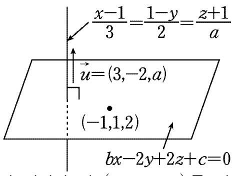
29. 좌표공간에서 두 구 $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$, $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=4$가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면 α가 평면 $x+2y-z+3=0$과 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{q}{p}$ (단, p, q는 서로소)이다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 m에 대하여 함수 $f(x)=\frac{e^x}{x}$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 함수 $g(m)$이 불연속인 실수 m의 개수를 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

[해설]



직선 $\frac{x-1}{3}=\frac{1-y}{2}=\frac{z+1}{a}$,

$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{a}$ 의 방향벡터는

평면 $bx-2y+2z+c=0$의 법선벡터와 같으므로

$(3,\ -2,\ a)=k(b,\ -2,\ 2)$이다.

따라서 $k=1$이고 $a=2,\ b=3$이다.

따라서 평면의 방정식은 $3x-2y+2z+c=0$이고 이 평면이 점 $(-1,\ 1,\ 2)$를 지나므로 $3\cdot(-1)-2\cdot(1)+2\cdot2+c=0$, $c=1$이다.

$\therefore\ a+b+c=6$

[27번] 정답 65

> 정육면체 모양의 상자의 여섯 개의 면에 $1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3$의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있다. 이 정육면체 모양의 상자를 연속하여 두 번 던졌을 때, 각각 나온 윗면에 적혀있는 두 수의 합이 4이상일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[개념]

<u>여사건의 확률</u>

(1) $P(A)+P(A^C)=1,\ P(A^C)=1-P(A)$

(2) (적어도 ~)의 확률 $=1-$ (반대인 사건의 확률)

> ※ '적어도'라는 표현이 없어도 전체 경우를 살폈을 때, 반대인 경우를 이용하는 것이 효율적이면 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구한다.
> 예를 들어 '~이상일 확률', '~이하일 확률', '~이 아닐 확률', '$a\neq b$일 확률' '$(a-b)(b-c)=0$일 확률', '곱이 짝수일 확률', '~이 존재할 확률'… 등 다양한 표현에 대하여 여사건을 이용할 수 있다.

[해설]

주어진 정육면체 모양의 상자를 한 번 던질 때,

$1,\ 2,\ 3$의 숫자가 나올 확률은 각각 $\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$이다.

이 상자를 두 번 던질 때, 각각 나온 윗면에 적혀있는 두 수의 합이 4 이상일 확률은 $1-$ (각각 나온 윗면에 적혀 있는 두 수의 합이 3이하일 확률)이다.

(i) 각각 나온 윗면에 적혀 있는 두 수의 합이 2인 경우

첫 번째 1이 나오고, 두 번째도 1이 나오는 경우이므로 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

(ii) 각각 나온 윗면에 적혀 있는 두 수의 합이 3인 경우

첫 번째 1이 나오고, 두 번째 2가 나오거나 첫 번째 2가 나오고, 두 번째 1이 나오는 경우이므로 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 주어진 정육면체 상자를 연속하여 두 번 던질 때, 각각 나온 윗면에 적혀 있는 두 수의 합이 3 이하일 확률은 $\frac{1}{36}+\frac{1}{6}=\frac{7}{36}$이므로

구하는 확률은 $1-\frac{7}{36}=\frac{29}{36}$이다.

따라서 $p+q=36+29=65$이다.

[28번] 정답 668

> 어느 샴푸 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 무게는 평균이 $500g$, 표준편차가 $6g$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 샴푸 중 임의로 선택한 샴푸 1개의 무게가 $509g$ 이상일 확률을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 값은 p이다. $10^4\times p$의 값을 구하시오. [4점]

표준정규분포표

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[개념]

<u>정규분포곡선의 특징 : $N(m,\sigma^2)$</u>

(1) 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 좌우대칭이다.

(2) 변량들이 $x=m$을 중심으로 몰려있다.

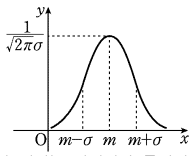
(3) $x=m$에서 최댓값을 갖는다.

(4) x축은 이 곡선의 점근선이 된다.

(5) 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

(6) X가 $[a,b]$에 속할 확률 $P(a\leq X\leq b)$는 해당구간의 넓이가 된다.

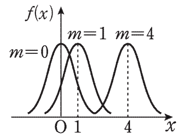
(7) $x=m\pm\sigma$에서 변곡점을 갖는다.



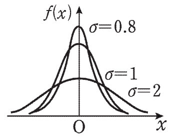
(8) 표준편차 σ가 일정할 때, 평균 m이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

(9) 평균 m이 일정할 때, 표준편차 σ의 값이 작아지면 곡선의 모양은 높아지고 좁아진다.

(10) 평균 m이 일정할 때, 표준편차 σ의 값이 커지면 곡선의 모양은 낮아지고 넓어진다.



σ가 1이고 m이 변할 때



$m=0$이고 σ가 변할 때

(11) $P(m-z\sigma\leq X\leq m+z\sigma)$는 m과 σ의 값에 관계없이 어떤 자료든 같고, z값(σ의 계수)에 따라서만 변한다.

<u>표준정규분포 : $N(0,1^2)$</u>

(1) 정규분포를 표준정규분포로 고치는 방법

표준측도 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$을 이용하여 표준화한다.

(2) 곡선의 x축이 z축으로 바뀐다.

(3) $P(m\leq X\leq m+\sigma)$과 $P(0\leq Z\leq 1)$이 같도록 곡선이 바뀐다.

(4) $X=m+z\sigma$ ➡ $Z=\frac{X-m}{\sigma}$ (z는 σ의 계수)

[해설]

샴푸의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(500,\ 6^2)$을 따르므로

$p=\mathrm{P}(X\geq 509)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{509-500}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)=0.5-0.4332=0.0668$

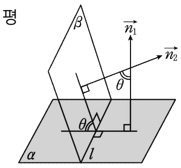
$\therefore\ 10^4\times p=668$

[29번] 정답 7

> 좌표공간에서 두 구
> $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$, $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=4$가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면 α가 평면 $x+2y-z+3=0$과 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{q}{p}$ (단, $p,\ q$는 서로소)이다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

[개념]

<u>두 평면의 위치관계</u>



법선벡터가 각각 $\vec{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\vec{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$인 두 평면 $\alpha,\ \beta$에 대하여

(1) 두 평면 $\alpha,\ \beta$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2+{c_1}^2}\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2+{c_2}^2}}$$

(2) 두 평면의 평행과 수직

① 평행 조건 : $\alpha//\beta \Leftrightarrow \vec{n_1}=k\vec{n_2}$ (단, $k\neq 0$)

$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ (단, $a_2b_2c_2\neq 0$)

② 수직 조건 : $\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

[해설]

두 구가 만나서 생기는 원은 두 구의 중심 $\mathrm{C}(-1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{C}'(1,\ 3,\ 5)$를 연결한 직선과 수직이므로 평면 α의 법선벡터는

$\overrightarrow{\mathrm{CC}'}=(1-(-1),\ 3-1,\ 5-1)=(2,\ 2,\ 4)$이다.

또한 평면 $x+2y-z+3=0$의 법선벡터는 $(1,\ 2,\ -1)$이고

평면 α와 평면 $x-2y-z+1=0$이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$\cos\theta = \dfrac{|2\times1+2\times2+4\times(-1)|}{\sqrt{2^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{2}{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{1}{6}$ 이다.

따라서 $p=6$, $q=1$ 이므로 $p+q=7$ 이다.

[30번] 정답 2

> 실수 m에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 함수 $g(m)$이 불연속인 실수 m의 개수를 구하시오. [4점]

[개념]

초월함수의 그래프

함수의 그래프의 개형을 그릴 때에는 다음을 조사하여 그린다.

(1) 함수의 정의역과 치역

(2) 대칭성(우함수·기함수), 주기

(3) 좌표축과의 교점 (x 절편, y 절편)

(4) 함수의 증가, 감소, 극대, 극소 ($f'(x)$를 이용)

(5) 곡선의 오목, 볼록, 변곡점 ($f''(x)$를 이용)

(6) 극한값을 이용한 점근선의 유무

⇨ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$

(단, a는 분모가 0이 되는 x의 값)

> ※ 속성으로 그래프의 개형을 그릴 때
> ① 기본정보(정의역·치역, 우함수·기함수, 절편)를 알고
> ② 극단적인 곳($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$)
> 에서의 곡선의 상태를 활용하면 빠르게 개형을 그릴 수 있다.

[해설]

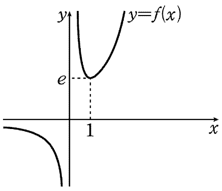
함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$에서 $f'(x)=\dfrac{(e^x)'\cdot x-e^x(x)'}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$ 이다.

$f'(x)=0$인 $x=1$이고 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $-$ 에서 $+$ 로 바뀌므로 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=\dfrac{e^1}{1}=e$를 갖는다.

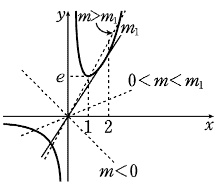
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{e^{\infty}}{\infty}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{e^{-\infty}}{-\infty}=-\dfrac{1}{\infty\cdot e^{\infty}}=0-$,

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\dfrac{e^{0+}}{0+}=\infty$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\dfrac{e^{0-}}{0-}=-\infty$ 이므로

$f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$y=f(x)$와 $y=mx$의 교점의 개수는 $y=mx$가 $y=f(x)$에 접할 때를 기준으로 달라진다.



그림과 같이 접할 때의 기울기를 m_1이라 하면

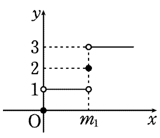
i) $m\le0$일 때 교점의 개수는 0

ii) $0<m<m_1$일 때 교점의 개수는 1

iii) $m=m_1$일 때 교점의 개수는 2

iv) $m>m_1$일 때 교점의 개수는 3

이다.



따라서 함수 $g(m)$의 그래프는 위와 같고 불연속이 되는 m의 개수는 0과 m_1으로 두개다.

[참고]

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 위의 점을 $\left(t,\ \dfrac{e^t}{t}\right)$라 하면

접선의 방정식은 $y-\dfrac{e^t}{t}=\dfrac{(t-1)e^t}{t^2}(x-t)$이고 이 접선이 원점을 지나므로

$(0,\ 0)$을 대입하면 $-\dfrac{e^t}{t}=\dfrac{(t-1)e^t}{t^2}(-t)$, $1=t-1$, $t=2$이다.

따라서 $m_1=f'(2)=\dfrac{(2-1)e^2}{2^2}=\dfrac{e^2}{4}$ 이다.