼 풀이를 제시함으로써 4점 문제를 푸는 데 있어서 잡다한 지식이 필요하지 않다는 것을 느끼게 해줍니다.

이 책에 수록된 문제를 풀고 풀이를 꼼꼼히 공부해 나간다면 문제를 바라보는 시선이 바뀔 것이며 수학적으로 생각하는 깊이도 달라질 것입니다. 이 책으로 공부하는 사람들 모두가 수학에 대한 자신감을 얻어서 수능에서 만족스러운 점수를 받길 바랍니다.

주민지 (수학 강사)

〈4점 문제 공략집〉은 책의 각 단원 서두에 단원들의 기본도구과 플러스 도구를 제시하여 개념을 한 번 더 짚어나갈 수 있고, 도구들과 함께 저자의 노하우를 전수하여 문제풀이에 점진적으로 접근하는 법을 가르쳐줍니다. 이 접근하는 방법을 통해 실제로 난이도가 있는 4점짜리 문제들을 푸는 것뿐만 아니라, 새로운 유형에 대해서도 체계적으로 적용하는 방법을 익힐 수 있습니다. 또한 단원별 핵심개념과 함께 각 4점 기출문제들이 연결되어 있어 유기적으로 공부하기가 편리합니다. 교육과정에 맞추어 교과과정에서 벗어나지 않는 풀이와 출제의도를 파악하며 풀어내기 때문에 기본에 충실한 탄탄한 수학풀이에 도움이 될 것입니다.

따라서 이 책은

· 문제풀이의 시작은 가능하나, 더 이상 풀이가 진행되지 않는 학생.
· 개정된 교과과정에 맞추어 논리적으로 수학문제를 풀어나갈 힘이 필요한 학생.
· 기출 문제를 통해 신 유형에 대비하고 싶은 학생.

들에게 더욱 추천하는 책입니다. 정답을 맞히는 것에 급급한 것이 아닌 논리적인 사고를 풀이에 요구하며 수학문제를 풀어나가기 때문에 더욱 수학에 대한 깊은 이해와 흥미를 갖고 풀어나갈 수 있습니다. 이 책을 끈기있게 이해해나가고 각각의 문제들을 자기 것으로 흡수해 나간다면 수학 1등급의 주인공은 무리가 없을 것임을 확신합니다.

이 책의 구성

단원 설명

해당 단원이 수능에서 어떻게 출제되는지와 공략하는 방법을 개략적으로 설명합니다. 단원 설명에는 기본 개념 도구가 포함되어 있는데, 기본 개념 도구는 교과서에 있는 해당 단원의 모든 기본적인 도구를 뜻합니다. 이 책에서는 자세하게 다루지 않으므로 반드시 교과서로 공부를 해야 합니다.

플러스 도구

기본 개념 도구는 4점 문제에서도 똑같이 사용됩니다. 다만 4점 문제에 기본 개념 도구를 그대로 적용시키려 하면 4점 문제의 표현법이나 논리에서 어려움을 느낄 것입니다. 이러한 고충을 덜고자 플러스 도구는 기본 개념 도구와 4점 문제 사이의 멀어 보이는 간격에 다리를 놓아주는 역할을 할 것입니다. 플러스 도구는 전혀 새로운 개념을 배우는 것이 아닙니다. 기본적으로 플러스 도구는 기본 개념 도구의 연장선에 있으므로, 수능 출제 범위에서 벗어나지 않습니다. 플러스 도구가 익숙해진다면, 기본 개념 도구로 2점, 3점 문제를 풀 듯 4점 문제에서도 기본 개념 도구의 사용이 능숙해질 것입니다.

4점 문제 풀어보기&풀이법

여러분이 장착한 기본 개념 도구와 플러스 도구를 가지고 본격적으로 문제를 풀어보게 됩니다. 그리고 여러분이 장착한 그 도구들만으로 어떻게 문제를 풀어나가는지 보여줍니다. 그 모든 생각들은 수많은 문제들을 풀면서 쌓아온 생생한 경험으로 이루어져 있습니다. 여러분은 그 경험들을 시행착오 없이 얻을 수 있으며, 특히 실전 경험은 직접 시험에서 겪어본 사람들만이 알 수 있는 정보들이므로 여러분들에게 귀중한 자산이 될 것입니다.

목차

이 책을 공부하는 방법

1. 교과서에서 기본 개념 도구의 설명을 보세요.
2. 교과서의 예제와 유제를 풀면서 기본 개념 도구를 이해하세요.
3. 기출문제집에서 2점, 3점 문제를 모두 풀어 기본 개념 도구를 익숙하게 만드세요.

기본 개념 도구를 손에 익히기 위해 반드시 해야 하는 과정입니다. 아직 2점, 3점 문제가 어렵다면 도구들이 손에 익지 않은 것입니다. 머리로 생각하기 전에 손이 먼저 가는 수준이 되었다면 숙달된 것입니다.

4. 플러스 도구의 설명을 보세요.

플러스 도구까지 모두 장착을 한다면, 여러분은 4점 문제를 풀 준비가 된 것입니다. 4점 문제는 기본 개념 도구와 플러스 도구만으로 반드시 풀리기 때문입니다.

5. 익숙하게 만든 기본 개념 도구와 플러스 도구를 이용해서 4점 문제에 도전해보세요.
6. 문제를 맞혔든 틀렸든, 다음 장의 풀이법을 보고 내가 생각한 것과 해설이 생각한 것을 비교해보세요. 문제를 풀고 그 직후 바로 봐야 합니다.
7. 4점 문제를 모두 이렇게 공부한 후, 기출문제집에서 4점 문제를 연습하세요.

4점 문제에 본격적으로 도전하고, 부딪히고, 뚫어내면서 여러분이 가진 도구들로 직접 경험하세요. 그리고 해설은 여러분이 이미 가지고 있는 도구로 어떻게 답을 만들어내는지 그 생각을 공부하세요. 여러분은 이미 수능 문제 모두를 풀어낼 수 있는 도구를 가지고 있는 겁니다.

한 번 뚫어내기 시작했다면 어떤 문제가 다가와도 다 풀 수 있도록 4점 문제로 다시 연마하세요. 무사가 검술을 끊임없이 연마하는 것처럼, 여러분의 도구와 생각들은 연마하면 할수록 더욱 능숙해질 것이고, 문제가 그 어떤 것을 물어봐도 모두 답할 수 있는 고수의 경지에 오르게 될 것입니다.

앞으로 여러분이 보는 시험에 나오는 문제는 그 모습이 계속 바뀌겠지만, 그 문제 속에서 생각하는 방법은 바뀌지 않을 것입니다. 이 책의 핵심은 그 생각하는 법을 배우는 것입니다.

머리 좋은 사람이 수학을 잘하는 것이 아닙니다.
수학을 하다 보니 머리가 좋아지는 것입니다.

수능 수학 공부의 목적

잘 생각해보면, 우리가 수학 공부를 하고 있는 궁극적인 이유는 수능 시험을 잘 보기 위함입니다. 수능 수학에서 100점을 받는 것이 목적이지요. 그런데 많은 수험생들이 수학 공부를 할 때 문제를 맞히는 것에 집착합니다.

수학 시험에서는 문제를 맞히는 것이 당연합니다. 우리는 그것을 위해 그동안 그 많은 수학 문제를 풀어왔으니까요. 그런데, 수학 문제를 '연습'할 때도 우린 맞히는 것을 목적으로 공부할 때가 많습니다.

아닙니다. 수학을 연습할 때는 문제를 맞히는 것이 중요한 게 아닙니다.

풀이를 정교하게 만드는 것이 중요합니다.

어떤 상황에서도 풀이에 쓰이는 도구를 능숙하게 쓰기 위해서, 그 풀이의 연결고리와 논리가 완벽해지기 위해서 수학 문제를 풀면서 공부하고 있는 겁니다.

공부를 할 때 문제를 맞히지 못하면 시험에서도 맞히지 못하는 것 아니냐고 물어보는 수험생들이 있을 겁니다.

맞습니다. 공부할 때도 못 푸는 문제는 시험에서도 못 풉니다.

그런데 공부할 때 맞힌 문제도 시험에서 틀리는 경우가 너무나 많습니다. 그 경우가 바로 연습에서 문제를 풀어내는 것에만 집착했을 때입니다.

우리는 수많은 수학 해설집이 논리적인 풀이로 이루어져 있음을 알고 있습니다. 하지만 정작 많은 수험생들은 스스로 그 논리적인 풀이를 했는지 안 했는지 별로 따져보지 않습니다. 그저 맞혔으면 다음에도 맞겠지, 이런 낙관적인 태도로 일관합니다. 감으로 풀어낸 문제조차도요.

틀린 문제는 해설지를 보지 말라는 말을 그렇게 많이 들었는데, 정작 맞힌 문제는 해설지를 봐야 한다는 말을 많이 듣지 못합니다.

여러분의 수학 공부 목적은 문제를 맞히기 위함이 아닙니다.

여러분은 풀이를 정교하게 만들어야 합니다.

우리가 수학 문제를 푸는 이유는,

수학 문제를 풀어냄으로써 얻는 쾌감 때문이 아니라,

수능에서 처음 보는 새로운 문제에 정교한 풀이를 써내기 위함입니다.

이제부터 바꾸십시오.

수학문제를 풀고, 맞힌 문제는 반드시 해설을 보면서 내 풀이가 논리적으로 타당하고 정교했는지, 그렇지 못하다면 더 논리적이고 더 정교하게 바꿀 방법을 끊임없이 고민하세요.

시험에서, 그동안 여러분이 감으로 풀어내고 투박하게 풀어낸 연습문제들은 전혀 도움이 되지 않습니다.
오직 완벽한 풀이를 위해 끊임없이 고민한 그 시간만이 시험에서 점수로 환원됩니다.

3

미분법

3

미분법

문과와 이과에 구분 없이 모두 미분을 배우지만, 우리가 미분을 배우는 이유가 무엇인지 아는 수험생은 별로 없습니다. 문제를 풀면서도 우리가 미분을 배우는 이유를 알지 못해 문제의 의도나 유형의 큰 그림을 파악하지 못하는 경우도 많습니다.

우리가 미분을 배우는 궁극적인 이유는 대수적으로 해결하기 어려운 문제들을 그래프를 그려 해결하기 위함입니다. 그래프를 그리기 위해 미적분1에서부터 함수의 극한, 연속, 미분가능성, 여러 미분법과 도함수들을 공부했고, 본격적으로 그래프의 개형을 구하기 위해 도함수의 성질들을 배웠던 것입니다. 그리고 미분법의 마지막 단원은 도함수의 활용이고, 우리가 그래프를 그려 어디에 써먹을 지를 공부했습니다.

여러분이 교과서의 기본 개념들을 공부하며 배운 모든 미분하는 방법과 초월함수들의 도함수를 이용하면, 다항함수를 포함하여 삼각함수, 지수함수, 로그함수 등의 초월함수들의 그래프를 비롯해 초월함수가 결합된 그 어떤 함수의 그래프라도 그릴 수 있습니다. 교과서에서 그렇게 가르치기 때문에, 미분법의 4점 문제 중 대다수는 그래프를 그려야 하는 문제인 것입니다. 즉, 미분법을 정복하기 위해선 그래프를 빠르고 정확하게 그려야 하고, 그래프를 활용하여 우리가 원하는 값들을 구할 수 있어야 합니다.

안타깝게도, 미분 문제는 2000년대 중반부터 수년에 걸쳐 그 난이도가 점점 상승했습니다. 학생들은 기출문제를 통해 미분 문제를 손쉽게 해결하는 방법을 익혀왔고, 평가원은 점점 미분 문제의 논리를 복잡하게 만들었습니다. 지금에 이르러, 교과서의 모든 개념에 익숙해져 있다고 하더라도 제대로 시간 내에 풀지 못하는 문제들이 많이 등장했고, 그래서 여전히 많은 미분 문제들을 통해 미분 문제 유형을 익혀나가야 합니다.

미분법 단원의 4점 문제는 문제를 얼마나 잘 이해하고 수식으로 옮길 수 있느냐가 관건입니다. 플러스 도구에서 배운 모든 도구를 잘 익힌 후 많은 문제를 접하면서 문제 해석 능력을 키우고 적재적소에 도구를 사용하는 연습을 해야 합니다. 즉, 도구를 알았다고 당장에 풀 수 있는 것이 아니라, 많은 기출문제를 접하면서 미분법 단원의 문제 표현에 익숙해져야 한다는 것입니다.

미분법 단원은 문제 풀이 과정에서의 생각이 무엇보다도 중요한 단원입니다. 이번 단원에서 플러스 도구를 익히며 미분의 큰 그림을 보는 것을 소홀히 하지 마시고, 특히 4점 문제 풀이법을 공부하면서 미분 문제의 풀이 진행을 어떤 생각으로 하는지, 어떻게 미분 문제의 벽을 뛰어넘는지 꼭 익히시길 바랍니다.

<table>
<tr><th>기본 개념 도구</th><th>기본 개념 도구 익히기 Step</th></tr>
<tr><td>미분계수
도함수의 정의와 미분법
몫의 미분법
합성함수의 미분법
역함수의 미분법
이계도함수
접선의 방정식
평균값 정리
함수의 증가와 감소
함수의 극대와 극소
함수의 오목과 볼록, 변곡점
함수의 그래프
함수의 최대와 최소
방정식과 부등식에의 활용</td><td>1. 교과서에서 기본 개념 도구의 설명을 보세요.
2. 교과서의 예제와 유제를 풀면서 기본 개념 도구를 이해하세요.
3. 기출문제집에서 2점, 3점 문제를 모두 풀어 기본 개념 도구를 익숙하게 만드세요.</td></tr>
</table>

기본 개념 도구를 손에 익히기 위해 반드시 해야 하는 과정입니다. 아직 2점, 3점 문제가 어렵다면 도구들이 손에 익지 않은 것입니다. 머리로 생각하기 전에 손이 먼저 가는 수준이 되었다면 숙달된 것입니다.

플러스 도구

▶도구 3-3 도함수의 활용 실전

여러분은 이제 여러 함수를 미분하는 방법, 여러 함수의 도함수에 대한 공부를 거쳐 여러 함수의 그래프를 그리는 방법까지 공부했습니다. 이제는 이 그래프를 활용하는 실전적인 방법을 배워보겠습니다.

수능 문제에서 그래프를 활용하는 문제는 대표적으로 두 가지인데, 첫 번째가 최대/최소 문제, 두 번째가 방정식/부등식 문제입니다.

① 최대/최소 문제

최대와 최소를 구하는 문제는 미분법 단원뿐만 아니라 수능 전범위에 걸쳐 출제되고 있습니다. 어떤 단원이든 함수의 최대나 최소를 구하는 문제를 마주하면, 정의역의 양 끝 값과 극댓값, 극솟값 중 최대나 최소가 있다는 것을 알아야 합니다. 즉,

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $f(a)$, $f(b)$, 극댓값, 극솟값 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값입니다.

그래서 대부분 극댓값이나 극솟값이 최대나 최소가 될 것이라고 생각하면 오산입니다. 정의역 양 끝 값 중에 하나가 최대나 최소가 되는 문제는 이미 출제되었고, 앞으로도 출제가 될 것입니다.

최대와 최소를 구하는 문제에서는 도함수가 중요합니다. 최대와 최소만 구하면 되는 상황이라면 정의역의 양 끝 값과 극댓값, 극솟값만 구해내면 되기 때문에, 극대와 극소는 도함수에서 이미 판단할 수 있는 것이므로 굳이 그래프까지 그릴 필요는 없습니다.

② 방정식/부등식 문제

방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 실근 x의 개수를 구하는 문제가 있다면, 그래프를 그려서 풀어야 합니다. 미분법 단원의 문제 표현 중 '실근의 개수'라는 말이 나오면 그래프를 그려서 양 변 함수의 교점을 세어보라는 뜻으로 생각하면 됩니다. 즉, 이런 유형의 문제는 애초에 방정식을 실제로 풀어서 근을 구해내는 것이 아니라 교과서에서 배운 대로 그래프를 그려서 생각해야 하는 것입니다.

부등식 $f(x) > g(x)$를 만족하는 x의 범위를 구하라고 한다면, 양 변의 함수를 각각 그려보는 것도 좋지만 이런 경우는 보통 한 쪽으로 함수를 몰아서 그래프를 그리는 것이 편합니다.

즉, $f(x) - g(x) > 0$ 또는 $0 > g(x) - f(x)$로 옮겨 $f(x) - g(x)$나 $g(x) - f(x)$의 그래프를 그리는 것이 눈으로 보기에도 판단하기가 더 쉽습니다.

만약 $f(x)$와 $g(x)$를 각각 그려서 푼다면 두 그래프의 교점의 x좌표를 구하기 위해 방정식을 풀어야 할 것이고, 그래프를 정밀하게 그리지 않으면 $f(x)$가 $g(x)$보다 위에 있는 경우를 판단하기가 어려운 경우도 생길 것입니다.

하지만 $f(x) - g(x)$ 또는 $g(x) - f(x)$를 그려서 푼다면, x축보다 위에 있는 부분이나 아래에 있는 부분만 그래프에서 생각해주면 되므로, 즉 부호만 판단해주면 되므로 각각 그려준 것보다 더 편하고 확실하게 판단할 수 있습니다.

물론 두 방법 모두 크게 보면 같은 방법이긴 합니다만, 교과서에서도 후자의 방법을 권장하고 있으니 문제에서 부등식을 보면 웬만하면 한 쪽으로 몰아서 그래프를 그릴 생각을 하는 게 낫습니다.

4점 문제 풀어보기 41

2015학년도 6월 평가원 모의고사 B형 30번 문제 (난이도 최상)

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.
(나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1, 8n+2)$, 점 $(4n+2, 8n+5)$, 점 $(4n+3, 8n+7)$을 모두 지난다.
(다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k, 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)\,dx = a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$을 모두 지난다.
> (다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k,\ 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

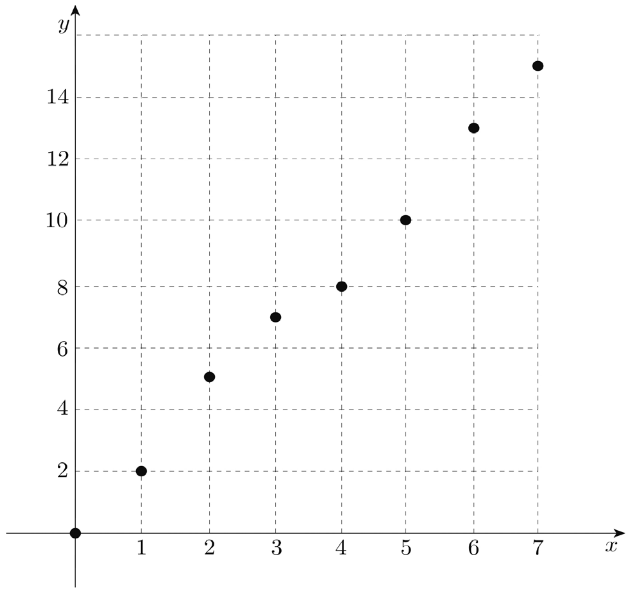
$\int_3^6 f(x)\,dx = a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

실수 전체의 집합에서 미분이 가능하다는 조건을 이용하지 않으면 풀 수 없는 문제이고, 실제로 이 문제를 못 푼 수험생들이 이 조건을 빼먹은 경우가 굉장히 많았습니다.

문제를 읽어보면, 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 조건 (가), (나), (다)를 만족시킬 때 $\int_3^6 f(x)\,dx = a$를 구해야 합니다.

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이라 했고
조건 (나)에서 모든 정수 n에 대하여 $f(x)$가
점 $(4n, 8n)$, $(4n+1, 8n+2)$, $(4n+2, 8n+5)$, $(4n+3, 8n+7)$을 지난다고 했습니다.
이 조건들을 통해 상황을 이해하려면 예시를 들어봐야 하겠습니다.
조건 (다)에서 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k, 2k+1]$에서 $f(x)$의 그래프가 이차함수의 그래프의 일부라고 했습니다.
이 조건은 조건 (가), (나)를 통해 상황을 이해하고 생각해봐야 하겠습니다.

조건 (나)를 해석하기 위해 $n=0$과 $n=1$을 대입해봅시다.
$n=0$을 대입하면 $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,5)$, $(3,7)$이고
$n=1$을 대입하면 $(4,8)$, $(5,10)$, $(6,13)$, $(7,15)$입니다.
$f(x)$가 이 점들을 모두 지난다는 말이므로 좌표평면에 그려보면 다음과 같습니다.

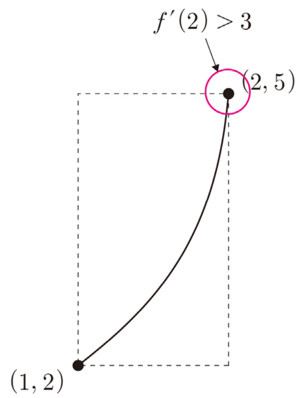


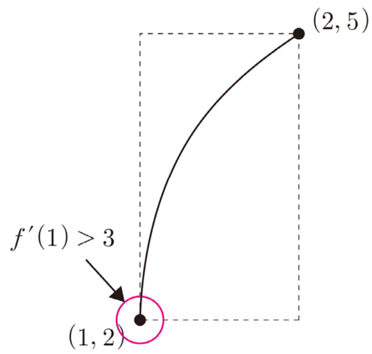
조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이라고 했으니
점과 점을 이을 때 기울기가 최소 1, 최대 3까지만 가능합니다.

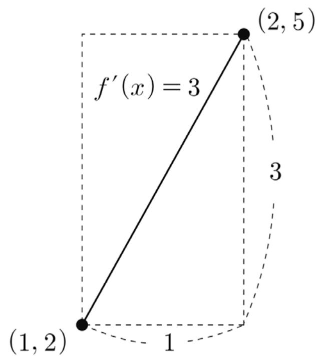
여기서 조건 (다)를 해석해봅시다.
$k=0$, $k=1$을 대입해보면
닫힌 구간 $[0,1]$과 $[2,3]$에서 $f(x)$가 이차함수 그래프의 일부라는 뜻입니다.
$k=2, 3$까지 대입해보면
$[4,5]$, $[6,7]$에서도 $f(x)$가 이차함수 그래프의 일부라는 뜻인데
그럼 $[1,2]$, $[3,4]$, $[5,6]$에서는 $f(x)$가 어떤 그래프가 될지 아직은 알 수 없습니다.

조건 (나)와 (다)를 해석했고
이제 우리가 가진 조건 중 풀이 진행을 위해 필요한 정보는
$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분이 가능하고
$1 \le f'(x) \le 3$이라는 정보입니다.

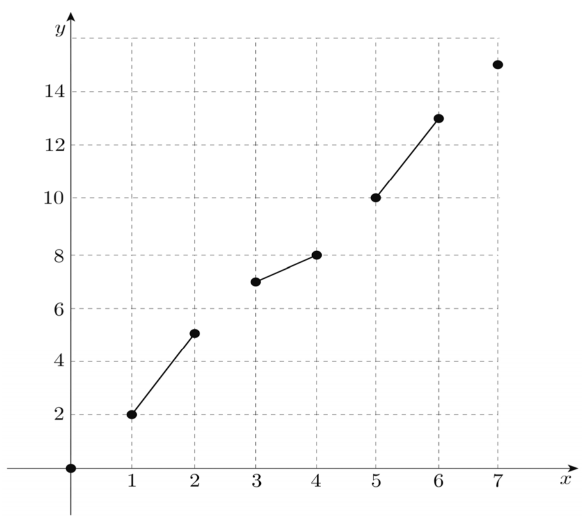
무작정 아무 이차함수나 그려보고 생각해볼 수도 있지만
핵심만 짚어보기 위해 $[1,2]$에 한정해서 생각해봅시다.
점 $(1,2)$와 $(2,5)$를 이은 직선의 기울기는 3입니다.
$1 \le f'(x) \le 3$이어야 하므로 이 구간에서 $f(x)$는 반드시 직선이어야 합니다.
만약 $f(x)$가 직선이 아니라 곡선이라면, $x=1$ 또는 $x=2$에서 $f(x)$의 기울기가 3보다 커야만 합니다.
이 생각이 이 문제에서 가장 중요한 생각입니다.







마찬가지 논리로, $[3, 4]$, $[5, 6]$에서도 그렇습니다.
$f(x)$가 $(3, 7)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$, $(6, 13)$을 지나므로
$[3, 4]$에서는 $f'(x) = 1$, $[5, 6]$에서는 $f'(x) = 3$인 직선이어야 합니다.



이제 $[0, 1]$, $[2, 3]$, $[4, 5]$, $[6, 7]$에 이차함수의 일부를 그려서 $f(x)$를 완성하면 되는데

우리가 구해야 하는 것이 $\int_3^6 f(x)\,dx$이므로 $[4, 5]$만 채우면 답을 구할 수 있습니다.

따라서 $[4, 5]$만 고려해봅시다.
처음에 언급했듯이 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분이 가능해야하기 때문에
직선과 이차함수가 이어지는 부분에서 좌우미분계수가 반드시 같아야 합니다.

그려진 $f(x)$를 토대로 각 점에서 미분계수를 생각해보면
$f'(4)=1$, $f'(5)=3$입니다.
따라서 $[4,5]$에서의 $f(x)$를 $f(x)=ax^2+bx+c$로 두면
$f(x)=ax^2+bx+c$가 $f'(4)=1$, $f'(5)=3$을 만족해야 합니다.

$f'(x)=2ax+b$이므로
$f'(4)=1=8a+b$
$f'(5)=3=10a+b$입니다.
연립하면 $a=1$, $b=-7$입니다.

$f(x)=x^2-7x+c$가 $(4,8)$을 지나므로
$f(4)=8=16-28+c \Leftrightarrow c=20$입니다.
따라서 $f(x)=x^2-7x+20$입니다.

$[3,4]$에서 $f(x)$가 $(3,7)$, $(4,8)$을 지나는 직선이므로 $f(x)=x+4$
$[5,6]$에서는 $(5,10)$, $(6,13)$을 지나는 직선이므로 $f(x)=3x-5$입니다.

$[3,6]$에서의 $f(x)$를 모두 구했습니다.
$\int_3^6 f(x)\,dx=\int_3^4 f(x)\,dx+\int_4^5 f(x)\,dx+\int_5^6 f(x)\,dx$로 두면
$\int_3^4 f(x)\,dx+\int_4^5 f(x)\,dx+\int_5^6 f(x)\,dx=\int_3^4 x+4\,dx+\int_5^4 x^2-7x+20\,dx+\int_5^6 3x-5\,dx$
계산하면
$\int_3^4 x+4\,dx+\int_5^4 x^2-7x+20\,dx+\int_5^6 3x-5\,dx$
$=\left[\frac{1}{2}x^2+4x\right]_3^4+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+20x\right]_4^5+\left[\frac{3}{2}x^2-5x\right]_5^6$
$=\left(8+16-\frac{9}{2}-12\right)+\left(\frac{125}{3}-\frac{175}{2}+100-\frac{64}{3}+56-80\right)+\left(54-30-\frac{75}{2}+25\right)$
$=\frac{15}{2}+\frac{53}{6}+\frac{23}{2}=\frac{45+53+69}{6}=\frac{167}{6}=a$
따라서 답은 $6a=167$입니다.

문제 상황이 이해되지 않을 땐, 이 풀이에서처럼 범위를 과하게 잡고 하나하나 예시를 들면서 생각해도 시간이 그렇게 오래 걸리지 않습니다.
오히려, 이렇게 범위를 크게 잡고 생각해야 문제 상황이 좀 더 와 닿게 이해가 될 수도 있습니다.
이 문제를 많이 풀어봐서 $[3,6]$에 대해서만 고려해보면 된다고 생각하는 수험생이 있다면
처음 이 문제를 접했었을 때 어떤 생각으로 문제 상황을 이해했었는지, 만약 기억이 잘 안 난다면 어떻게 이해를 했었을까 고민해보세요.
낯선 상황을 의도적으로 끌어와서 생각해보다보면 머리가 그런 상황에 익숙해져서 실전에서도 긴장하지 않고 냉철하게 판단이 가능해집니다.

답) 167