

제 2 교시

수학 영역 (가형)

출수형

5지선다형

3회 29번 문항이 본래 문제의도와 다르게 해석될 가능성이 있어 문항을 교체합니다.
교체 전 문제와 핵심이 되는 아이디어는 같습니다.

<3회 29번 교체문제>

1. 좌표공간에서 중심이 원점 O 인 구 S 가 평면 $x+2y+2z=12$ 과 점 P 에서 접할 때, 구 S 위의 두 점 A, B 과 선분 AB 위에 있는 임의의 점 Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 8, 4이다.
(나) $\overline{AB}=4$

평면 OAB 와 평면 PAB 사이의 예각을 θ 라 할 때, $100\sin^2\theta$ 의 값을 구하시오. [4점]

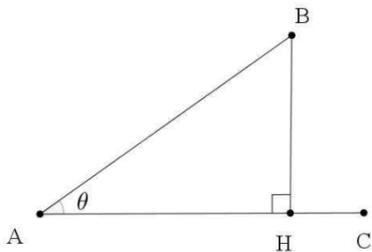
해설은 다음페이지에 있습니다.

<해설>

먼저, 원점으로부터 평면 $x + 2y + 2z = 12$ 까지의 거리가 $\frac{12}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 4$ 이므로 구 S 의 반지름의 길이는 4이다. 따라서 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 4$.

점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| \times |\overrightarrow{OH}| = 4|\overrightarrow{OH}|$ 라 할 수 있다.

===== $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| \times |\overrightarrow{OH}|$ 보충설명



위 그림에서 θ 가 예각일 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AH}| \times |\overrightarrow{AC}|$
 θ 가 둔각일 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AH}| \times |\overrightarrow{AC}|$
 위 개념은 실전에서 매우 자주 사용되므로 꼭 알아두자.
 =====

이 값의 최댓값과 최솟값이 각각 8, 4이므로 $|\overrightarrow{OH}|$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 1이다. 또한 $|\overrightarrow{OH}|$ 가 최대나 최소가 되는 상황은 Q가 선분 AB의 양쪽 끝에 있을 때일 것이다.

Q = A일 때 $|\overrightarrow{OH}|$ 가 최댓값 2, Q = B일 때 $|\overrightarrow{OH}|$ 가 최솟값 1을 갖는다고 하자.
 또한 두 점 A, B에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하자.

그러면 $\overrightarrow{PA}^2 = \overrightarrow{PH_1}^2 + \overrightarrow{H_1A}^2 = \overrightarrow{PH_1}^2 + (\overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OH_1}^2) = 4 + (16 - 4) = 16$
 이고 $\overrightarrow{PB}^2 = \overrightarrow{PH_2}^2 + \overrightarrow{H_2B}^2 = \overrightarrow{PH_2}^2 + (\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OH_2}^2) = 9 + (16 - 1) = 24$
 이다.

즉, 사면체 OABP는 $|\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{6}$ 이고 나머지 변들의 길이가 모두 4인 사면체이다

평면 OAB와 평면 PAB의 교선은 AB이므로, 이면각의 정의를 사용하기 위해 점 O에서 두 평면의 교선 AB와 평면 PAB에 각각 수선의 발 C, D를 내리자.

먼저, 선분 OC의 길이는 삼각형 OAB가 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 $2\sqrt{3}$ 로 쉽게 구할 수 있다.
 또한 선분 BP의 중점을 M이라 할 때, 점 D는 점 O에서 선분 MA에 내린 수선의 발과 일치하므로, 점 D와 점 A를 이은 직선은 선분 BP를 수직이등분한다.

(\because 삼각형 OPB가 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 BP에 내린 수선의 발은 선분 BP의 중점 M일 것이고, 삼수선의 정리에 의하여 선분 MD는 선분 BP를 수직이등분 한다. 그런데 삼각형 ABP도 이등변삼각형이므로 직선 MD 위에 점 A도 존재한다.)

삼각형 OAM은 $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{OA}| = 4$ 인 이등변삼각형이고, 이 삼각형에서 $\cos \angle OAM = \frac{2}{\sqrt{10}}$,

$\sin \angle OAM = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 임을 알 수 있고, 삼각형 OAD에서

$|\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OA}| \sin \angle OAM = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 임을 알 수 있다.

($\because \angle OAM = \angle OAD$)

따라서 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 이므로 $100 \sin^2 \theta = 80$ 이다.