제 2 교시

수학 영역(가형)

홀수형

5지선다형

3회 29번 문항이 본래 문제의도와 다르게 해석될 가능성이 있어 문항을 교체합니다.
교체 전 문제와 핵심이 되는 아이디어는 같습니다.

<3회 29번 교체문제>

1. 좌표공간에서 중심이 원점 O인 구 S가 평면 $x+2y+2z=12$과 점 P에서 접할 때, 구 S 위의 두 점 A, B과 선분 AB 위에 있는 임의의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 최댓값과 최솟값은 각각 8, 4이다.
(나) $\overline{AB}=4$

평면 OAB와 평면 PAB 사이의 예각을 θ라 할 때, $100\sin^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]

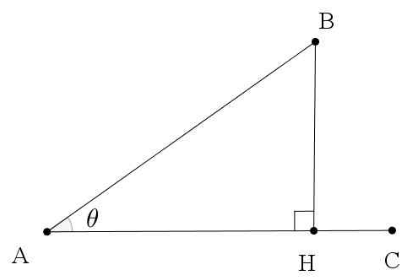
해설은 다음페이지에 있습니다.

<해설>

먼저, 원점으로부터 평면 $x+2y+2z=12$까지의 거리가 $\dfrac{12}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4$이므로 구 S의 반지름의 길이는 4이다.
따라서 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=4$.

점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라 할 때,
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}|\times|\overrightarrow{OH}|=4|\overrightarrow{OH}|$라 할 수 있다.

======================================
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}|\times|\overrightarrow{OH}|$ 보충설명



위 그림에서
θ가 예각일 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AH}|\times|\overrightarrow{AC}|$
θ가 둔각일 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-|\overrightarrow{AH}|\times|\overrightarrow{AC}|$
위 개념은 실전에서 매우 자주 사용되므로 꼭 알아두자.
======================================

이 값의 최댓값과 최솟값이 각각 8, 4이므로 $|\overrightarrow{OH}|$의 최댓값은 2, 최솟값은 1이다. 또한 $|\overrightarrow{OH}|$가 최대나 최소가 되는 상황은 Q가 선분 AB의 양쪽 끝에 있을 때일 것이다.

$Q=A$일 때 $|\overrightarrow{OH}|$가 최댓값 2, $Q=B$일 때 $|\overrightarrow{OH}|$가 최솟값 1을 갖는다고 하자.
또한 두 점 A, B에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.

그러면
$\overline{PA}^2=\overline{PH_1}^2+\overline{H_1A}^2=\overline{PH_1}^2+(\overline{OA}^2-\overline{OH_1}^2)=4+(16-4)=16$
이고
$\overline{PB}^2=\overline{PH_2}^2+\overline{H_2B}^2=\overline{PH_2}^2+(\overline{OB}^2-\overline{OH_2}^2)=9+(16-1)=24$
이다.

즉, 사면체 OABP는 $|\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{6}$이고 나머지 변들의 길이가 모두 4인 사면체이다

평면 OAB와 평면 PAB의 교선은 AB이므로, 이면각의 정의를 사용하기 위해 점 O에서 두 평면의 교선 AB와 평면 PAB에 각각 수선의 발 C, D를 내리자.

먼저, 선분 OC의 길이는 삼각형 OAB가 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 $2\sqrt{3}$로 쉽게 구할 수 있다.
또한 선분 BP의 중점을 M이라 할 때, 점 D는 점 O에서 선분 MA에 내린 수선의 발과 일치하므로, 점 D와 점 A를 이은 직선은 선분 BP를 수직이등분한다.

($\because$ 삼각형 OPB가 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 BP에 내린 수선의 발은 선분 BP의 중점 M일 것이고, 삼수선의 정리에 의하여 선분 MD는 선분 BP를 수직이등분 한다. 그런데 삼각형 ABP도 이등변삼각형이므로 직선 MD 위에 점 A도 존재한다.)

삼각형 OAM은 $|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{10}$, $|\overrightarrow{OA}|=4$인 이등변삼각형이고, 이 삼각형에서 $\cos\angle OAM=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$, $\sin\angle OAM=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$임을 알 수 있고, 삼각형 OAD에서
$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OA}|\sin\angle OAM=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$임을 알 수 있다.
($\because\ \angle OAM=\angle OAD$)

따라서 $\sin\theta=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OC}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로 $100\sin^2\theta=80$이다.