정답 및 해설 <개념편>

Intro 1.

1	⑤	*2*	⑤	*3*	③	*4*	③	*5*	③	*6*	①	*7*	③	*8*	⑤	*9*	③	*10*	⑤
11	①	*12*	⑤	*13*	②	*14*	⑤	*15*	③	*16*	⑤	*17*	③	*18*	③	*19*	3	*20*	④
21	②	*22*	⑤	*23*	3	*24*	③	*25*	4										

고난도 문항 해설

19번

$\dfrac{y_1+2}{x_1+1}$의 최댓값 및 최솟값을 구해야 한다.

$\dfrac{y_1+2}{x_1+1}=k$라 하면, $y_1+2=k(x_1+1)$이다.

점 A의 자취는 반드시 점 $(-1,\ -2)$를 지난다.
따라서, 이 문항은 점 $(-1,\ -2)$와 원 위의 한 점을 지나는 직선의 기울기의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.
그림을 그려보면, 접할 때 최댓값과 최솟값을 가짐을 알 수 있다. $kx-y+(k-2)=0$과 원의 중심 $(2,\ 2)$ 사이의 거리는 $\dfrac{|3k-4|}{\sqrt{k^2+1}}=1$이므로, $(3k-4)^2=k^2+1$이다.

따라서 $8k^2-24k+15=0$이므로, 최댓값과 최솟값의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 3이 됨을 알 수 있다.

22번

ㄱ. 이차함수 $f(x)$는 $x=-2$를 축으로 하는 함수이므로, ㄱ은 참.

ㄴ. $f(x_1)=m(x_1+2)$이고, $f(x_2)=m(x_2+2)$이므로
$f(x_1)-f(x_2)=m(x_1-x_2)$이다. 따라서 참.

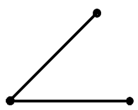
ㄷ. $f(x_1)=m(x_1+2)$이고, $f(x_2)=m(x_2+2)$이므로
$\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}=\dfrac{x_2+2}{x_1+2}$이다. 따라서 참.

Intro 3.

1.

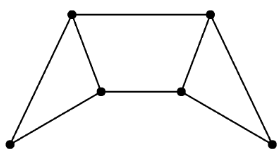
절차 1. 다음 그래프를 행렬로 나타내면, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$이다.

성분 중 0의 개수는 5개다.



절차 2. n차정사각행렬의 모든 성분의 수에서 1인 성분의 개수(변의 수$\times 2$)를 빼면 된다.

절차 3. 6차정사각행렬의 모든 성분의 수가 36개이고, 1인 성분의 개수(변의 수$\times 2=8\times 2$)를 빼면 $36-16=20$임을 알 수 있다.



2.

꼭짓점의 개수가 20이므로 행렬로 나타내었을 때 모든 성분의 수는 400이고, 1인 성분의 개수는 $30\times 2=60$이므로 0인 성분의 개수는 $400-60=340$이다.

3.

절차 1. $2<\sqrt{5}<3$이므로 $\sqrt{5}$의 정수부분은 2이다.

절차 2. $f(n)=2$는 $\sqrt{n}$의 정수부분이 2인 것을 구하라는 의미이다.
따라서, 4부터 8까지 총 5개이다.

절차 3. $f(n)=k$는 $\sqrt{n}$의 정수부분이 k인 것을 구하라는 의미이다. 따라서, k^2부터 $(k+1)^2-1$까지 총 $2k+1$개이다.

절차 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{48}\frac{1}{2f(n)+1}=3\times\left(\frac{1}{2\times 1+1}\right)+5\times\left(\frac{1}{2\times 2+1}\right)+\cdots+13\times\left(\frac{1}{2\times 6+1}\right)=6$

절차 5. 절차 4와 같은 방식으로 하면,
$\displaystyle\sum_{n=1}^{k^2-1}\frac{1}{2f(n)+1}=k-1$임을 알 수 있다.

4.

절차 1. 오른쪽 부분이 왼쪽 부분보다 넓이가 더 크다.

절차 2. 왼쪽 부분이 오른쪽 부분보다 넓이가 크다.

절차 3. DE

절차 4. 전체 육각형의 넓이가 6이므로, 절반이 되기 위해선 양쪽이 모두 넓이가 3이 되어야 한다. 직선 $y=mx$가 선분 DE와 만나는 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ 1)$ $(1<a<4)$라 하면, 사다리꼴 PAFE의 넓이가 3이면 된다.

따라서 $\frac{1}{2}\{(4-a)+4\}=3$이므로 $a=2$이다.

두 점 A와 P를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이다. 따라서 $m=\frac{1}{2}$이다.

5.

절차 1. 점 P가 3초 후에는 $(3,\ 4)$로 옮겨진다.

절차 2. $S(1)=\frac{3}{2}$, $S(3)=2$, $S(5)=\frac{3}{2}$, $S(7)=1$

절차 3. $t=2$, $t=4$, $t=6$

절차 4. $S(t)$는 구간 $(0,\ 2]$에서 $\frac{1}{2}(2+t)$,

구간 $(2,\ 4]$에서 2, 구간 $(4,\ 6]$에서 $\frac{1}{2}(8-t)$,

구간 $(6,\ 8)$에서 1이다. 따라서,

$$\int_0^8 S(t)\,dt=\int_0^2\frac{1}{2}(2+t)\,dt+\int_2^4 2\,dt+\int_4^6\frac{1}{2}(8-t)dt+\int_6^8 1\,dt=12$$ 이다.

6.

절차 1. (x, y는 수학적으로는 부호가 다른 값이 나와도 됩니다. 다만 출제의도상 모범답안이 더 자연스럽습니다.)

$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2 & 2-2^2\\ 0 & (-4)^2\end{pmatrix}$이다.

따라서, $x=2$, $y=-4$, $p=1$, $q=2$이다.

절차 2. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2^2 & 2-2^2\\ 0 & (-4)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3 & 2^2-2^3+2^4\\ 0 & (-4)^3\end{pmatrix}$

이다. 따라서, $x=2$, $y=-4$, $q=2$, $r=3$, $s=4$이다.

절차 3. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}2^k & 2^{k-1}-2^k+2^{k+1}-\cdots+2^{2k-2}\\ 0 & (-4)^k\end{pmatrix}$

이다.

절차 4. 따라서 $a=32$이고, $n=5$이다. $\therefore a+n=37$

7.

절차 1. $n=2^p\times k$에서 $2=2^p\times k$이다.

따라서 $p=1$, $k=1$이다.

절차 2. $f(12)$는 $n=12$일 때 p의 값을 구하라는 것을 의미한다. $12=2^p\times k$이므로 $k=3$이고 $p=2$이다. 따라서 $f(12)=2$이다.

절차 3. $f(8)$에서 $8=2^p\times k$이므로 $p=3$이다.

따라서, $f(8)=3$이다.

$f(24)$에서 $24=2^p\times k$이므로 $p=3$이다.

따라서, $f(24)=3$이다.

절차 4. n이 8의 배수이면서, 16의 배수는 아닐 때 $f(n)=3$이 성립한다. (ex: 8, 24, 40, $\cdots$)

절차 5. 8의 배수이면서, 16의 배수가 아닌 자연수는 무수히 많으므로, $f(n)=3$이 성립하는 n은 무수히 많다.

8.

절차 1. 만족하는 함수는 다음과 같다. 따라서 총 2개다.

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	1
2	$\rightarrow$	2

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	2
2	$\rightarrow$	1

절차 2. 만족하는 함수는 다음과 같다. 따라서 총 4개다.

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	1
2	$\rightarrow$	2
3	$\rightarrow$	3

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	2
2	$\rightarrow$	1
3	$\rightarrow$	3

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	3
2	$\rightarrow$	2
3	$\rightarrow$	1

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	1
2	$\rightarrow$	3
3	$\rightarrow$	2

절차 3. 만족하는 함수는 다음과 같다. 따라서 총 10개다.

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	1
2	$\rightarrow$	2
3	$\rightarrow$	3
4	$\rightarrow$	4

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	2
2	$\rightarrow$	1
3	$\rightarrow$	3
4	$\rightarrow$	4

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	3
2	$\rightarrow$	2
3	$\rightarrow$	1
4	$\rightarrow$	4

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	1
2	$\rightarrow$	3
3	$\rightarrow$	2
4	$\rightarrow$	4

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	1
2	$\rightarrow$	2
3	$\rightarrow$	4
4	$\rightarrow$	3

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	2
2	$\rightarrow$	1
3	$\rightarrow$	4
4	$\rightarrow$	3

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	1
2	$\rightarrow$	4
3	$\rightarrow$	3
4	$\rightarrow$	2

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	3
2	$\rightarrow$	4
3	$\rightarrow$	1
4	$\rightarrow$	2

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	4
2	$\rightarrow$	2
3	$\rightarrow$	3
4	$\rightarrow$	1

x	$\rightarrow$	y
1	$\rightarrow$	4
2	$\rightarrow$	3
3	$\rightarrow$	2
4	$\rightarrow$	1

절차 4. 절차 3을 보면, 첫 번째 줄과 두 번째 줄의 $x=4 \rightarrow y=4$로 가는 경우는 절차 2의 경우의 수와 완전히 같다.
세 번째 줄은 절차 1의 경우의 수와 같다.
네 번째 줄의 나머지 2개는 절차 1의 경우의 수와 같은데 교차되는 경우만 다를 뿐이고, 다섯 번째 줄도 마찬가지이다.
이것은 $a_4=a_3+2a_2$을 의미한다.

절차 5. 이를 통해 $a_{n+2}=a_{n+1}+(n+1)a_n$ 임을 추론할 수 있고, 이것이 맞는다는 확신이 가슴속으로 들 수 있어야 한다.

9.

절차 1. $T=\{k|k\in S$ 이고 $\log_2 10-\log_2 k$는 정수$\}$의 원소를 찾으면 된다.
이를 만족시키는 것은 $k=5$, $k=10$, $k=20$, $k=40$, $k=80$이다.

절차 2. 반드시 성립한다.

절차 3. $T=\{k|k\in S$ 이고 $\log_2 99-\log_2 k$는 정수$\}$가 되는 것을 찾으면 된다. $k=99$가 유일하다.

절차 4. $m=0$

절차 5. $m=0$, $m=1$

절차 6. n이 50 이상의 홀수이면 된다.

절차 7. 25개다.

10.

절차 1. $P(x)=x$, $Q(x)=x-1$이면
$P(x)Q(y)=x(y-1)=0$이고,
$Q(x)P(y)=(x-1)y=0$이다.
두 연립방정식의 해는 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$이므로,
집합 A는 무한집합이 아니다.

절차 2. $P(x)=x(x-1)$, $Q(x)=(x-1)(x-2)$이면
$P(x)Q(y)=x(x-1)(y-1)(y-2)=0$이고,
$Q(x)P(y)=(x-1)(x-2)y(y-1)=0$이다.
두 연립방정식의 해는 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$, $(1,\ a)$, $(a,\ 1)$ (단, a는 실수 전체의 집합)이다.
따라서, 집합 A는 무한집합이다.

절차 3. $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$이므로 총 3개다.

절차 4. 3개의 절차를 통해서, 집합 A가 무한집합이기 위해선 공통근이 반드시 존재해야 하고, 집합 B의 원소의 개수는 $P(x)=0$이면서 $Q(x)=0$인 서로 다른 모든 실수 x의 개수이다.
$n(B)$가 최대가 되기 위해선, 공통근이 하나 이상이되 공통근의 수를 최소로 해야 실수 x의 종류가 많아진다.
$P(x)=0$와 $Q(x)=0$의 근의 개수는 각각 7개, 9개이며 공통근이 1개인 경우가 최대이다.
따라서, $n(B)$의 최댓값은 15이다.