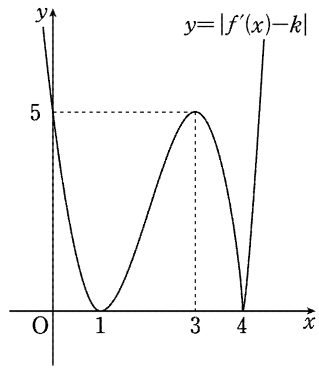
29. 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=(x+1)^2$, $g(x)=x^2$의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 두 점 사이의 거리를 a_n이라 하자. $a_n \le 100$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 M이라 할 때, $99\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{a_{n-1}a_n}$의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=|f'(x)-k|$의 그래프가 다음과 같다. 함수 $f(x)$가 세 개의 극값을 갖기 위한 모든 정수 k의 합을 구하시오. [4점]

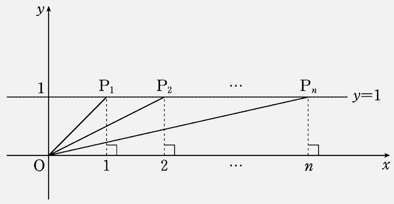


* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

[28번] 정답 100

좌표평면에서 직선 $y=1$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$a_n=$(선분 OP_{n+1}의 길이 $-$ 선분 OP_n의 길이)
($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)



이때 $100\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

[개념]
부정형의 극한

	식	접 근 법	극 한 값
$\dfrac{\infty}{\infty}$	분수식	분모의 최고차항으로 분모 분자를 나눈다.	분자차수>분모차수 ⇒ ∞(-∞) 분자차수<분모차수 ⇒ 0 분자차수=분모차수 ⇒ 최고차항의 계수비
	무리식	근호 안 또는 근호 밖의 최고차항으로 분모 분자를 나눈다.	
	지수식	밑의 절댓값이 큰 항으로 분모 분자를 나눈다.	
$\infty-\infty$	다항식	최고차항을 괄호 밖으로 묶어낸다.	기본형이나 $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴로 고침
	무리식	분자를 유리화하여 근호 안 또는 근호 밖의 최고차항으로 분모 분자를 나눈다.	
	지수식	밑의 절댓값이 큰 항을 괄호 밖으로 묶는다.	

※ 위의 접근법은 모두 기본형($\dfrac{k}{\infty}$)을 만들기 위한 조작이다.
※ 꼴이 $\sqrt{\infty}-\sqrt{\infty}$, $\sqrt{\infty}-\infty$, $\infty-\sqrt{\infty}$ 인 경우에는 유리화한다.

[해설]
$a_n=$(선분 OP_{n+1}의 길이 $-$ 선분 OP_n의 길이) $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서
$a_n=\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}$ 이다.

$$\begin{aligned}100\lim_{n\to\infty}a_n&=100\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)\\&=100\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1-n^2-1}{\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}}\\&=100\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}}\\&=100\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\\&=100\times1\\&=100\end{aligned}$$

[29번] 정답 49

자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=(x+1)^2$, $g(x)=x^2$ 의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 두 점 사이의 거리를 a_n이라 하자. $a_n\le100$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 M이라 할 때, $99\sum\limits_{n=1}^{M}\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$의 값을 구하시오. [4점]

[개념]
분모에 k가 있는 수열의 합 (소거되는 수열)

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$ (처음과 끝만 남는다)

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+2)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

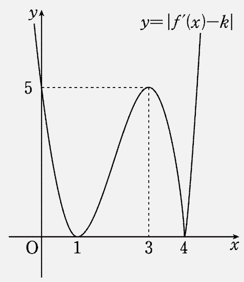
(5) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)=-1+\sqrt{n+1}$

[해설]
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=n$의 교점의 좌표는 $(n,\ (n+1)^2)$
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=n$의 교점의 좌표는 $(n,\ n^2)$
$a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$
또한, $a_n\le100$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값 $M=49$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ 99\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{a_{n-1}a_n}&=99\sum_{n=1}^{49}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=99\sum_{n=1}^{49}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{99}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)\right\}\\&=\frac{99}{2}\left(1-\frac{1}{99}\right)\\&=\frac{99}{2}\left(\frac{98}{99}\right)\\&=49\end{aligned}$$

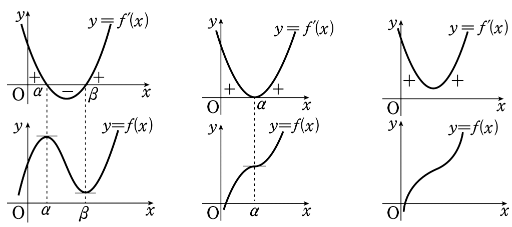
[30번] 정답 10

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=|f'(x)-k|$의 그래프가 다음과 같다. 함수 $f(x)$가 세 개의 극값을 갖기 위한 모든 정수 k의 합을 구하시오. [4점]



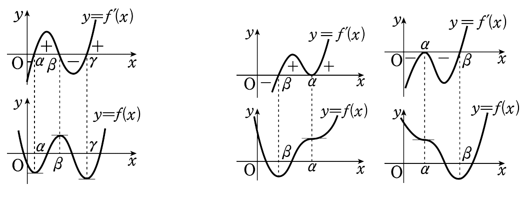
[개념]
삼차함수의 그래프

(1) $f'(x)$가 두 실근 $f'(x)$의 $D>0$
(2) $f'(x)$가 중근 $f'(x)$의 $D=0$
(3) $f'(x)$가 두 허근 $f'(x)$의 $D<0$

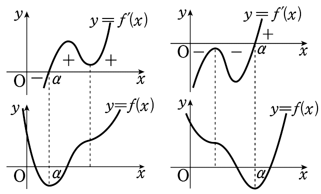


사차함수의 그래프

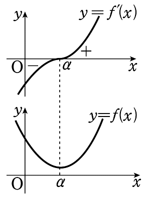
(1) $f'(x)$가 세 실근
(2) $f'(x)$가 중근1, 실근1



(3) $f'(x)$가 실근1, 허근 2

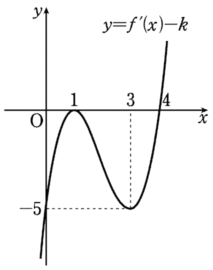


(4) $f'(x)$가 삼중근

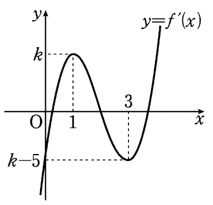


※ 다항함수 $y=f(x)$의 그래프를 속성으로 그리는 방법
(1) 주어진 식을 미분하여 $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.
(2) (1)에서 구한 x의 값을 $y=f(x)$에 대입하여 함숫값을 구한다.
(3) 좌표평면 상에 그 좌표를 점으로 표시한다. (접선의 기울기가 0인 점)
(4) $f'(x)=0$인 x의 값의 개수에 따른 그래프의 개형을 인지하고 그래프의 모양을 (3)에 맞도록 그린다.

[해설]
함수 $f(x)$의 사차항의 계수가 양수이므로 함수 $y=f'(x)-k$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f'(x)$의 그래프는 함수 $y=f'(x)-k$의 그래프를 y축의 양의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 것이다.



함수 $f(x)$가 세 개의 극값을 가지려면 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $0<k<5$이다.
따라서 구하는 모든 정수 k의 합은 $1+2+3+4=10$이다.

도전 3등급 2회 정답

1	①	2	②	3	③	4	②	5	④
6	⑤	7	①	8	⑤	9	③	10	④
11	③	12	②	13	④	14	②	15	①
16	⑤	17	③	18	④	19	①	20	④
21	⑤	22	406	23	5	24	45	25	21
26	127	27	15	28	112	29	36	30	9

[1번] 정답 ①

$2\log_4 6+\log_4\frac{1}{9}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[개념]
로그의 성질
(1) 기본 성질
① $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$ ② $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
③ $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ ④ $\log_a x^n=n\cdot\log_a x$
(2) 밑 변환 공식
⑤ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ ⑥ $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
(3) 기타 변환
⑦ $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$, $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$
⑧ $a^{\log_a b}=b$
⑨ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$
⑩ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

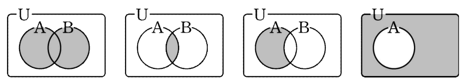
[해설]
$2\log_4 6+\log_4\frac{1}{9}=\log_4 6^2+\log_4\frac{1}{9}=\log_4\left(36\times\frac{1}{9}\right)=\log_4 4=1$

[2번] 정답 ②

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 집합 $A-B$의 원소의 개수는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[개념]
집합의 연산
(1) 합집합 ⇨ $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 또는 $x\in B\}$
(2) 교집합 ⇨ $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 그리고 $x\in B\}$
(3) 차집합 ⇨ $A-B=\{x\mid x\in A$ 이고 $x\notin B\}$
(4) 여집합 ⇨ $A^c=U-A=\{x\mid x\in U,\ x\notin A\}$



[해설]
두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여
$A-B=\{1,\ 2,\ 3\}-\{2,\ 5,\ 6,\ 7\}=\{1,\ 3\}$
따라서 집합 $A-B$의 원소의 개수는 2개이다.

[3번] 정답 ③

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

[개념]
부정형의 극한

	식	접 근 법	극 한 값
$\frac{\infty}{\infty}$	분수식	분모의 최고차항으로 분모 분자를 나눈다.	분자차수>분모차수 ⇒ ∞(-∞) 분자차수<분모차수 ⇒ 0 분자차수=분모차수 ⇒ 최고차항의 계수비
	무리식	근호 안 또는 근호 밖의 최고차항으로 분모 분자를 나눈다.	
	지수식	밑의 절댓값이 큰 항으로 분모 분자를 나눈다.	
$\infty-\infty$	다항식	최고차항을 괄호 밖으로 묶어낸다.	기본형이나 $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 고침
	무리식	분자를 유리화하여 근호 안 또는 근호 밖의 최고차항으로 분모 분자를 나눈다.	
	지수식	밑의 절댓값이 큰 항을 괄호 밖으로 묶는다.	