19. 상자에 12개의 공이 들어있고 각 공에는 1부터 12 까지의 자연수가 하나씩 적혀있다. 상자에서 하나의 공을 뽑아 공에 적힌 숫자를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 두 번 할 때, 첫 시행에서 확인한 숫자를 a, 다음 시행에서 확인한 숫자를 b라 하자. $a+b \le n$일 때 $ab<6$일 확률을 p_n이라 할 때, 다음은 $\sum_{k=7}^{12} p_k$의 값을 구하는 과정이다.

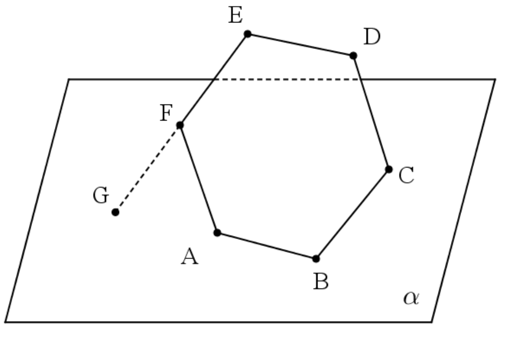
> $ab<6$을 만족시키는 두 자연수 a, b의 합의 최댓값은 (가) 이다.
> 따라서 $n \ge 7$일 때, $ab<6$를 만족시키는 a, b는
> $a+b \le n$도 항상 만족시킨다.
>
> $a+b \le n$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 음이 아닌 정수 c에 대하여 $a+b+c=n$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같고, 이러한 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 (나) 이다.
> 따라서 $p_n=$ (다) 이고, $\sum_{k=7}^{12} p_k=\frac{5}{3}$이다.

위의 (가)에 알맞은 숫자를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(2p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① 44 ② 40 ③ 36 ④ 32 ⑤ 28

20. 그림과 같이 길이가 2이고 평면 α 위에 있는 선분 AB를 한 변으로 갖는 정육각형 ABCDEF가 있다.

직선 AF와 평면 α 사이의 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이고 직선 EF가 평면 α와 만나서 생기는 점을 G라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\overline{FG}=2$
ㄴ. 삼각형 AFG의 평면 α로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{2}$이다.
ㄷ. 평면 α 위의 점 P가 $\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{GF}=0$을 만족시킬 때, $\overline{AP}$의 최솟값은 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)은
$(5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1)$
로 총 10개이고, $(5, 1), (1, 5)$일 때 $a+b$는 최댓값 6을
갖는다.
$\therefore p=6$

a, b는 자연수이고, c는 음이 아닌 정수이므로
$a=a'+1, b=b'+1$로 두면 $a+b+c=a'+b'+c+2=n$에서
$a'+b'+c=n-2$이다.
이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c)의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_2$이다.
$\therefore f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

조건부확률에 의하여
$g(n)=\dfrac{10}{\dfrac{n(n-1)}{2}}=\dfrac{20}{n(n-1)}$이다. (10은 $ab<6$를 만족시키는
자연수 순서쌍 (a, b)의 개수)

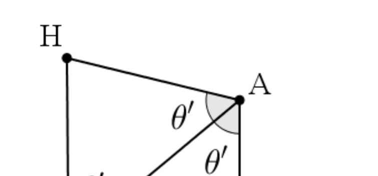
따라서 $f(2p)\times g(p)=44$이다.

출제자의 한마디
보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.
확률문제에서 중복조합을 사용할 경우, 근원사건의 확률에 대한 고민을 한 후 사용해주자.

20. ㄱ. 정육각형이므로 선분 AB, CF, DE가 모두 평행하므로
점 F에서 평면 α까지의 거리는 점 E에서 평면 α까지의
거리의 절반이다. 따라서 직선 EF와 평면 α 위에 있는 점
G에 대하여 선분 EG의 중점이 F임을 알 수 있다. 즉
$\overline{\mathrm{FG}}=\overline{\mathrm{FE}}=2$.

ㄴ. $\overline{\mathrm{FG}}=\overline{\mathrm{FA}}=2$이고 $\angle\mathrm{GFA}=\pi-\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{3}\pi$이므로 삼각형
FGA은 정삼각형이다. 따라서 F에서 선분 AG까지의 거리가
$\sqrt{3}$이다. 또한 직선 AF와 평면 α 사이의 예각의 크기가
$\dfrac{\pi}{6}$이므로 점 F에서 평면 α 까지의 거리는 $2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$이다.
위의 결과에 따라 삼각형 AFG와 평면 α의 사이각을 θ라
하면, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
따라서 삼각형 AFG의 평면 α로의 정사영의 넓이는
$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\right)=\sqrt{2}$이다.

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{GP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GF}}=0$에서 두 직선 GP, GF가 수직임을 알 수
있다. 점 F에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면,
삼수선의 정리에 의하여 직선 GH, GP 역시 수직이다.
ㄴ.에서 구한 정보들을 이용하면 $\overline{\mathrm{HG}}=\overline{\mathrm{HA}}=2\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$이고,
이를 그림으로 그리면 다음과 같다.



(직선 l은 직선 GP이고 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AH_1}}$.)
$\overline{\mathrm{AG}}=2$이므로 이등변삼각형 HGA에서 $\cos\theta'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이고,
따라서 $\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{AG}}\cos\theta'=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

출제자의 한마디
점 G는 직선 AB 위의 점이다. 두 평면 위에 동시에 있는 점들은 하나의 직선을 이루는데, 지금 이 문제에 있는 모든 점들은 정육각형을 포함하는 어느 평면 β 위에 있다. 즉, A, B, G는 두 평면 α, β 위에 있으므로, 이 세 점은 한 직선(두 평면의 교선) 위에 있다.

19. 상자에 12개의 공이 들어있고 각 공에는 1부터 12 까지의 자연수가 하나씩 적혀있다. 상자에서 하나의 공을 뽑아 공에 적힌 숫자를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 두 번 할 때, 첫 시행에서 확인한 숫자를 a, 다음 시행에서 확인한 숫자를 b라 하자. $a+b \le n$일 때 $ab<6$일 확률을 p_n이라 할 때, 다음은 $\sum_{k=7}^{12} p_k$의 값을 구하는 과정이다.

$ab<6$을 만족시키는 두 자연수 a, b의 합의 최댓값은 $\boxed{(가)}$ 이다. 따라서 $n \ge 7$일 때, $ab<6$를 만족시키는 a, b는 $a+b \le n$도 항상 만족시킨다. $a+b \le n$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 음이 아닌 정수 c에 대하여 $a+b+c=n$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같고, 이러한 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\boxed{(나)}$ 이다. 따라서 $p_n = \boxed{(다)}$ 이고, $\sum_{k=7}^{12} p_k = \frac{5}{3}$이다.

위의 (가)에 알맞은 숫자를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(2p) \times g(p)$의 값은? [4점]

① 44 ② 40 ③ 36 ④ 32 ⑤ 28

20. $x=a$에서 미분가능한 함수 $f(x) = \begin{cases} x^3-3x & (x<a) \\ mx+n & (x \ge a) \end{cases}$ 가 극대인 점이 존재하지 않을 때, <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>
ㄱ. $m=3a^2-3$ ㄴ. $a<-1$ ㄷ. $f'(2)=9$이면 $f(0)=16$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 $(a,\ b)$은

$(5,\ 1),\ (4,\ 1),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 5),\ (1,\ 4),\ (1,\ 3),\ (1,\ 2),\ (1,\ 1)$
로 총 10개이고, $(5,\ 1),\ (1,\ 5)$일 때 $a+b$는 최댓값 6을 갖는다.

$\therefore p=6$

$a,\ b$는 자연수이고, c는 음이 아닌 정수이므로
$a=a'+1,\ b=b'+1$로 두면 $a+b+c=a'+b'+c+2=n$에서
$a'+b'+c=n-2$이다.
이를 만족시키는 순서쌍 $(a',\ b',\ c)$의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_2$이다. $\therefore f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

조건부확률에 의하여 $g(n)=\dfrac{10}{\dfrac{n(n-1)}{2}}=\dfrac{20}{n(n-1)}$이다.

(10은 $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수)
따라서 $f(2p)\times g(p)=44$이다.

출제자의 한마디
보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.
확률문제에서 중복조합을 사용할 경우, 근원사건의 확률에 대한 고민을 한 후 사용해주자.

20.

ㄱ.

$x=a$에서 미분가능해야 하므로 $3a^2-3=m$임을 알 수 있다. (참)

ㄴ.

미분가능한 함수에서 극대인 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호변화가 생기게 된다. x^3-3x는 원래 $x=-1$에서 극대인 삼차함수이므로, $x<a$범위에 점 $(-1, f(-1))$이 포함되지 않도록 a값을 설정해줘야 한다.

따라서 $a<-1$.

〈주의〉

그렇다면 $a=-1$일 때는?

함수 $f(x)$를 완성시켜보면 $a=-1$일 때 $m=0$이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x & (x<-1) \\ 2 & (x\geq -1) \end{cases}$$

(미분가능이면 연속이기 때문에 $n=2$)

이므로 상수함수 구간이 생긴다. 상수함수는 모든 점에서 극대, 극소이므로 $a\neq -1$이다.

*** '상수함수는 모든 점에서 극대, 극소이다.' 라는 문장이 이해가 안되거나 생소하다면 지금 now 즉시 바로 미적분 I 교과서의 극대와 극소의 정의를 읽어봐야 한다.**

ㄷ.

$a<-1$이므로 $x=2$는 $x\geq a$의 범위에 포함된다.

$$f'(2)=9=m=3a^2-3\text{이므로 } a=-2\ (\because a<-1)$$

또한 $x=a$에서 연속이어야 하므로 $a^3-3a=ma+n$이고, $m=3a^2-3$이므로 대입하여 정리하면 $n=-2a^3=16$이다.

따라서 $f(0)=n=16$이다.