FINAL LECTURE : PHYSICS 1

2 0 1 9

김 형 모 지음

1

개념편

01 머리말

이 책을 단순히 고난도 문제집이라고 생각하여 구매한 사람들이 많을 것이다. 글쓴이가 본인이 쓴 책에 대해 뭐라 주절대는 부분을 빨리 넘어가고 싶은 사람들도, 이미 개념은 다 익혔으니 실전 문제 풀이로 바로 들어가고 싶은 사람들도 있을 것이다. 게다가 글쓴이가 이 장에서 하고자 하는 이야기는 시험 범위 안의 내용에 대한 것이 아니다.

별로 믿음직스럽지 않겠지만, 이 글을 읽는 것만으로 역학에 대한 생각이 바뀌게 될 거라 단언할 수 있다. 잠깐 따로 시간을 내어 이 장을 꼭 읽어보기를 권한다. 지금부터 다룰 이야기는 물리학(그리고 역학)이란 무엇인가, 역학 문제란 무엇인가, 역학 문제를 어떻게 풀 것인가, 역학 문제가 어떻게 만들어지는가에 관한 이야기다.

물리학이 무엇인지 거칠게 말하자면 모**든 자연 현상은 물체의 운동과 상호작용에 의한 것**이며, 이를 **정합적이며 정량적인 법칙으로 설명**하고자 하는 학문이다. 물리학은 '모든' 자연 현상이 어떠한 '법칙'에 따라 일어나는지를 탐구한다. 화학이나 생명과학 등은 '어떤' 자연 현상이 어떠한 '양상'으로 일어나는지를 탐구한다.

비록 고등학교 과학탐구의 학문적 깊이는 얕으나, 물리학과 다른 과학의 차이점만큼은 고등학교 수준에서도 극명하게 나타난다. 그런데 고등학교 물리의 가장 큰 문제점은 그러한 맥락을 전혀 설명하지 않는다는 것이다.

그렇다보니 물리는 수험생들에게 **공식만 던져주고 생전 보지도 못한 문제를 풀라 하는 과목**으로 받아들여 진다. 이는 물리와 다른 과목의 차이에 맞추어 공부나 문제 풀이의 호흡을 다르게 가져가지 않기 때문이다. 뿐만 아니라 대부분의 수험생들은 시험에 나오는 것은 공부할 대상, 시험에 나오지 않는 것은 거를 대상으로 생각하는 경향이 있다. 그들은 시험 범위에 직접적으로 포함되지 않는 '키워드'나 '패러다임'은 공부하려들지 않는다. 이들에게 공부란 시험 범위에 직접적으로 포함되는 용어와 공식을 외우는 작업에 지나지 않는 것 같다. 그 외의 것을 공부하는 것은 '효율'이 떨어진다고 알려져있다. 미안하지만, 공부는 그렇게 하는 게 아니다.

이 장에서 가장 중요하고 시급한 일은 새로운 개념, 심화 개념을 가르치는 것이 아니다. 12년 동안 학교와 학원에서 세뇌된 고정관념, 두려움과 무기력함, 그에 인해 잘못된 공부 방법을 깨트리는 일이다. 물리는 타고난 학생이 하는 과목이 아니라 공부를 잘 하는 학생이 하는 과목이다. 문제가 풀리지 않는 이유는 물리가 어렵기 때문이 아니다. 공부를 시험 범위까지밖에 하지 않았기 때문이다. 안타깝지만 수능은 내신이 아니다.

문제 풀이의 흐름

앞서 설명했듯이 물리학은 자연 현상에 대한 보편적인 설명을 추구한다. 구체적인 법칙(공식)을 암기하거나, 구체적인 자연 현상(문제 상황)을 암기하는 것은 물리 교육이 추구하는 방향이 아니다. 물리 교육의 핵심은 일반적인 자연 현상(문제 상황)을 보편적인 법칙(공식)으로 설명하는 능력이다.

다른 과학 과목은 특정한 자연 현상(문제 상황)에 대해서 다루기 때문에 정확히 그 현상을 설명하기 위한 법칙(공식)을 세워 사용하는 경우가 많다. 쉽게 말해 실용적인 문제에 실용적인 해결책을 제시한다. 때문에 고등학교 수준에서는 대부분 특정 단원의 개념을 학습한 다음 그 단원의 예제를 바로 풀어내는 것이 가능하다.

하지만 물리학은 학문의 목표와 체계가 뿌리부터 다르다. 특정 단원의 개념을 학습한 다음 그 단원의 예제를 바로 풀어내는 것은 근본적으로 불가능하다. 이는 능력의 문제가 아니라 과목의 특성이다. 문제 하나를 풀어내기 위해 필요한 준비 과정이 다른 과목과는 비교할 수 없을 정도로 길다. 이틀? 일주일? 대부분의 수험생은 아직 공부에 관해서는 초보자다. 하나의 관점을 이해하고 체득하는데 최소한 한 달은 걸린다. 그러지 않았다면 연습 부족이거나 어딘가 구멍이 있음에 틀림 없다.

아무래도 예시가 구체적이어야 이해하기 쉽다. 고등학교 물리1 역학에 초점을 맞춰 이야기해보자. 과목에서 가르치는 내용, 시험 범위는 물체의 운동 상태, 평형 상태, 상호작용을 설명하기 위한 물리량들과 법칙이 전부다. 그러한 공식들이 어떻게 실제 문제에 적용되는지는 나와 있지 않다. 그런데 앞서 말했듯이, 역학의 본질은 공식이 아니라 문제에 공식을 적용하는 그 과정에 있다. 그리고 모든 교재에는 그 본질이 빠져 있다.

이 문제는 왜 이 공식을 적용해야 하는가? 이 문제를 푸는데 이용할 수 있는 공식은 어떤 것들이 있는가? 이 문제에 공식을 적용하기 위해서는 어떤 과정을 거쳐야 하는가? 이 문제가 의미하는 내용은 무엇인가? 어느 책도, 어느 강의도, 어느 누구도 이에 대해 올바르게 답해주지 않으며, 답해줄 수도 없다. 학습 자료가 아니라 학습 태도에 관련된 문제이기 때문이다. 아무리 섬세한 언어와 생생한 예제를 곁들이더라도, 인간인 이상 연습 없이 머리로만 습득할 수는 없는 형태의 지식인 **암묵지**이기 때문이다.

사실 교육과정에서는 물리 교과목보다는 수학 교과목의 문제 외적 해결 능력으로부터 이런 능력을 함양해왔기를 기대하는 것 같다. 현실적으로 그들은 소수에 불과하다. 보통의 학생들은 다른 과학 과목을 공부하는 것처럼 물리를 대한다. 하루 이틀 공부해서 개념을 떼고 나면 바로 실전으로 들어갈 수 있을 거라 기대하고 절망한다.

하지만 공식을 공부하는 데서 출발해서는 문제 상황을 식으로 풀어내기가 쉽지 않다. 왜냐하면 실제로 배워야 할 내용은 하나도 배우지 않은 채, 아무 의미 없는 알파벳 나열에 불과한 공식 몇 개만 머릿속에 떠돌아다니고 있기 때문이다.

02 유체역학

유체의 평형

4단원 역학 문제를 한 문장으로 나타내면, 평형 상태를 분석하는 것이라 할 수 있다. 평형 상태는 물체에 작용하는 모든 힘의 합력이 0인 상태를 뜻한다. 따라서 어떤 힘이 작용하는지를 파악하고, 그 합력이 0임을 이용하면 된다.

그런데 1단원에서와는 달리, 4단원에는 힘의 연장선인 **압력**(유체역학)과 **돌림힘**(역학적 평형)의 개념이 추가된 평형을 다루어야 한다. 그래서 비슷한 부분도, 다른 부분도 있다. 여기서는 부피가 있는 물체와 유체의 평형을 다뤄보자.

유체에서의 압력

정의 1 (압력)
두 물체 혹은 유체가 면적이 S인 면을 맞대고 서로 수직으로 크기가 F인 힘을 작용하여 밀어낼 때, 각 물체 혹은 유체의 경계면에서의 압력 $P = \dfrac{F}{S}$이다.

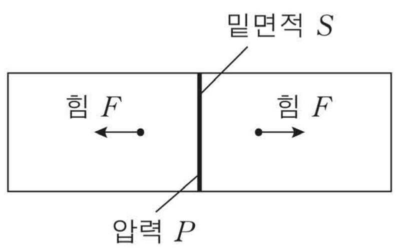


그림 4.1: 면에서의 압력

그림 4.1은 정의 1의 내용을 시각화한 것이다. 압력 그 자체는 방향성을 가지지 않는다. 이미 압력 자체가 면을 기준으로 유체가 상호작용하고 있음을 내포하고 있는 개념이기 때문이다. 때문에 경계면에서 왼쪽 물체의 압력과 오른쪽 물체의 압력은 모두 양수 P이다. 이는 정확한 정의는 아니지만, 물리 I 수준에서 압력을 쉽게 이해할 수 있는 방법이다.

납득이 잘 가지 않는다면 이렇게 생각해보자. 힘은 방향을 가지고 있다. 면 역시 방향(법선 벡터)을 가지고 있다. 이때 압력은 면을 기준으로 힘을 주고받고 있는 상황에서, 힘과 면적의 크기 비율을 나타내는 물리량이라고 생각하면 된다. 따라서 압력은 자연스럽게 벡터가 아니라 스칼라가 된다.

압력차 이론 - 정지 유체

압력차에는 세 종류가 있으며, 절댓값이 아니라 부호가 있는 값이다. 두 점 혹은 두 면에서의 압력의 차이를 **정압차**라고 한다. 유체가 중력장 내에 있는 경우는 **주압차**를, 운동 유체에서는 **동압차**를 추가로 고려해주면 된다. 이들의 정의는 다음과 같다.

정의 2-1 (정압차)

점 A에서 유체의 압력이 P_A, 점 B에서 유체의 압력이 P_B일 때, A에서 B로의 정압차 $\Delta P = P_B - P_A$이다.

※ 고등학생들을 대상으로 하는 설명의 편의를 위해 임의로 만든 것이므로, 실제 유체역학에서의 의미와는 사뭇 다를 수 있다.

정압(靜壓)은 정지 압력이라는 의미로, 평형을 이루는 힘의 크기로부터 계산한 실제 압력을 뜻한다.

어느 점을 A, B로 정하느냐는 마음대로이지만, 보통은 위→아래, 왼쪽→오른쪽 순서로 매기면 된다. 이후 압력차의 방향을 생략한다면 그러한 관습에 따라 매긴 것으로 한다. 예를 들어 피스톤의 윗면에서 피스톤의 아랫면으로의 정압차 $\Delta P = \frac{W}{S}$이다.

정의 2-2 (주압차)

밀도가 ρ로 균일한 유체 내의 점 A와 점 B 사이의 높이 차가 Δh일 때, A에서 B로의 주압차 $\Delta P = \rho g \Delta h$이다.

※ 고등학생들을 대상으로 하는 설명의 편의를 위해 임의로 만든 것이므로, 실제 유체역학에서의 의미와는 사뭇 다를 수 있다.

주압(柱壓)은 기둥 압력이라는 의미로, 중력장 내에서 높이 차에 의한 항, 혹은 단위 부피 당 퍼텐셜 에너지를 뜻한다. 실제 압력과는 인과 관계가 없다.

주압차의 부호는 A→B 방향이 **내려가는 방향**이면 양(+)으로 한다. 그림 4.6의 (가)에서 주압차를 계산해보면, A에서 B로 내려가는 주압차 $\Delta P_{AB} = \rho g h$이고 B에서 A로 올라가는 주압차 $\Delta P_{BA} = -\rho g h = -\Delta P_{AB}$이다. 마찬가지 방식으로 그림 4.6의 (나)에서 주압차를 계산해보면, A에서 B로 내려가는 주압차 $\Delta P_{AB} = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$이고 B에서 A로 올라가는 주압차 $\Delta P_{BA} = -(\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) = -\Delta P_{AB}$이다. (나)처럼 유체가 여럿 있는 경우에도 각 유체에서의 주압차를 더하여 총 주압차를 계산해주면 된다.

압력차 이론 - 운동 유체

정리 2-1 (수정된 파스칼 법칙)

기준 압력과 상관없이, 이어진 정지 유체의 두 점 사이의 정압차는 주압차와 같다.

즉, $P_B - P_A = \rho g h$이다.

수정된 파스칼 법칙에 의하면 각 점에서 압력의 값 자체는 기준 압력에 따라 달라질 수 있지만, 두 점 사이의 압력차는 항상 높이에 의해 결정된다. 여기서 기준 압력은 대기압이 될 수도 있고, 문제에 주어지지 않을 수도 있으나 신경 쓸 필요는 없다.

당연한 말이지만 정압차를 A에서 B로 계산했다면, 주압차도 A에서 B로 계산해야 한다. 정압차를 B에서 A로 계산했다면, 주압차도 B에서 A로 계산해야 한다. 압력차는 절댓값이 아니므로 부호를 꼼꼼히 따져주어야 하는 것에 주의하자.

정의 2-3 (동압차)

밀도가 ρ로 균일한 운동 유체 내의 점 A와 점 B에서 속력^2 차가 Δv^2일 때, A에서 B로의 동압차 $\Delta P = \frac{1}{2}\rho \Delta v^2$이다.

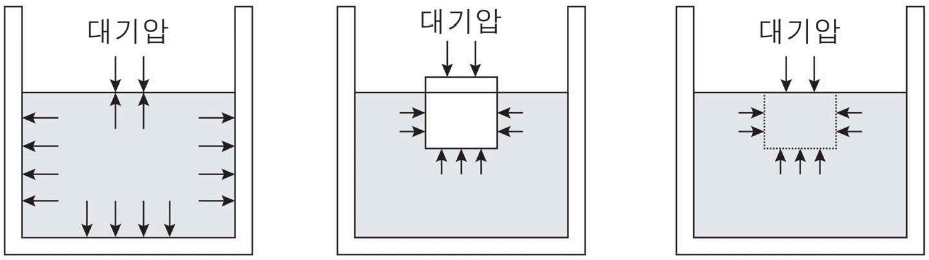
※ 고등학생들을 대상으로 하는 설명의 편의를 위해 임의로 만든 것이므로, 실제 유체역학에서의 의미와는 사뭇 다를 수 있다.

동압(動壓)은 운동 압력이라는 의미로, 운동하는 유체에서 속력^2 차에 의한 항, 혹은 단위 부피 당 운동 에너지를 뜻한다. 실제 압력과는 인과 관계가 없다.

동압차의 부호는 A→B 방향이 **느려지는 방향**이면 양(+)으로 한다. 그림 4.8의 (가)에서 동압차를 계산해보면, A→B 방향은 빨라지는 방향이므로 $\Delta P_{AB} = -\frac{3}{2}\rho v^2$이고 B→A 방향은 느려지는 방향이므로 $\Delta P_{BA} = \frac{3}{2}\rho v^2 = -\Delta P_{AB}$이다. 유체가 어느 쪽으로 운동하는지는 사실 아무런 의미가 없다. 압력이 높은 곳에서 낮은 곳으로 운동하는 것이 아니기 때문이다. (나)에서처럼 수직 방향으로 놓인 관에서 운동하는 유체도 있다. A→B 방향은 느려지는 방향이므로 $\Delta P_{AB} = \frac{3}{2}\rho v^2$이고, 반대로 B→A 방향은 빨라지는 방향이므로 $\Delta P_{BA} = -\frac{3}{2}\rho v^2 = -\Delta P_{AB}$이다. 이 경우에는 주압차도 계산할 수 있을 것이다. 주압차는 오로지 높이와 관련된 항이기 때문에 유체의 흐름 여부와는 아무런 관계가 없다.

유체에서의 힘

유체에 압력이 있다는 것은, 유체가 다른 대상과 힘을 주고받는다는 의미이다. 앞에서는 압력과 압력차에 대해 다루었다면, 지금부터는 압력과 압력차에 연관된 힘에 대해 다룰 것이다. 압력에 의한 힘은 수직항력이 되고, 압력차에 의한 힘은 부력이 된다. 또한, 운동 유체에서는 압력에 의한 힘에 의해 유선을 따라 흘러가면서 단위 부피 당 역학적 에너지의 변화가 일어난다.



(가) (나) (다)

그림 4.11: 수조에 담긴 유체의 압력

그림 4.11의 (가) ~ (다)는 수조에 담긴 유체가 압력을 작용하는 모습을 나타낸 것이다. 그림의 화살표는 압력 혹은 압력에 해당하는 힘을 나타낸다. 수조에 담긴 유체는 (가)에서처럼 수조 위아래와 양옆으로 힘($F = PS$)을 작용하는데, 그 크기는 유체의 압력(P)에 면적(S)을 곱한 것과 같다. 대기와의 경계면에서의 압력은 항상 P_0이지만 바닥에서의 압력 $P = P_0 + \rho gh$이므로 수위가 높을수록 바닥에서의 압력이 더 크다. 같은 수조에서 수위가 높다는 것은 유체를 많이 담았다는 의미인데, 이는 바닥이 유체를 떠받치는 힘의 크기 = 유체의 무게 + 대기압에 의한 힘이라는 사실로부터 알 수 있다.

(가)에 표시된 압력과 힘은 문제 풀이에 직접 쓰이지는 않더라도 왜 그렇게 되는지 이해해두고, 항상 작용하고 있음을 유념해야 한다. 수평면 위에서 운동하는 물체가 사실은 연직 방향으로 중력(무게)과 수직항력이 평형을 이루고 있는 것과 같은 맥락이다.

(나)는 유체에 물체를 띄웠을 때 유체가 물체에 작용하는 압력과 힘이다. 물체에 양옆으로 작용하는 압력은 그 크기가 같아 상쇄되므로 신경 쓰지 않아도 되지만, 윗면의 압력과 아랫면의 압력은 그 크기가 달라서 압력차에 의한 힘인 부력이 작용하게 된다. 이때 부력 B는 잠긴 부분의 부피가 V일 때, $B = \rho Vg$이다.

부력이 잠긴 부피와 비례 관계에 있는 것은 직접 물체의 아랫면에 작용하는 압력을 계산하여 증명해도 되지만, 그 작업은 어렵지도 않고 크게 중요하지 않으므로 직접 한번 해보면 된다. 그보다 중요한 것은 부력을 어떻게 이해하느냐이다. (다)는 (나)에서 물체가 차지하고 있는 공간을 그대로 유체로 바꾸어 나타낸 것이다. (나)와 (다)에서 화살표가 의미하는 바와 정량적인 값은 완전히 동일하다. 이는 당연한 것이, 유체가 외부에 작용하는 압력은 외부의 물질이 무엇인지와 아무 관련이 없기 때문이다. 유체의 일부를 점선으로 표시하고 그것을 외부라고 해도 아무 상관이 없다. 이 내용을 온전히 이해하고 있다면 부력을 자유자재로 다룰 수 있게 된다.

부력과 중력의 관계

부력과 중력이 항상 반대 방향으로 작용한다는 것, 그리고 밀도와 부피의 곱에 비례한다는 것에 착안하면, 부력을 음(-)의 무게로 생각할 수 있다. 아래 그림 4.13의 (가)~(다)는 물체가 유체보다 밀도가 낮은 경우($\rho_0 < \rho$)를, 그림 4.13의 (라)~(바)는 물체가 유체보다 밀도가 높은 경우($\rho_0 > \rho$)를 나타낸다.

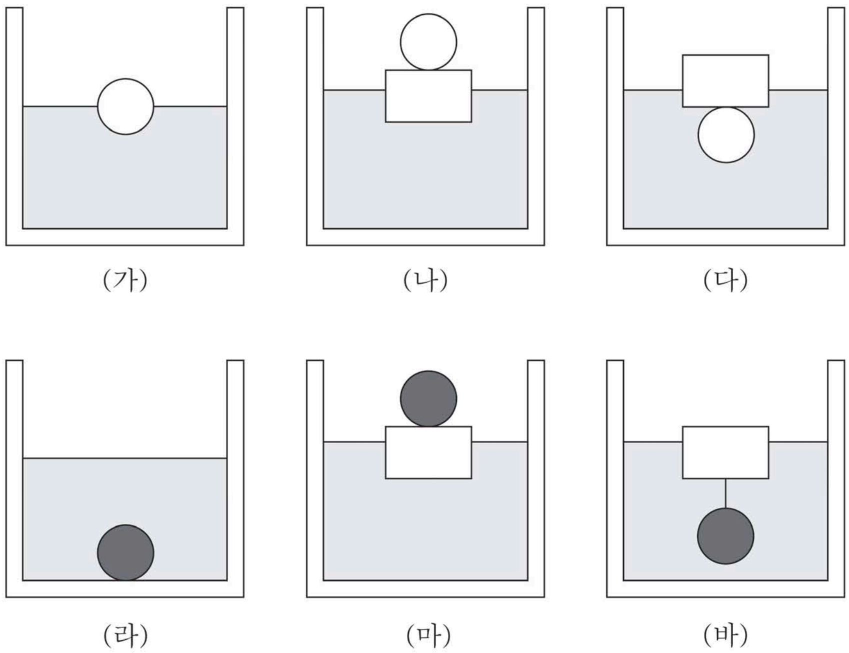


그림 4.13: 양성 부력과 음성 부력

(가)와 (라)는 다음 정리로부터 부력을 무게로 바꾸어 해석할 수 있다.

> **정리 4 (알짜 무게)**
> 유체에 잠긴 물체에 작용하는 알짜 무게 $W = mg - B$이다. 알짜 무게가 양(+)이면 가라앉고, 음(-)이면 떠오른다. 여기서 mg는 물체 무게, B는 부력의 크기이다.

쉽게 말해, 물체는 중력이 작용하는 만큼 무거워지고, 부력이 작용하는 만큼 가벼워진다. 중력과 부력 모두 밀도×부피×중력장의 꼴이기 때문이다. 중력은 물체의 밀도와 부피로부터 계산하고, 부력은 물체가 차지하고 있는 공간(잠긴 부피)에 대응하는 가상의 유체 밀도와 유체 부피로부터 계산한다.

(가)는 허공에 떠 정지해 있으므로 알짜 무게가 0인 상태이다. 만일 이 물체를 수조에 완전히 잠기게 밀어 넣었다면, $W = (m - \rho V)g < 0$이므로 위로 떠오를 것이다. 점차 떠오르면 물체의 잠긴 부피가 감소하면서, 물체의 알짜 무게가 증가하여 0이 된다.

수조의 깊이

그림 4.14는 밑면적이 S인 원통형 수조에 유체를 담고 물체를 띄울 때, 수조의 깊이가 어떻게 변하는지 설명한다. 아래쪽 실선은 처음 수면, 위쪽 실선은 나중 수면이다.

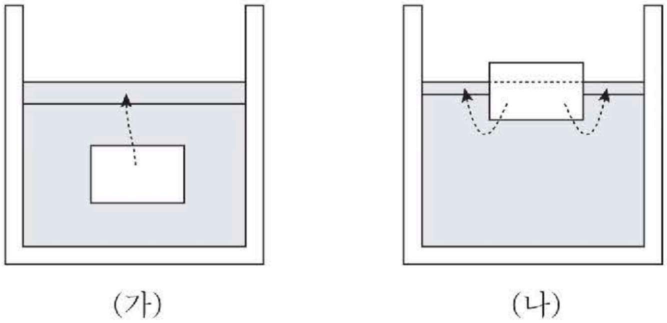


그림 4.14: 수조의 깊이 변화 1

(가)는 물체가 수조에 완전히 잠기는 경우이다. 물체는 항상 잠긴 부피만큼의 유체를 밀어내므로 그만큼의 유체가 위로 밀려 올라간다. 그림에서 수면에 그려진 실선은 각각 올라간 수면과 원래의 수면을 나타낸다. 그 사이에 해당하는 유체는 물체에 의해 밀려난 유체를 뜻한다. 물체의 부피(= 잠긴 부피)가 V라면 밀려 올라간 유체의 부피도 V이고, 수조의 밑면적이 S라면 수조의 깊이 증가량 $\Delta h = \frac{V}{S}$가 된다.

(나)는 물체가 수조에 일부만 잠기는 경우이다. 물체에 그려진 점선은 올라간 수면을 나타내는 보조선이다. (가)에서와 마찬가지로 물체는 항상 잠긴 부피만큼의 유체를 밀어내고, 밀려난 유체는 빈 공간을 채우게 된다. 물체가 유체에 잠긴 부피(= 점선 아래 부피)가 V라면 밀려 올라간 유체의 부피도 V이다. 잠긴 부피를 계산할 때는 반드시 올라간 수면을 기준으로 해야 한다. 원래의 수면을 기준으로 계산하면 아무런 물리적 의미가 없는 틀린 결과가 된다.

(나)에서 수조의 깊이 증가량을 구할 때, 수조의 밑면적과 물체의 밑면적을 동시에 고려해 문제를 푸는 학생은 거의 모두 원래의 수면을 기준으로 잠긴 부피를 계산하게 되어 틀린 답을 낸다. 그렇게 하지 말고 쉽게 풀어보자.

물체가 잠기건 말건 유체의 총 부피는 동일하다. 그렇다면 (나)에서 올라간 수면 아래 유체의 부피는 원래의 수면 아래로 유체만 담겨있을 때의 부피와 같다. 따라서 (나)에서 올라간 수면 아래 유체의 부피와 점선 아래 물체의 부피의 합은, 물체가 없을 때에 비해 V만큼 증가했다. 따라서 수조의 깊이 증가량 $\Delta h = \frac{V}{S}$가 된다.

그러므로 항상 물체가 얼마나 더 잠겨있는가만 확인하면 수조의 깊이 변화를 쉽게 판단할 수 있다. 또한, 물체가 얼마나 더 잠겨있는가는 사실 부력의 크기와 관련이 있다.

물체와 유체의 교환 (심화)

유압장치(압력)의 피스톤 위에 놓인 물체나, 수조(힘)에 떠 있는 물체는 유체로 바꾸어 해석할 수 있다. 우선 피스톤 위에 놓인 물체를 유체기둥으로 교환하는 법을 알아보자.

그림 4.18은 단면적이 S인 유리관에서 [피스톤 위에 놓인 질량 m인 물체]를 [밀도가 ρ이고 높이가 h인 유체기둥]으로 바꾸는 예시다.

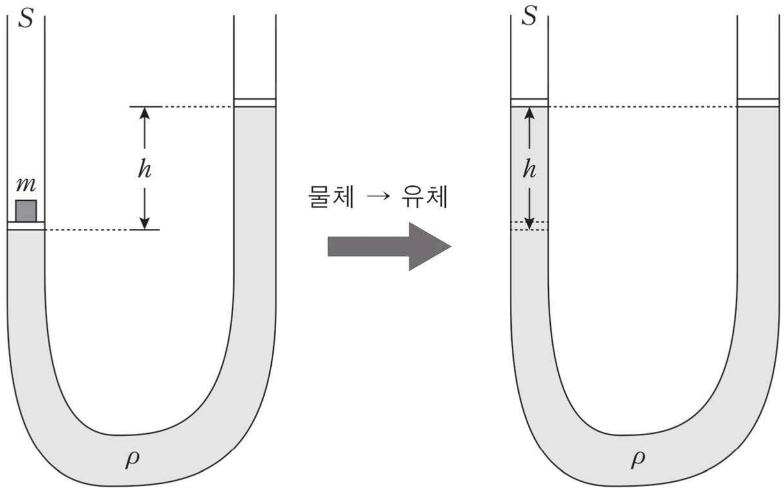


그림 4.18: 물체와 유체의 교환 1

변환하기 전 그림에서 오른쪽 위 피스톤에서 왼쪽 아래 피스톤으로의 압력차를 구하면, 정압차 $\Delta P = \dfrac{mg}{S} + P_0 - P_0 = \dfrac{mg}{S}$이고 주압차 $\Delta P = \rho g h$이므로, $m = \rho S h$를 얻는다.

정리 6-1 (물체와 유체의 교환 1)

단면적이 S인 피스톤 위에 놓인 질량 $m = \rho S h$인 물체는 밀도가 ρ이고 높이가 h인 유체기둥으로 바꾸어 생각할 수 있다.

이 정리에서 ρ나 h는 특정 값을 의미하지 않는다. 상황에 등장하는 유체의 밀도가 ρ_0일 때, 물체를 밀도가 $2\rho_0$이고 높이가 $\dfrac{1}{2}h_0$인 유체기둥으로 바꾸거나, 밀도가 $\dfrac{1}{2}\rho_0$이고 높이가 $2h_0$인 유체기둥으로 바꿀 수도 있다. 단순히 $m = \rho S h$만 성립하면 된다.

그림 4.19는 [수조에 떠 있는 물체]를 [물체가 밀어낸 만큼의 유체]로 바꾸는 예시다.

03 역학적평형

막대의 평형

4단원 역학 문제를 한 문장으로 나타내면, 평형 상태를 분석하는 것이라 할 수 있다. 평형 상태는 물체에 작용하는 모든 힘의 합력이 0인 상태를 뜻한다. 따라서 어떤 힘이 작용하는지를 파악하고, 그 합력이 0임을 이용하면 된다.

그런데 1단원에서와는 달리, 4단원에는 힘의 연장선인 **압력**(유체역학)과 **돌림힘**(역학적 평형)의 개념이 추가된 평형을 다루어야 한다. 그래서 비슷한 부분도, 다른 부분도 있다. 여기서는 힘의 평형에 돌림힘의 평형을 더한 역학적 평형을 다뤄보자.

역학적 평형

역학적 평형은 힘의 평형과 돌림힘의 평형을 모두 이룬 상태를 의미한다. 힘의 평형이 이루어지지 않으면 물체는 **가속도**가 생겨 **직선 운동**하게 되고, 돌림힘의 평형이 이루어지지 않으면 물체는 **각가속도**가 생겨 **회전 운동**하게 된다. 물리 I 에서는 역학적 평형이 깨진 상황은 다루지 않고 ①역학적 평형을 이룬 상황과 ②역학적 평형이 깨지는 경계의 상황을 다룬다. ②가 ①에 포함되기는 하지만, 문제를 보는 관점이 다르다.

물리 I 에서 역학적 평형 문제를 푸는 것은, 막대마다 힘의 평형 식과 돌림힘의 평형 식을 하나씩 세운 후 주어진 조건과 함께 연립하여 미지수를 알아내는 과정이다. 식으로 표현하면 다음과 같다.

> 정의 1 (역학적 평형)
> 막대가 힘의 평형($\Sigma F = 0$)과 돌림힘의 평형($\Sigma Fx = 0$)을 모두 이루고 있다면 역학적 평형 상태에 있다고 한다.

문제에서 주어지는 조건에는 수치가 주어지는 것(명시적)도 있고, 숨겨져 있는 것(암시적)도 있다. 암시적인 조건의 예를 들어보면 막대의 범위를 넘어서서 막대에 힘을 작용할 수 없다던가, 받침대가 막대를 잡아당기는 방향이나 실이 막대를 미는 방향으로 힘을 작용할 수 없다던가 하는 것들이다. 재미있게도 명시적인 조건은 등식이나 비례식의 형태로, 암시적인 조건은 부등식의 형태로 주어지는 것이 보통이다.

그런데 실제로 공식을 적용할 때에는 위의 정의를 그대로 쓰는 경우보다는 방향을 고려하여 쓰는 경우가 많다. 힘의 평형 식($\Sigma F = 0$)과 돌림힘의 평형 식($\Sigma Fx = 0$)을 연직 아래로 누르는 힘 W와 연직 위로 버티는 힘 N으로 분류하여 다시 쓰면 다음과 같다.

입력의 변환

그림 5.3의 (가), (나), (다)는 한 막대를 그와 동등한 다른 막대로 변환하여 해석하고자 할 때, W와 관련된 항을 변경시키는 3가지 주요 유형을 나타낸 것이다.

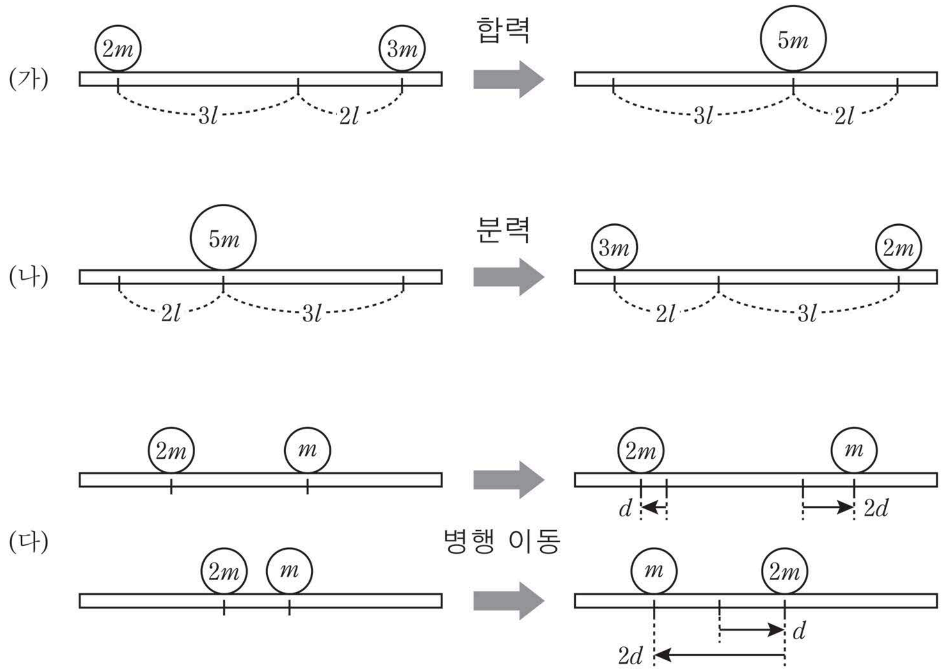


그림 5.3: 막대의 3가지 변환

그림 5.3의 (가)는 입력 W의 개수가 줄어드는 변환으로, **합력**을 구하는 유형이다. 두 힘을 더해 하나의 합력이 작용하는 것으로 바꾸어 생각한다는 뜻이다. 변환 전후에 두 힘의 합(의 크기)이 같고, 돌림힘의 합(의 크기)이 같다. 즉, 변환 전후 두 막대는 동등하다. 당연하지만 돌림힘의 값은 변환 전 후 같은 회전축을 잡아서 계산한 것이다. 같은 막대라고 해도 축에 따라 돌림힘의 값은 달라진다.

합력은 입력이 반드시 2개 있을 때만 적용할 수 있는 방법은 아니다. 예를 들어 막대를 누르는 힘이 3개, 4개 있더라도 2개씩 합쳐나가면 결국 하나의 합력으로 표현할 수 있다. 이는 평형 식 ΣWx의 형태가 '곱의 합'이기 때문이다. 이에 대한 (그리고 이후의 논의에 대한) 수학적 근거가 궁금한 사람은 선형대수학을 공부하도록 하자.

그림 5.4는 동등한 4개의 막대를 나타낸 것으로, 합력 계산을 어느 순서로 적용하든 서로 동등하다는 것을 잘 보여준다. 여기서 축은 $x=1$로 두는 것이 바람직하다. 그것이 힘이 작용하는 가장 끝 지점이기 때문이다. 물론 같은 맥락에서 $x=9$도 괜찮다.

합력의 목표는 작용점의 수를 줄이는 것이다. 여러 힘이 막대를 누르는 것보다는 하나의 힘이 막대를 누르는 것이 간단하기 때문이다. 문제 상황을 단순화하는 과정이 오히려 복잡하다면 굳이 합력을 사용할 이유가 없다. 다행히도 두 힘을 합력으로 나타내는 과정은 암산으로도 충분하다. 그림 5.4를 가지고 연습해보자.

입력과 출력 사이의 관계

평형은 입력 W와 출력 N이 이루는 것이다. 입력 W는 주로 무게를 가지고 있는 물체가 막대를 누르는 힘이며, 그 수에 제한이 없고 변환이 쉽지만 값은 고정되어 있다. 한편 출력 N은 주로 받침대나 실에 의한 버티는 힘이며, 값은 고정되어 있지 않지만 그 수에 제한이 있고 변환이 어렵다.

이처럼 출력은 입력과는 그 성격이 많이 다르기 때문에 가능한 경우의 수가 별로 없다. 막대에 출력을 가하는 받침대(혹은 실)의 개수에 따라 그림 5.9의 3가지 유형으로 분류할 수 있다.

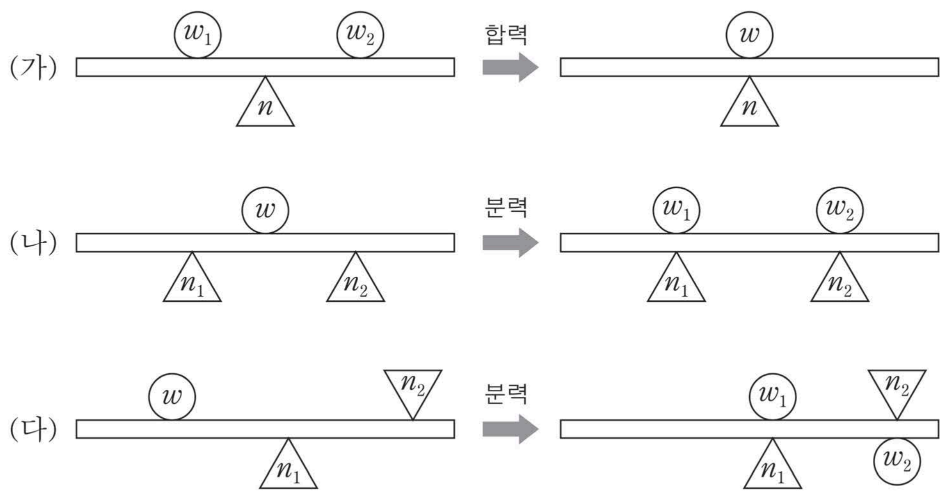


그림 5.9: 출력의 3가지 유형

그림 5.9의 (가)는 받침대가 1개 있는 경우이다. 이 경우 역학적 평형을 이루기 위해서는 $\Sigma W = n$, $\Sigma Wx = ny$를 만족시켜야 한다. 그런데 입력은 항상 합력을 구하여 단 하나의 항으로 정리할 수 있다. 그러면 이때 $w = n$, $wx = ny$가 되므로 정리하면 입력과 출력의 크기와 작용점이 일치한다.

사실 받침대가 하나인 막대가 평형을 이룬다면 반드시 입력의 합력이 출력과 일치한다는 조건은 역학적 평형 식과 동치이다. 따라서 합력의 (크기, 작용점)이 출력의 (크기, 작용점)과 동일하다는 등식을 세워 연립하면, 역학적 평형 문제가 풀리게 된다.

그림 5.9의 (나)는 받침대가 2개 있는 경우이다. 이 경우 역학적 평형을 이루기 위해서는
$\Sigma W = n_1 + n_2$, $\Sigma Wx = n_1 y_1 + n_2 y_2$를 만족시켜야 한다. 만일 입력의 합력을 구해 어디엔가 한 군데로 모은 다음, 그 합력의 분력을 구해 $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$가 되도록 하자.
그러면 $w_1 + w_2 = n_1 + n_2$, $w_1 y_1 + w_2 y_2 = n_1 y_1 + n_2 y_2$을 얻는다. 식을 잘 정리하면 $w_1 = n_1$, $w_2 = n_2$가 되므로 항상 <u>각 출력이 각 입력을 담당하는 모양새</u>가 된다. 따라서 받침대가 2개인 유형에서는 분력을 구해 각 받침대로 힘을 분산시켜주면 그것이 곧 수직항력이 되는 것이다.

막대의 중첩

동등한 두 막대는 세울 수 있는 식이 아예 동일한 관계를 갖는다. 그런데 동등하지 않은 두 막대 사이에도 모종의 관계가 있을 수 있다. 예를 들어 그림 5.12처럼, (나)는 (가)에 색칠된 물체가 하나 추가된 것을 제외하면 동일한 상황이다. 따라서 (나)는 (가)의 상황에 물체 하나가 있는 상황을 **중첩**한 것이라고 해석할 수 있다.

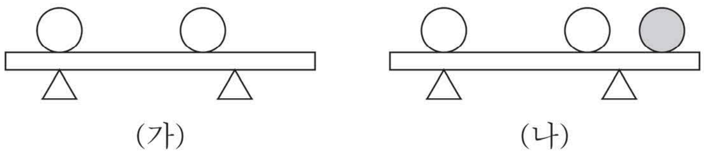


그림 5.12: 물체를 하나 더 올리는 중첩

> **정의 3 (막대의 중첩)**
> 막대 A: $(\Sigma W_A,\ \Sigma N_A,\ \Sigma W_A x_A,\ \Sigma N_A y)$와 막대 B: $(\Sigma W_B,\ \Sigma N_B,\ \Sigma W_B x_B,\ \Sigma N_B y)$의 중첩은 막대 A+B: $(\Sigma(W_A + W_B),\ \Sigma(N_A + N_B),\ \Sigma(W_A x_A + W_B x_B),\ \Sigma(N_A + N_B)y)$이다.

정의 3으로부터, 막대 A와 막대 B가 모두 역학적 평형을 이루고 있다면 막대 A+B도 역학적 평형을 이룬다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 각 항의 수치가 다를 수 있으므로 동등한 막대는 아니다. 막대의 중첩을 도식으로 설명하면 그림 5.13과 같다.

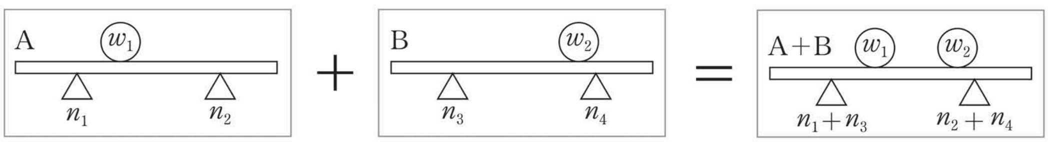


그림 5.13: 막대의 중첩

막대의 중첩으로부터 알 수 있는 것은 각각의 입력이 출력에 독립적으로 영향을 미친다는 것이다. A의 입력인 w_1에 의한 출력은 각각 n_1, n_2이고 w_2에 의한 출력은 각각 n_3, n_4이다. 따라서 입력이 $w_1 + w_2$인 A+B에서는 출력이 각각 $n_1 + n_2$, $n_3 + n_4$가 된다.

이를 경우에 따라 일반화해보면 다음과 같다.

> **정리 3-1 (입력에 따른 출력 1)**
> 입력 w_1에 의한 출력이 n_1이고 입력 w_2에 의한 출력이 n_2면, 입력 $w_1 + w_2$에 의한 출력은 $n_1 + n_2$이다.

무게 중심

정리 1-1, 1-2의 양변을 서로 나누어주면, 어떤 위치 $X = \frac{\Sigma Wx}{\Sigma W} \left(= \frac{\Sigma Ny}{\Sigma N} \right)$을 얻는다.

> 정의 4 (무게 중심)
>
> 위치 $X = \frac{\Sigma Wx}{\Sigma W}$를 무게 중심이라고 한다.

식을 조금 바꿔보면 $\Sigma Wx = (\Sigma W)X$라고 쓸 수 있는데, 이것은 (돌림힘의 합) = (힘의 합) × (무게 중심)이라는 의미다. 따라서 그림 5.14와 같이, 각각의 입력에 의한 돌림힘의 합은 모든 입력이 무게 중심에 모여 작용한다고 했을 때의 돌림힘과 같다.

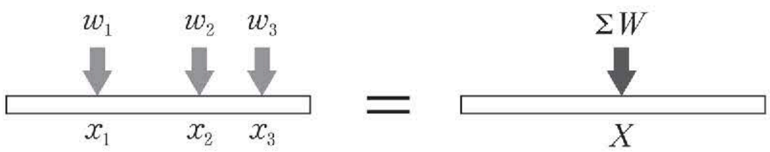


그림 5.15: 무게 중심

그런데 **무게 중심**은 모든 무게의 **합력의 작용점**과 같다. 따라서 막대 하나에 대한 무게 중심을 구하는 과정은 합력을 구하는 과정과 완전히 동일한 수식을 사용한다. 합력이나 분력에서 다루는 각각의 힘들이 모두 부분적인 무게 중심에 해당한다. 따라서 무게 중심을 여럿으로 쪼개는 것은, 결국 분력의 계산과 동일하다.

합력이나 분력, 병행 이동은 역학적 평형 상태를 일정하게 유지하면서 문제 상황을 바꾸어 푼다. 이들은 평형을 이루고 있는 어떤 막대의 상태로부터, 동등한 상태를 유도해 문제를 해결하는 방식이다. 따라서 하나의 고정된 상황을 풀어내는데 유리하다.

한편, 무게 중심은 구조물이 안정한 조건을 따지거나 계를 하나로 본다. 이는 평형을 유지할 수 있는 조건에 집중하여 문제를 해결하는 방식이다. 근본적으로 사용하는 수식의 기반은 동일하지만, 내력을 상쇄하여 막대 여럿을 한 막대로 보고 계산을 간단히 할 때나, 고정되지 않고 변화하는 상황에서 평형을 유지하는 조건을 파악하는데 유리하다.

무게 중심은 공식이 아니다. 생각하는 방식이다. 뒤이어 자세히 설명한다.

범위와 경계의 판단 (심화)

평형 상태를 유지하도록 하는 어떤 물리량(질량 또는 위치) θ의 최댓값, 최솟값, 범위를 구하는 방법에는 크게 두 가지 갈래가 있다.

첫째는 역학적 평형 식을 θ에 대한 식으로 나타낸 후, 출력의 조건(실은 물체를 밀 수 없고, 받침대는 물체를 당길 수 없음)으로부터 얻은 부등식을 연립하여 θ의 최댓값, 최솟값, 범위를 구한다. 이것이 가장 기본적인 방법으로, **범위를 구하는 방법**이다.

둘째는 경계가 되는 상황을 직관적으로 파악한 뒤, 그 특정 상황에 대한 값을 대입하여 θ의 최댓값, 최솟값, 범위를 구한다. 이것은 **경계를 구하는 방법**이다.

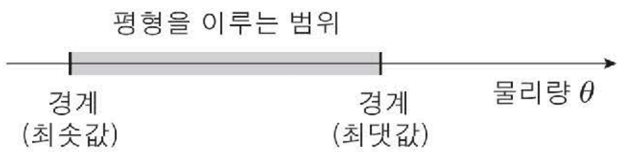


그림 5.20: 범위와 경계

→ 범위를 구하는 방법이란, 문제에 주어진 **평형 방정식**과 **제한 부등식**을 연립하여 θ에 대한 부등식 $\min(\theta) < \theta < \max(\theta)$로 정리하는 방법을 말한다. 여기서 평형 방정식이란 힘의 평형과 돌림힘의 평형 식을 말하는 것이고, 제한 부등식이란 받침대나 실, 혹은 문제에 주어진 조건들을 말하는 것이다.

[Case 1-1] 평형 방정식과 제한 부등식을 직접 연립

첫 번째 경우는 단순히 이를 연립하는 것이다. 평형 방정식으로부터 각 출력을 θ에 대한 식으로 나타낸 다음, 제한 부등식으로부터 출력에 θ에 대한 식을 대입한 후 부등식의 영역을 정리한다. 제한 부등식은 보통 $n \geq 0$ 꼴로 주어진다. 따라서 출력이 여럿일 때는 $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$ 같은 식으로 출력마다 제한 조건이 생기기 마련이다.

보통은 힘의 평형 식($n_1 + n_2 = W$)을 연립하여 $0 \leq n_1 \leq W$, $0 \leq n_2 \leq W$ 같은 식으로 나타내어 문제를 풀게 된다. 뒤에서 제한 조건이 $n \geq 0$라고 하는 것은 일반적인 경우를 설명하기 위함이고, 실전에서는 적당히 $0 \leq n \leq W$로 바꾸어 생각하면 된다.

[Case 1-2] 변화량의 평형 방정식과 제한 부등식을 연립

두 번째 경우는 막대의 중첩을 적용하는 것이다. 물리량 θ는 물체의 질량일 수도 있고, 물체의 위치일 수도 있다. 변하는 상황 A에서 그 물체(θ)만 빼내면 고정된 상황 B를 얻는다. B를 적당히 잘 풀어서 각 출력을 구한다. 이를 이용해서 C의 제한 부등식을 새로 만든다. B의 출력과 C의 출력을 합쳐서 A의 제한 조건을 만족하게 하면 된다.