수학 고득점

규토 N제

by 규토

orbibooks.com

Contents

1. 규토 수학 고득점 N제 오리엔테이션

2. 문제지

3. 해설지

1

규토 수학
고득점 N제
오리엔테이션

1.1 책소개

출판하고자 억지로 만든 문제가 아닌 과외학생들을 위해 정성과 애정으로 만든 문제

안녕하세요. 규토입니다. :D
처음 문제를 만들게 된 계기는 어떻게 하면 과외학생들에게 더 양질의 수업을 할 수 있을까 고민하던 중에 자작문제를 만들게 되었습니다. 문제를 풀 수 있니? 가 아닌 이런 것도 있으니 꼭 알아가렴 이라는 마음가짐으로 만들었습니다. 한 문제당 평균 3시간 이상씩 치열하게 고민하면서 문제를 만들었고 어떤 문제들은 하루 종일 고민한 적도 있었습니다. 창작을 하는 과정이 정말 힘든 것은 사실입니다. 그렇지만 만든 문제를 빨리 제자들에게 알려주고 싶은 기쁨과 설렘이 훨씬 더 크기 때문에 계속 만들 수 있었습니다.

한 문제를 풀어도 여러 문제를 푼 것처럼 느껴지는 문제

원래 문제를 만들 때 2~3개의 예제 문제를 적절하게 섞으면 4점짜리 문제가 탄생합니다. 그 2~3개의 예제문제들의 연결 관계를 파악해 풀어내는 것의 난이도에 따라 문제의 난이도가 달라집니다. 보시면 아시겠지만 제 문제들은 대부분 4~5개의 연결 관계를 파악해야 풀 수 있는 문제가 대다수 입니다. 한 문제를 풀더라도 2~3문제를 푼 것 같은 느낌이 드는 것도 이 때문입니다. 그러니 당연히 어려울 수밖에 없습니다. 4~5개의 연결 관계를 계속 해석 하다 보면 2~3개짜리 연결 관계를 묻는 문제들은 자연스럽게 쉬워질 수밖에 없다고 생각합니다. 수능에서 수학을 치는 이유는 사고력과 논리력을 평가하기 위해서입니다. 단순계산이 아닌 사고력을 측정하는 것입니다. 최대한 사고력을 자극하는 문제들을 만들기 위해 노력했습니다. 총 100문제로 단기간에 수학적 사고력과 문제 해결력을 높일 수 있습니다.

모든 문항마다 테마가 있는 문제

전 문제를 만들 때 항상 테마가 있습니다. 어떤 개념을 알려주고 싶을 때 문제로 그 정보를 전달하려고 노력합니다. 각 문제마다 어떻게 하면 과외학생들에게 효과적으로 내용을 복습하게 하고 사고력을 기를 수 있을까 치열하게 고민했습니다. 틀리셔도 됩니다. 그렇지만 그 개념들을 모조리 흡수해서 확실히 자기 것으로 만들면 다른 문제를 풀 때 큰 도움이 될 수 있다고 생각합니다. 다년간 수능을 치면서 느꼈던 것과 아이들이 생소해 하는 것을 어떻게 하면 전달 할 수 있을까 항상 생각합니다.

4점짜리 문제 중에서도 1등급을 변별하는 문제들만 수록

같은 4점짜리 문제라도 난이도는 천차만별입니다. 굳이 풀어보지 않아도 맞출 수 있는 쉬운 4점짜리 문항이 아니라 대부분 21, 29, 30번 대의 1등급을 변별하는 문제들만 수록하였습니다. 따라서 1등급을 변별하는 문제들만 집중적으로 대비하실 수 있습니다.

기존과 차별화된 해설지

기존의 딱딱한 해설지가 아니라 저자와 소통하는 느낌을 주도록 구어체로 만들었고 저자에게 직접 과외를 받는 느낌이 들도록 구성하였습니다. ① 출제의도 ② 해설 ③ 출제자의 한마디 이렇게 3가지로 구분되어있고 보충이 필요한 부분은 √ 표시해서 별도로 보충 설명하였습니다. 제가 운영하는 네이버 블로그 “규토의 특별한 수학” 에 올려놓은 강의들과 쉽게 연동할 수 있도록 QR코드를 넣었습니다. 그 문제만 공부하는 것이 아니라 복합적으로 공부할 수 있도록 만들었습니다.

1.2 검토후기

김주은 / 울산대학교 의예과

모든 문제를 하나씩 풀 때마다 한 번씩 꼭 감탄을 하게 되는 문제들이었습니다. 모든 수험생들에게 꼭 추천해 드리고 싶은 문제집입니다. 수많은 뛰어난 학생들을 변별해 내는 평가원만의 스킬을 잘 체화시킬 수 있을 뿐 아니라, 수학적 개념이나 문제에 주어진 조건과 같이 놓칠 수 있는 사소한 점들을 잘 챙길 수 있도록 훈련시켜주는 훌륭한 문제집입니다. 이런 문제집을 직접 만드신 규토 선생님이 정말 존경스럽고, 규토N제를 접하게 된 수험생 분들 모두가 정말 행운이라고 생각합니다! 저는 문제집을 볼 때 문제들의 난이도뿐만 아니라 그 문제들이 얼마나 학생들에게 많은 교훈을 주는가를 따지는데, 수학문제집에서는 규토N제를 따라올 게 없겠네요. 수험생 여러분들 규토N제 열심히 푸시고 모두 수능수학 만점 받으세요 :-)

송승형 / 경희대학교 치과대학, 서강대학교 수학과 자퇴

안녕하세요, 규토 N제의 검토를 맡은 송승형입니다. 평가원에서 출제하는 수학영역 시험지의 소위 '킬러문제' 라고 불리는 문제들의 호흡은 대단히 깁니다. 이러한 문제들을 대비하기 위해서는, 기출문제의 완벽한 분석과 더불어 훈련을 위한 '참신하고 새로운' 문항이 필요합니다. 규토 N제는 이러한 필요성에 대하여 저자가 '밤낮을 지새우며' 내놓은 해답입니다. 여러분의 수학 학습에 큰 도움이 되길 바라면서, 검토 후기를 남깁니다.

① 한 문항 속의 복합적인 테마

수록된 모든 문항마다 저자가 전달하고 싶은 '테마' 가 담겨있습니다. 이러한 테마들은, 아주 새롭지는 않습니다. 대부분이 기출문항에서 선보였던 것들입니다. 하지만 이런 테마들 2~3개가 한 문항 속에 녹아들면 그 문항의 난이도는 대폭 상승합니다. 규토 N제의 문항들을 풀면서 이러한 어려움을 경험하시길 바랍니다.

② 다소 긴 호흡의 문제들

한 문항 속에 여러 개의 테마를 녹이다 보니, 한 문항 한 문항의 호흡이 긴 편입니다. 이러한 문항들을 푸는 연습은, 평가원의 호흡이 긴 킬러문제를 대비하는데 효과적입니다. 다만, 인위적으로 문항의 호흡을 길게 하려다 보니 이런 저런 조건들이 나열되어야 했고, 이 부분이 다소 조잡해 보일 수는 있지만, 출제자의 의도를 파악하며 문제를 독해하는 훈련을 하는데 있어서 큰 도움이 되리라 생각합니다.

③ 자세하다 못해, 과외를 받는 느낌의 해설지

규토 N제는 따로 해설강의가 제공되는 강의교재는 아닙니다. 학습자가 스스로 해설지를 보며 공부를 해야 하는 교재입니다. 따라서 친절하고 자세한 해설지는 필수입니다. 그렇기에, 규토 N제의 해설지는 자세하다 못해 과외를 받는 느낌의 해설지를 제공합니다. 맞은 문제이더라도 반드시 해설지를 참고하셔서 저자가 제공하는 '과외'를 받으시길 권합니다.

한 문제 한 문제가 고통스러우시겠지만, 규토 N제를 정복하여 수능수학 고득점에 한걸음 도달하시길 바라겠습니다.

김태훈 / 원광대학교 치의예과

각각의 단원마다, 출제자가 원하는 풀이방법이 있습니다. 그 풀이방법을 숙달시키고, 어떤 상황에서든 생각해낼 수 있도록 훈련시키는 책입니다.

문제를 맞았다고 하더라도, 해설을 꼭 보시고, 해설에 쓰여져 있는 풀이를 익히고, 체화시켜 꼭 출제자의 풀이를 자신의 것으로 가져가길 바랍니다.

송지훈 / 인하대학교 수학과

정말 그동안 수많은 문제집을 봐왔지만 규토 N제처럼 배워갈 것이 많은 문제집은 없었습니다. 기출에서 출제되어 왔던 혹은 출제될 수 있는 소재들을 복합적으로 자연스럽게 엮어놓아 평가원에서 고난도로 출제되고 있는 킬러 문제들을 대비하기 위한 사고력을 기르기에 적합합니다. 이런 질 높은 문제와 더불어 저자의 과외해주는 듯한 해설은 수험생이 풀면서 놓칠 수 있는 부분을 정확히 짚어줍니다. 저자가 책에서 강조하는 100% 공부법과 함께 문제들을 치열하게 고민한다면 수능날 반드시 1등급을 쟁취할 것입니다.

김준연 / 고려대학교 의과대학

반수를 시작하자마자 처음으로 구매한 책인 규토 n제에 대한 검토를 진행할 수 있어서 정말 영광이었다. 공부는 혼자 하는 것이 아니다. 자신에게 맞는 교재와 도와줄 수 있는 사람이 함께 하는 것이다. 이 책은 상위권 학생들, 혹은 상위권을 희망하는 학생들에게 꼭 필요한 교재이자 선생님의 역할을 충실하게 수행할 것이라고 믿어 의심치 않는다. 솔직히 말하면 이 교재의 검토가 나에게는 벅찼다. 수학을 가장 자신있어하며 아무리 못해도 백분위 99 아래로는 떨어져 본 적이 없었지만, 이 교재의 검토 과정에서 끊임없이 씨름하면서 내가 문제를 푸는 수험생인지 검토자인지 헷갈릴 정도였다. 마찬가지로, 여러분들도 이 교재와 씨름할 것이다. 이 교재를 더디게 풀면서 이것이 나에게 맞는 길인가 끊임없이 의심할 것이다. 긴 의심을 끝내고 이 문제집을 체화하는 날, 여러분들은 그에 걸맞은 실력 향상을 경험할 것이다. 건투를 빈다.

1.4 문제지 구성

1. [미분 자작문제 40] 미적분Ⅱ → 단원명

→ 문항 번호 → 문제 고유번호(Serial Number 라고나 할까..)

28. 실수 k와 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$에 대하여 미분가능한 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} kx^2e^{-2x} & (x \geq 0) \\ f(x-a)+b & (x<0) \end{cases} \quad (\text{단, } a,\ b\text{는 상수이다.})$$

이다. 함수 $[g(x)]$의 불연속점의 개수가 1개 일 때,

$\dfrac{10k}{e^2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

$\displaystyle\int_a^{M+b} f(x)\,dx+\int_m^0 g(x)\,dx$의 값을 구하시오.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

→ "규토가 생각하는 지극히 주관적인 모의고사 번호" ⇒ 난이도 판단 가능
(큰 의미를 두지 않으셔도 됩니다. 100번 같은 29번 30번도 있으니까요 -_-;;)

이 공간은 하얗게 ~.~

되도록 책에 풀지 않는 것을 추천 드립니다!
(규토 수학 고득점 N제 100% 공부법 참고)

2. [미분 자작문제 17] **미적분 I**

29. $f'(3)=f(3)$ 인 사차함수 $f(x)$와 $g'(0)=3$ 인 다항함수 $g(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ \\ g(x) & (x<0) \end{cases}$$

이다. $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a<0$, $b<0$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{b}{h(b)-36}=\dfrac{a}{h(a)-36}$ 이다.
(나) 함수 $\lvert h(x) \rvert$ 는 $x=p$, $x=3$, $x=4$에서만 극솟값을 갖는다.

$\dfrac{h(8)}{p}$ 의 값을 구하시오. [4점]

3. [미분 자작문제 18] **미적분 I**

21. 최고차항의 계수가 1이고 $\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k=1\,(k=1,\ 2,\ 3)$을 만족시키는 사차함수 $f(x)$에 대하여 집합 S를

$$S=\left\{x \mid \int_1^x \{f'(t)-t\}dt=0 \text{ 이고 } x\neq 3\right\}$$

라 하고, $n(S)=2$일 때, 집합 S의 모든 원소의 합은? [4점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

27. [미분 자작문제 53] **미적분Ⅱ**

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)_n$는

$$f(x)_n = e^{x^n} - ex^n$$

이다. $g(x) = \sum_{n=1}^{10} \left| f(x)_n - f(0)_n \right|$ 에 대하여 집합 A는

$$A = \{a \mid \lim_{x \to a-} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \neq \lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \}$$

이다. $a \in A$ 인 a를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots, a_m$ (m은 자연수) 이다.

방정식 $\dfrac{f(a_p)_{10} - f(a_q)_{10}}{a_p - a_q} = f'(m-17)_{10}$을 만족시키는

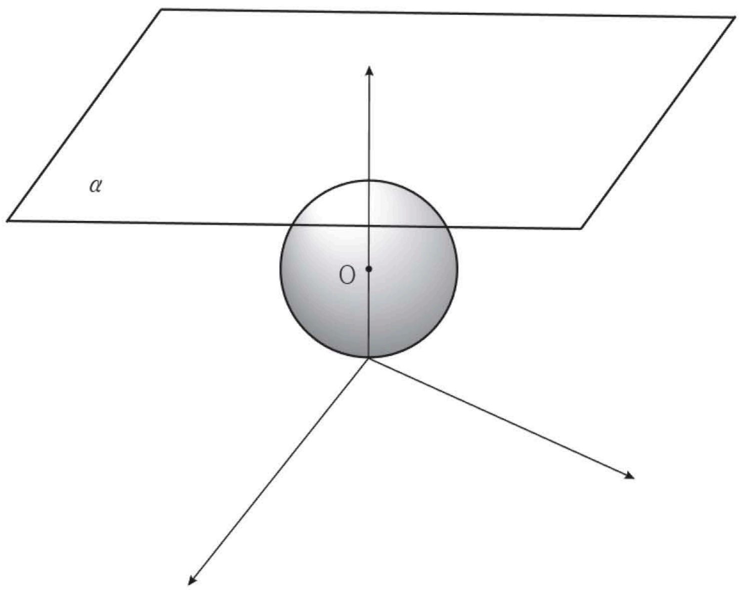
$(p,\ q)$의 순서쌍의 개수는? (단, $p \neq q$ 이다.) [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

7. [공간도형과 벡터 자작문제 26] **기하와 벡터**

28. 그림과 같이 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+(z-2)^2=4$ 와 상수 $k\,(k>4)$에 대하여 평면 $\alpha: z=k$가 있다. 구 S 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ 2)$와 평면 α 위의 세 점 $\mathrm{B}(0,\ -2,\ k)$, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}| = 2\sqrt{3}$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$
(다) 점 $\mathrm{Q}(a,\ b,\ k)$에 대하여 $a^2+b^2 \le 4$ 이다.



$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$의 최솟값이 50일 때, $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$의 최솟값을 구하시오. (단, 점 O는 구 S의 중심이다.) [4점]

3. [미분 자작문제 18] **미적분 I**

21. 최고차항의 계수가 1 이고 $\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k=1\,(k=1,\ 2,\ 3)$을 만족시키는 사차함수 $f(x)$에 대하여 집합 S를

$$S=\left\{x \mid \int_1^x \{f'(t)-t\}dt=0 \text{ 이고 } x\neq 3\right\}$$

라 하고, $n(S)=2$ 일 때, 집합 S의 모든 원소의 합은? [4점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

출제의도

① $\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k=1$ 식을 통해 $f'(2)=2$ or -2 로 case 분류할 수 있는가?

② $n(S)=2$ 조건을 활용 할 수 있는가?

③ $f(x)$ 에 관해 식 세우기 !

해설

$\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k=1$ (단, $k=1,\ 2,\ 3$) 이라고 했으니까 k에 각각 대입해보면

$f'(1)=1$ ($f'(2)=2$, $f'(2)=-2$가 될 수 있는 것이 point !)

$$(f'(2))^2=4 \begin{cases} f'(2)=2 \\ f'(2)=-2 \end{cases}$$

$(f'(3))^3=27 \Rightarrow f'(3)=3$

이렇게 case 분류할 수 있겠죠?

① $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$
② $f'(1)=1,\ f'(2)=-2,\ f'(3)=3$

① $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$

조심하세요!
$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이니까 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 4가 되겠죠?

자 이제 식 세우기를 해봅시다!
$f'(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ 라고 두고 문자가 3개 이고 식이 3개 이니까 풀 수 있겠죠?
그렇지만 ! 더 효과적으로 식 세우는 방법을 알려드리고자 이 문제를 만들었어요.
일단 $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$ 에서 오른쪽 항을 왼쪽으로 넘기면
$f'(1)-1=0$, $f'(2)-2=0$, $f'(3)-3=0$ 이렇게 되겠죠?

여기서 $f'(1)\ f'(2)\ f'(3)$ 를 $f'(x)$ 로 변환하면
$-1\ -2\ -3$ 을 $-x$ 라고 쓸 수 있겠네요.

$f'(x)-x=h(x)$ 라고 하면 $h(1)=0$, $h(2)=0,\ h(3)=0$ 을 만족하므로
$(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 인수를 가지겠죠? 또한 $h(x)$ 는 $f'(x)$ 가 삼차함수니까 당연히 삼차함수가 돼요. 여기서 $-x$ 는 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으니까 $h(x)$ 의 최고차항의 계수는 4가 되겠죠?
결국 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수군요 !
$\therefore h(x)=f'(x)-x=4(x-1)(x-2)(x-3)$
√ $f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)+x$ 라는 식을 세울 수 있어요.

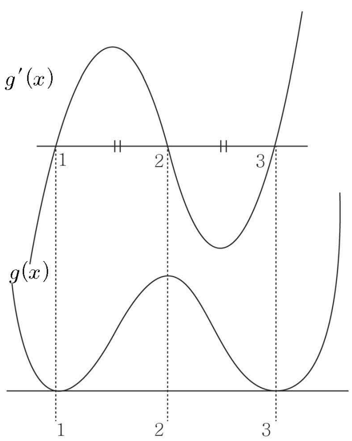
$\int_1^x \{f'(t)-t\}dt=g(x)$ 라고 보면

$$S=\left\{x \mid \int_1^x \{f'(t)-t\}dt=0 \text{ 이고 } x\neq 3\right\}$$

$$\Rightarrow\ S=\{\,x \mid g(x)=0 \text{ 이고 } x\neq 3\,\}$$

(기억하세요! 이 technic! $g(x)$ 로 보는 순간 문제를 굉장히 쉽게 접근할 수 있어요.)
$g'(x)=f'(x)-x$ 와 $g(1)=0$ 을 뽑아먹을 수 있겠네요.(거의 기계처럼 나와야 해요~)

$f'(x)-x=4(x-1)(x-2)(x-3)$ 이기 때문에 그림을 그리면



√ $g'(x)$가 $(2,\ 0)$에 점대칭 되어져 있으니까 x축과 둘러싸인 넓이가 서로 같겠죠? 따라서 $g(x)$를 그리면 $x=2$에 대칭된 사차함수가 나와요.
$g(1)=0$ √ x축 설정 ! (다음페이지에 설명)

$g(x)=0$ 이 되는 것은 $x=1,3$ 이죠?
그렇지만 $x\neq 3$ 이기 때문에 $x=1$만 돼요.
따라서 $n(S)=1$이니까 조건을 만족하지 않겠죠?

√ **check**

처음에는 어렵지만 계속 연습하다보면 너무나 당연히 식을 세울 수 있을 거에요.
지금 설명이 잘 이해가 되지 않으시면 제 블로그 규토의 특별한 수학에 있는 (show me the 3차 4차)를 참고해주세요~

ex) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=2$, $f(2)=4,\ f(3)=6$
$f(x)=?$
한번 적용시켜 보세요.
다음 페이지에 답을 적어 놓을게요.

$g'(x)$가 $(2,\ 0)$에 점대칭 되어져 있는 것을 직관적으로 보고 알 수 도 있지만 식으로 보이려면 어떻게 해야 할 까요?

$f(x)+f(2a-x)=2b$
이 의미하는 것이 $f(x)$ 가 $(a,\ b)$ 에 점대칭 되어 있다.
는 것이니까
$f(x)+f(4-x)=0$ 만 만족 시키면 되겠죠?
$4(x-1)(x-2)(x-3)+$
$4(3-x)(2-x)(1-x)=0$
성립하네요 !

따라서 $(2,\ 0)$에 점대칭 되어져 있다고 할 수 있어요~

증명은 아래 강의를 참고해 주세요~
자취방정식 QR코드

② $f'(1)=1,\ f'(2)=-2,\ f'(3)=3$

마찬가지로 식을 세워볼까요~ 여기서는 $f'(1)-1=0,\ f'(3)-3=0$ 밖에 없으니까 한 번에 $f'(x)-x$ 를 구할 수는 없어요. 저번에 배운 미지수 technic ! 을 써볼게요~

$f'(x)-x=4(x-1)(x-3)(x-a)$

☆ 여기서 $(x-a)$ 라고 쓴 이유는 ?

$f'(x)-x$ 가 삼차이고 서로 다른 2개의 실근을 갖기 때문에 무조건 실근 하나를 더 가져야 하겠죠?

$f'(2)=-2$ 를 만족해야하니까 $x=2$ 를 대입하면

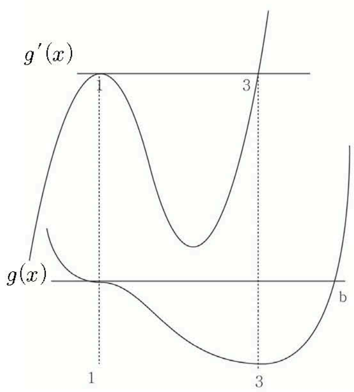
$f'(2)-2=4(2-1)(2-3)(2-a)$

$f'(2)-2=-4(2-a)=-8+4a$

$-4=-8+4a \Rightarrow a=1$

$\therefore f'(x)-x=4(x-1)^2(x-3)$ case ① 과 마찬가지로

$g'(x)=4(x-1)^2(x-3)$ 그래프를 그리면



$g(1)=0$ x축 설정!

$g(x)$ 에 대해 식을 세워봅시다 ! 나올 때 마다 적용시켜주세요~ 미지수 b 놓고 식을 세우면

$g(x)=(x-1)^3(x-b)$

$g'(x)=3(x-1)^2(x-b)+(x-1)^3$

$=(x-1)^2(3x-3b+x-1)$

$g'(3)=0$ 이니까 $b=\dfrac{11}{3}$

결국 구하고자 하는 것은 $g(x)=0$ 을 만족하고 3이 아닌 x값이죠?

따라서 $S=\left\{1,\ \dfrac{11}{3}\right\}$ 가 되겠죠?

답은 ③ $\dfrac{14}{3}$

출제자의 한마디

만약 관성적으로 풀어서 $f'(2)=-2$ 를 보지 못했다면 당황할 수 있는 문제에요.
너무나 당연하지만 막상 긴장상태에서 풀면 보이지 않을 수 있어요. 조심하세요~
S집합에 있는 $x\neq3$ 이라는 조건을 준 이유는 case ①을 제거해 주기 위해서에요.
$\displaystyle\int_1^x \{f'(t)-t\}dt=g(x)$ 로 바꾸는 technic 도 꼭 챙겨가세요.
계속 식 세우기 문제가 나오고 있죠? 적용시켜 보셨나요?
앞으로도 계속 나오니까 꿈에 나올 정도로 반복해서 적용시켜주세요~
이 문제집에서 식 세우기만이라도 완벽히 알아 가면 문제 풀 때 큰 도움이 될 것이라 생각해요.

✓ check

① $g(x)=\displaystyle\int f(x)dx$

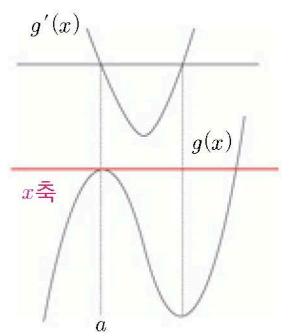
② $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$

①, ②차이점은 무엇일까요?

①도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 이고
②도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 에요.

①은 x축이 어디 있는지 모르지만
②는 $g(a)=0$ 임을 토대로

x축을 설정할 수 있어요.



ex) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6$
$f(x)=?$

답은
$f(x)$
$=(x-1)(x-2)(x-3)+2x$

모르겠다. 라고요? ㅎㅎ;; 자 잘 생각해보세요. 우리는 $f(x)$ 의 그래프를 그려야해요.
$x \geq 0$ 때 $x(x-a)^2$ 라고 했어요. 그래프를 그리려고 하는데 무엇 때문에 난감하나요?
바로 a 때문이죠? 그래프를 그릴 때 x 축에 접하는 a 값에 따라 그래프가 달라지겠네요?
크게 몇 가지로 case 분류할 수 있죠?
그래요. ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분할 수 있어요.
$x<0$ 때를 살펴볼까요? 자 $x<0$ 일 때는 $(x+a)^2 x(x-a)$ 라고 했죠? 이것도 그래프를 그리려고 하니까 a 때문에 난감해요. 따라서 a 에 따라 case분류를 해줘야 해요.
case 분류를 해주면 마찬가지로 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분이 되겠죠?
결국 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 경우만 case분류하면 되겠네요.

여기서 잠깐 !
"아니 그럼 규토 쎈세 무조건 이런 문제가 나오면
① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 로 case 분류해야 하나요?"
√ 여러분이 대답해주세요. 아니죠? 그래프를 그리려니까 a 때문에 난감해서 같은 그래프 개형이 나오도록 a 의 범위를 case 분류 한 거에요.

이제 A 집합의 의미를 파악해볼게요.

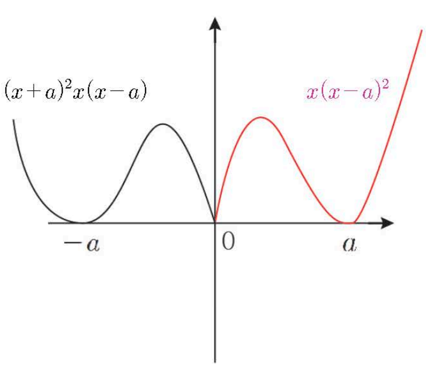
$$A=\left\{t \mid \lim_{x \to t+} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \neq \lim_{x \to t-} \frac{f(x)-f(t)}{x-t}\right\}$$

$x=t$ 에서 우미분계수와 좌미분계수가 다르다는 의미에요.
결국 미분이 불가능한 점의 x 좌표가 A 집합의 원소가 되겠죠?

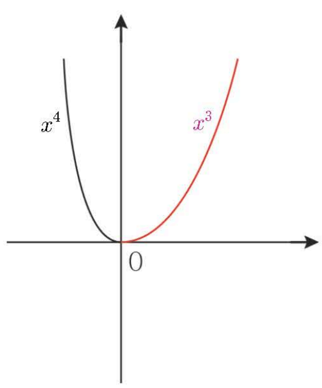
B 집합은 $B=\{t \mid f(x)$는 $x=t$ 에서 극솟값을 갖고 $t \neq 0\}$ 라고 했는데요.
극솟값을 가지면서 $t \neq 0$ 를 만족해야 해요. 왜 하필 $t \neq 0$일까요?
조건을 만족시키는 case를 제거하기 위함이에요~
출제자는 조건을 줄 때는 무엇인가 의도가 있다는 거에요. +_+

이제 a 에 따라 case 분류 해봅시다!

① $a>0$



② $a=0$



✓ check

$f(x)=(x-1)(x-a)^2$
이면
① $a>1$
② $a=1$
③ $a<1$
이렇게 3가지로 분류할 수 있겠죠? 이해 되셨나요?

27. [미분 자작문제 53] **미적분Ⅱ**

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)_n$는

$$f(x)_n = e^{x^n} - ex^n$$

이다. $g(x) = \sum_{n=1}^{10} \left| f(x)_n - f(0)_n \right|$ 에 대하여 집합 A는

$$A = \left\{ a \mid \lim_{x \to a-} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \neq \lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right\}$$

이다. $a \in A$ 인 a를 작은 수부터 크기순으로 나열하면
$a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots, a_m$ (m은 자연수) 이다.
방정식 $\dfrac{f(a_p)_{10} - f(a_q)_{10}}{a_p - a_q} = f'(m-17)_{10}$을 만족시키는
$(p,\ q)$의 순서쌍의 개수는? (단, $p \neq q$ 이다.) [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

출제의도

① $f(x)_n$ 의 그래프를 그릴 수 있는가? (합성함수로 도함수 부호 판단)

② $n=1$ 일 때와 $n=$ 1 보다 큰 홀수의 차이점 구분 !

③ 방정식 $\dfrac{f(a_p)_{10} - f(a_q)_{10}}{a_p - a_q} = f'(m-17)_{10}$ 의 의미를 파악할 수 있는가?

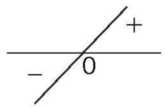
해설

출제의도가 $f(x)_n$ 의 그래프를 그리는 것인 만큼 그래프를 그리는 것이 쉽지 않은데요.
n이 짝수일 때와 홀수일 때를 구분해서 case분류 해봅시다~

① n이 짝수

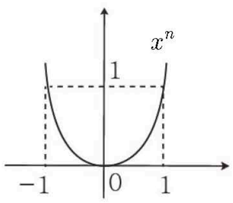
$f'(x)_n = nx^{n-1}(e^{x^n} - e)$

쪼개서 생각해보면

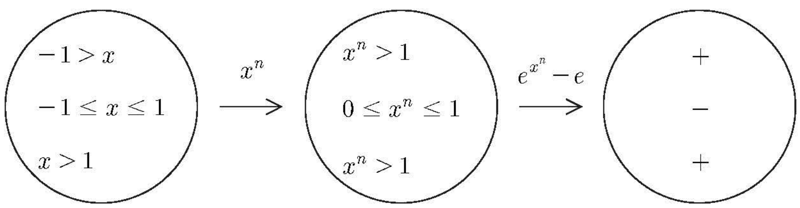
x^{n-1} 은 $n-1$ 이 홀수이기 때문에 

다음과 같은 그래프가 나오겠죠?

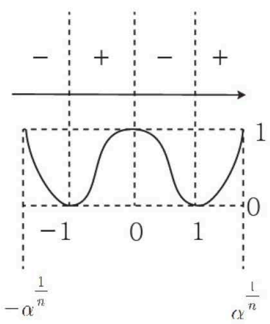
문제는 $(e^{x^n} - e)$ 의 부호인데요. 우리가 알고 싶은 것은 $(e^{x^n} - e)$ 가 양수인지 음수인지이니까 $x^n = 1$ 일 때를 경계로 case분류 해봅시다~ (n은 짝수니까 2차 함수 꼴)



여기서 point ! 합성함수로 생각해보면



다시 합쳐서 부호를 판단하면



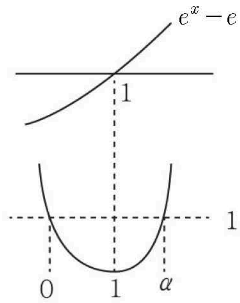
$f(x)_n$ 는 우함수니까 y축 대칭인 그래프가 나오겠죠?
$f(x)_n = 1$ 를 만족하는 0 이 아닌 x 값을

각각 $\alpha^{\frac{1}{n}}, -\alpha^{\frac{1}{n}}$ 라 해봅시다.

미적분2 영역 15번 문제에서도 했었지만 $n=1$일 때와 $n=1$보다 큰 홀수 일 때가 달라졌었던 것 기억나시나요? 특히 미분 불가능을 물었을 때 $n=1$보다 큰 홀수는 뚫점이 생겨서 $n=1$과 차이를 보였었죠?
$n=1$ 일 때도 고려해서 case분류 해봅시다~

② $n=1$

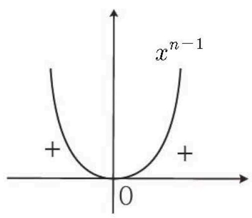
$f(x)_1 = e^x - ex$, $f'(x)_1 = e^x - e$

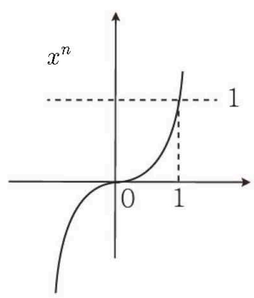


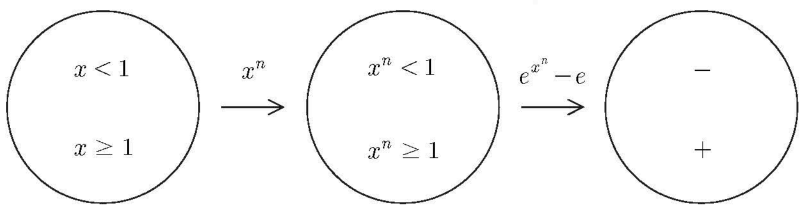
$f(x)_1 = 1$를 만족시키는 0이 아닌 x값을
α 라 해봅시다.

③ n이 1보다 큰 홀수

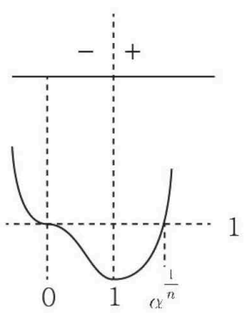
$f'(x)_n = nx^{n-1}(e^{x^n} - e)$
짝수 때와 마찬가지로 구해봅시다~







다시 합쳐서 부호를 판단하면



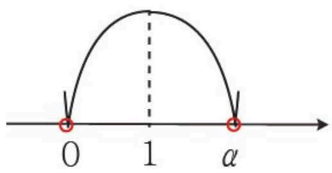
여기서 point ! 는 $x=0$에서 뚫접을 갖는 것입니다!
$n=1$ 일 때와의 차이점이 느껴지시나요~

$f(x)_n = 1$ 를 만족시키는 0이 아닌 x값을
$\alpha^{\frac{1}{n}}$ 라 해봅시다.

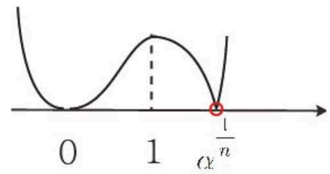
$|f(x)_n - f(0)_n| = |f(x)_n - 1|$ 이식은 많이 봤던 표현이죠?
여기서는 합을 물어봤군요.

집합 A는 미분불가능한 점을 물어보는 것이겠죠?

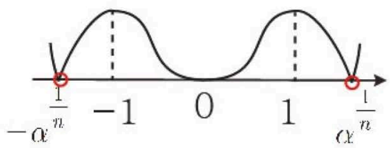
i) $n=1$ $|f(x)_1-1|$



ii) $n=1$보다 큰 홀수 $|f(x)_n-1|$



iii) n이 짝수 $|f(x)_n-1|$



$$g(x)=|f(x)_1-1|+|f(x)_2-1|+|f(x)_3-1|+\dots|f(x)_{10}-1|$$

$0, \alpha$ $\quad -\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}$ $\quad \alpha^{\frac{1}{3}}$ $\quad -\alpha^{\frac{1}{10}}, \alpha^{\frac{1}{10}}$

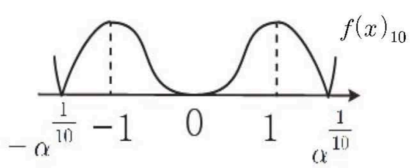
미분 불가 + 미분 가능 = 미분 불가 이니까 겹치지만 않으면 독립적으로 각항의 미분 불가능점이 $g(x)$ 의 미분 불가능점이 되겠죠?

순서대로 미분불가능한 점의 개수를 새면

2+2+1+2+1+2+1+2+1+2=16

총 16개가 나오겠죠? 따라서 $m=16$ (겹치는게 없으니까요~)

$$\frac{f(a_p)_{10}-f(a_q)_{10}}{a_p-a_q}=f'(m-17)_{10}=f'(-1)_{10}=0$$



결국 평균변화율이 $=0$ 즉, $f(a_p)_{10}-f(a_q)_{10}=0$ 를 물어보는 것이군요!

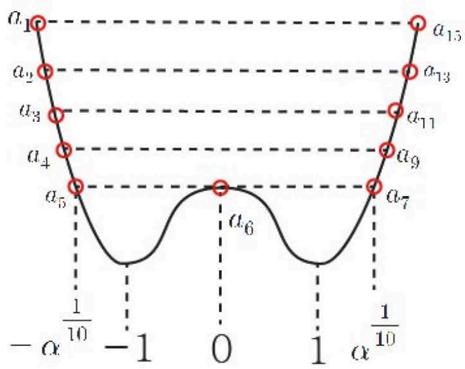
a_n 을 차례대로 구해봅시다~

$a_1=-\alpha^{\frac{1}{2}}$, $a_2=-\alpha^{\frac{1}{4}}$, $a_3=-\alpha^{\frac{1}{6}}$, $a_4=-\alpha^{\frac{1}{8}}$, $a_5=-\alpha^{\frac{1}{10}}$, $a_6=0$

$a_7=\alpha^{\frac{1}{10}}$, $a_8=\alpha^{\frac{1}{9}}$, $a_9=\alpha^{\frac{1}{8}}$, $a_{10}=\alpha^{\frac{1}{7}}$, $a_{11}=\alpha^{\frac{1}{6}}$, $a_{12}=\alpha^{\frac{1}{5}}$, $a_{13}=\alpha^{\frac{1}{4}}$

$a_{14}=\alpha^{\frac{1}{3}}$, $a_{15}=\alpha^{\frac{1}{2}}$, $a_{16}=\alpha$

$f(x)_{10}$ 가 우함수임을 활용해서 함숫값이 같은 점을 찾아봅시다~



$(a_1,\ a_{15})$, $(a_2,\ a_{13})$, $(a_3,\ a_{11})$, $(a_4,\ a_9)$, $(a_5,\ a_7)$, $(a_5,\ a_6)$, $(a_6,\ a_7)$

$7 \times 2(p,\ q$ 자리 바꾸기$) = 14$

답은 ② 14

출제자의 한마디

합성함수를 통해 $f(x)_n$ 을 구하는 과정을 물어보고 싶었습니다~ 특히 $n=1$일 때와 $n=1$보다 큰 홀수일 때를 구분할 수 있는지를 물어보고 싶었어요 :D

(미적분2 영역 15번 문제에서 했었죠? ㅎㅎ)

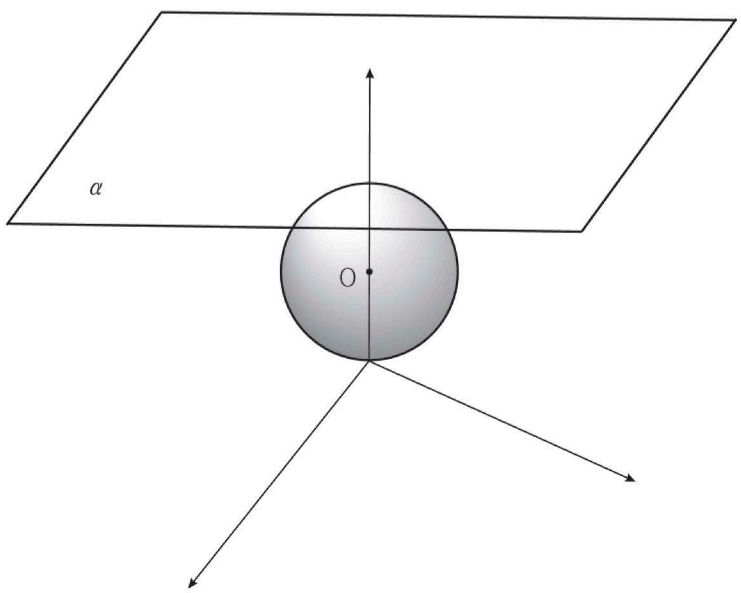
절댓값 함수의 합 $\left(g(x) = \sum_{n=1}^{10} \left| f(x)_n - f(0)_n \right|\right)$에 대한 미분가능성 판단은 2015년 수능 수학 B형 30번에서도 나왔었죠. 찾아서 다시 한 번 풀어보셨으면 합니다 ㅎㅎ

요번 문제는 미분가능성에서 한발 나아가 평균변화율을 활용한 경우의 수 문제를 추가했습니다~ 마무리는 그렇게 어렵지 않았죠? ㅎㅎ

7. [공간도형과 벡터 자작문제 26] **기하와 벡터**

28. 그림과 같이 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+(z-2)^2=4$ 와 상수 $k\,(k>4)$에 대하여 평면 $\alpha: z=k$가 있다. 구 S 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ 2)$ 와 평면 α 위의 세 점 $\mathrm{B}(0,\ -2,\ k)$, P, Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert\overrightarrow{\mathrm{BP}}\rvert=2\sqrt{3}$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$
(다) 점 $\mathrm{Q}\,(a,\ b,\ k)$에 대하여 $a^2+b^2\le 4$ 이다.



$\lvert\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\rvert^2$ 의 최솟값이 50 일 때, $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ 의 최솟값을 구하시오. (단, 점 O 는 구 S 의 중심이다.) [4점]

출제의도

① P의 좌표를 (나) 조건을 이용하여 찍을 수 있는가? (by 삼수선 정리)

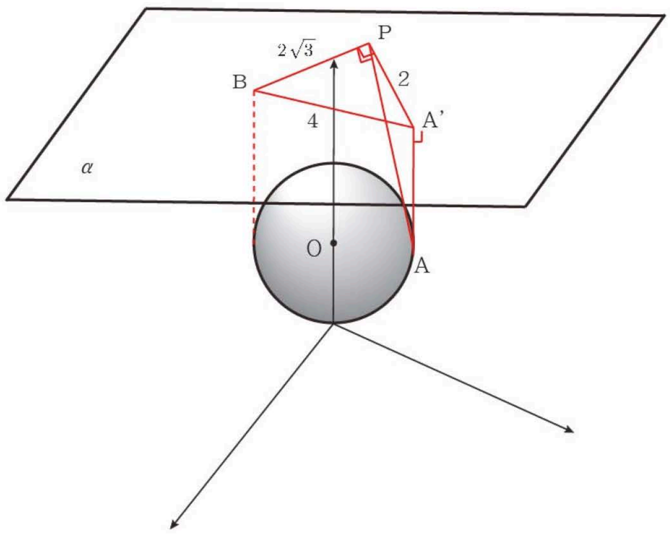
② Q의 자취를 구할 수 있는가?

③ $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\rvert^2$ 가 최소가 될 때와 최대가 될 때를 파악할 수 있는가?

해설

A를 평면 α에 내린 수선의 발을 A' 라 하면

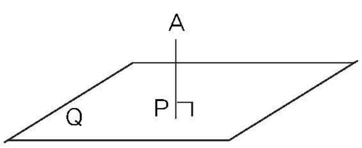
$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'P} \Rightarrow (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'P}) \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{A'P} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$



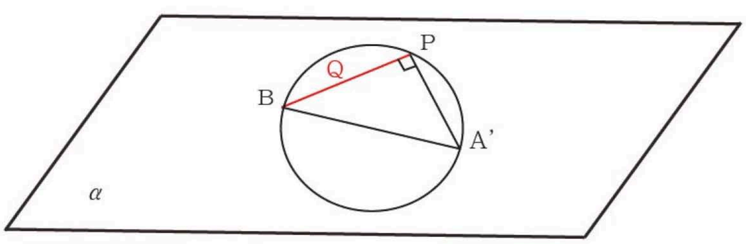
삼수선이 보이시나요?ㅎ보조선 몇 개 그었을 뿐인데 문제가 훨씬 쉽게 느껴지시죠?
(위 그림에서도 알 수 있듯이 정사영내린 벡터와 수직이면 정사영 내리기 전 벡터와도 수직이죠? 사실 $\overrightarrow{BP}$ 가 법선벡터니까 평면 AA'P 위에 있는 모든 직선과 수직이지만요. ㅎㅎ)

이제 Q를 찾으러 가봅시다!

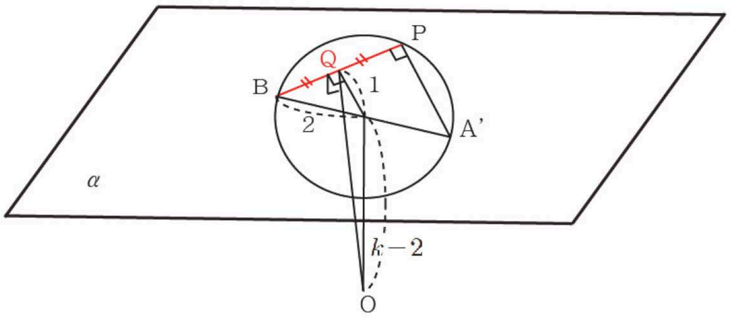
(나) 조건 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ 에서 $\overrightarrow{AP}$ 가 법선벡터이고 점P를 지나는 평면위에 Q가 존재한다 라고 reading 할 수 있겠죠?



(다) 조건에서 Q의 z좌표가 k니까 α 평면과의 교선인 직선 BP 위에 Q가 있겠죠?
하지만 $a^2 + b^2 \leq 4$ 를 고려하면 범위가 한정되겠군요. 반지름의 길이가 2인 원 내부에 있겠죠?



높이가 $k-2$로 일정하니 밑변이 최소일 때 빗변(선분OQ) 가 최소가 되겠죠?



$\therefore\ (k-2)^2+1=50 \Rightarrow k=9$

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OQ})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OQ})=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{OQ}|^2$의 최솟값을 구하면 되겠군요~

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(2+2)^2+(9-2)^2}=\sqrt{65}$

$|\overrightarrow{OQ}|$ 가 최대가 되려면 Q가 B or P에 있을 때겠군요.

$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{4+(9-2)^2}=\sqrt{53}$

$\therefore (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OQ})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OQ})=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{OQ}|^2=65-53=12$

답은 12

출제자의 한마디

(나) 조건을 활용하면서 삼수선의 정리가 보이셨나요? ㅎㅎ 잘하셨어요~ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$를 보자마자 $\overrightarrow{AP}$ 가 법선벡터이고 점P를 지나는 평면위에 Q가 존재한다 라고 reading 해주세요. (다) 조건을 통해서 Q의 자취를 한정할 수 있는지 물어보고 싶었습니다~ 또한 직각삼각형에서 빗변의 길이의 최소, 최대를 물을 때 높이나 밑변 둘 중 하나가 고정되어 있는 상황도 잘 나오니까 꼭 알아주세요 :D