

제 2 교시

수학 영역(B형)

출수형

5지선다형

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A - E$ 의 역행렬이 존재하지 않을 때, a 의 값은? (단, E 는 단위행렬이다.) [2점]
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(2n+7) - 6n^2}{n+4}$ 의 값은? [2점]
- ① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

3. 무리방정식 $\sqrt{x^2+1} = x^2 - 1$ 의 모든 실근의 곱은? [2점]
- ① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

4. $\sum_{n=1}^7 {}_nH_{7-n}$ 의 값은? [3점]
- ① 32 ② 48 ③ 64 ④ 80 ⑤ 96

5. 이차방정식 $5x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\sin\alpha, \sin\beta$ 일 때,
 $\cos(\alpha - \beta)$ 의 값은? (단, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ 이다.) [3점]

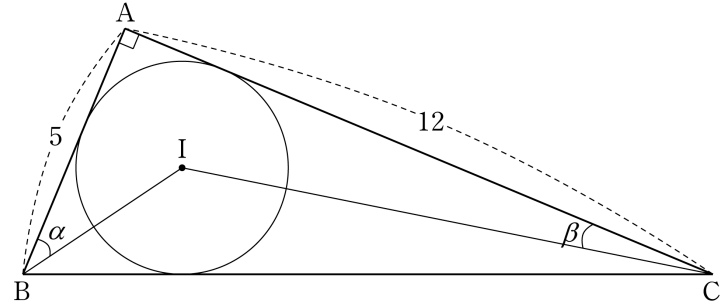
- ① $\frac{1 + \sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{1 + \sqrt{11}}{5}$ ③ $\frac{1 + 2\sqrt{3}}{5}$
 ④ $\frac{1 + \sqrt{14}}{5}$ ⑤ $\frac{1 + \sqrt{15}}{5}$

6. 좌표평면에서 일차변환 f 를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} a+1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때,
 f 에 의하여 직선 $5x - 2y = 0$ 이 옮겨지는 직선을 l 이라 하자.
 직선 $5x - 2y = 0$ 과 직선 l 이 서로 수직일 때, a 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{47}{14}$ ② $-\frac{45}{14}$ ③ $-\frac{43}{14}$ ④ $-\frac{41}{14}$ ⑤ $-\frac{39}{14}$

7. 그림과 같이 $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 12$ 이고 $\angle A = 90^\circ$ 인
 직각삼각형 ABC 에 내접하는 원의 중심을 I 라 하자.
 $\angle ABI = \alpha, \angle ACI = \beta$ 라 할 때, $\tan(\alpha - \beta)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{17}$ ② $\frac{4}{17}$ ③ $\frac{5}{17}$ ④ $\frac{6}{17}$ ⑤ $\frac{7}{17}$



8. 어느 학교 전체 학생 100명은 중국어와 일본어 중 어느 한 과목만 수업을 받고, 물리와 화학 중 어느 한 과목만 수업을 받는다고 한다. 중국어 수업을 받는 학생의 수는 64명이고, 물리 수업을 받는 학생 중 일본어 수업을 받는 학생의 수는 27명이다. 이 학교의 학생 중에서 임의로 택한 1명의 학생이 물리 수업을 받는 사건을 A 라 하고, 중국어 수업을 받는 사건을 B 라 하자. 두 사건 A 와 B 가 서로 독립일 때, 이 학교의 학생 중에서 화학 수업을 받는 학생의 수는? [3점]

- ① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

9. 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선이 쌍곡선 $ax^2 - 5y^2 = 5$ 와 오직 한 점에서 만나도록 하는 모든 a 의 값의 합은? [3점]

- ① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

10. 샤프심의 굵기를 x (mm), 샤프심의 진하기에 의하여 정해지는 상수를 k 라 할 때, 샤프심의 강도 s (N/m²)는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$s = (4^{5x} + a)(\log k + 0.1) \quad (\text{단, } a \text{는 상수이다.})$$

샤프심의 진하기에 의하여 정해지는 상수가 표와 같다.

진하기	k (상수)
B	1.26
HB	1.35

굵기가 0.3mm, 진하기가 B인 샤프심의 강도가 2N/m²일 때, 굵기가 0.5mm, 진하기가 HB인 샤프심의 강도(N/m²)는? (단, $\log 1.26 = 0.10$, $\log 1.35 = 0.13$ 으로 계산한다.) [3점]

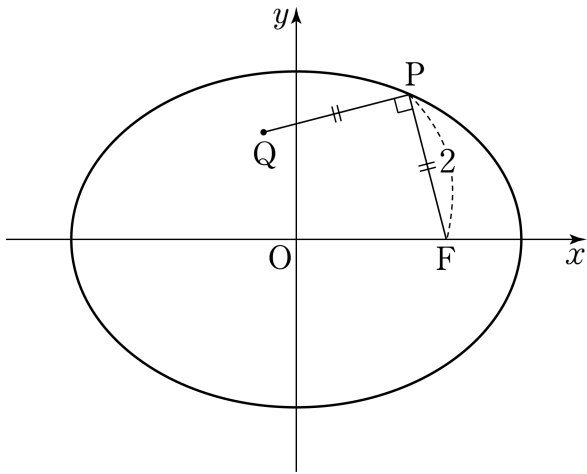
- ① 7.73 ② 7.76 ③ 7.79 ④ 7.82 ⑤ 7.85

11. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점 F, F' 과 이 타원 위의 점 P에 대하여 타원 내부의 점 Q를

$$\overline{PF} = \overline{PQ} = 2, \quad \angle FPQ = 90^\circ$$

가 되도록 잡을 때, 삼각형 PQF'의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2



12. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2, a_2 = 3$ 이고

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n + 2^n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 $\{a_n\}$ 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 2^n$$

이다. $b_n = a_{n+1} - a_n + 2^n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = 3b_n \quad (n \geq 1)$$

이고, $b_1 = 3$ 이므로

$$b_n = \boxed{\text{(가)}} \quad (n \geq 1)$$

이다. 따라서,

$$a_{n+1} - a_n = \boxed{\text{(가)}} - 2^n \quad (n \geq 1)$$

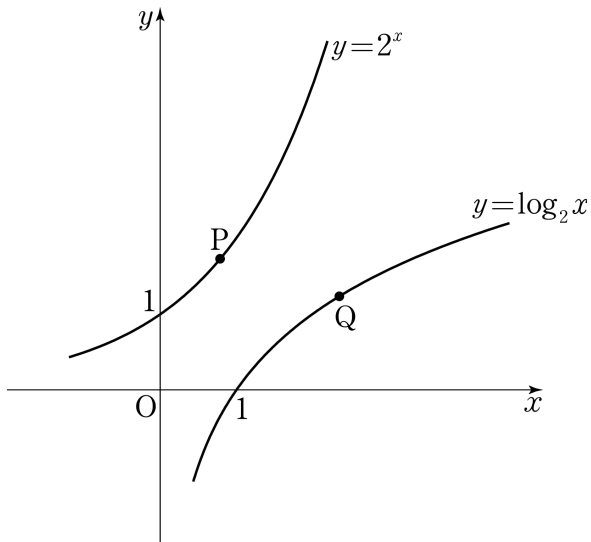
이고, $a_1 = 2$ 이므로

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $f(8) - 2g(8)$ 의 값은? [3점]

- ① 501 ② 507 ③ 513 ④ 519 ⑤ 525

[13~14] 곡선 $y=2^x$ 위의 점 P와 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 Q에 대하여 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 점 P의 y 좌표는? [3점]

- ① $\frac{1}{2} \ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $\frac{1}{2 \ln 2}$ ④ $\frac{1}{\ln 2}$ ⑤ $\frac{2}{\ln 2}$

14. 다음 조건을 만족시키는 점 P의 x 좌표를 a , 점 Q의 x 좌표를 b 라 할 때, 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [4점]

(가) 점 P의 x 좌표와 점 Q의 x 좌표가 정수이다.
 (나) $\overline{PQ} \leq 4$

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

15. 어느 대학교 학생의 운전면허 소지자와 미소지자의 비율은 5:3이고, 운전면허 소지자 중 1종 면허 소지자와 2종 면허 소지자의 비율은 2:3이다.

이 대학교 학생 192명을 임의추출할 때, 1종 면허 소지자가 57명 이하일 확률을 오른쪽

표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 운전면허 소지자는 1종 면허와 2종 면허 중 하나만 가지고 있다.) [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599

- ① 0.6056 ② 0.8276 ③ 0.8944
 ④ 0.9332 ⑤ 0.9599

16. 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 나온 모든 눈의 수의 곱이 4의 배수일 확률은? [4점]

- ① $\frac{29}{48}$ ② $\frac{31}{48}$ ③ $\frac{11}{16}$ ④ $\frac{35}{48}$ ⑤ $\frac{37}{48}$

17. 이차정사각행렬 X 와 자연수 k 에 대하여 집합 S_k 가

$$S_k = \left\{ X^n \mid X = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, n \text{은 자연수} \right\}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \in S_k$

ㄴ. $A \in S_4$ 이면 $A \in S_2$ 이다.

ㄷ. $3^{10}E \in S_k$ 를 만족시키는 k 의 개수는 4이다.
(단, E 는 단위행렬이다.)

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC에 대하여

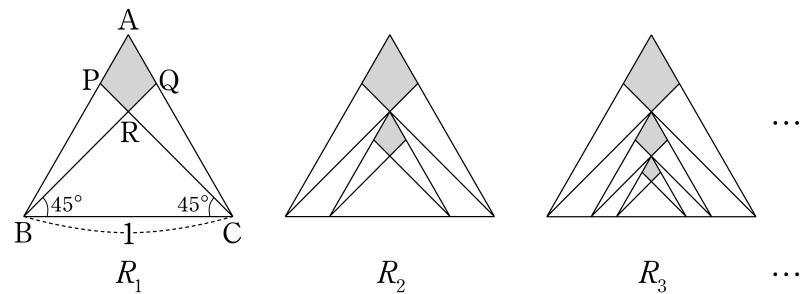
$\angle BCP = 45^\circ$ 를 만족시키는 선분 AB 위의 점 P와
 $\angle CBQ = 45^\circ$ 를 만족시키는 선분 AC 위의 점 Q가 있다.

선분 BQ와 선분 CP가 만나는 점을 R이라 할 때,
 사각형 APRQ를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 BC 위의 두 점과 점 R을 꼭짓점으로 하는
 정삼각형에 대하여 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로
 만들어지는 사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에서 선분 BC 위의 두 점과 그림 R_2 에서 얻은
 사각형의 꼭짓점 중 선분 BC와 가장 가까운 점을 꼭짓점으로
 하는 정삼각형에 대하여 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로
 만들어지는 사각형을 색칠하여 얻은 그림을 R_3 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어
 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{9\sqrt{3}-15}{8}$ ② $\frac{10\sqrt{3}-15}{8}$ ③ $\frac{12\sqrt{3}-15}{8}$
 ④ $\frac{9\sqrt{3}-15}{4}$ ⑤ $\frac{12\sqrt{3}-15}{4}$

19. 두 곡선

$$y = xe^x + \frac{3}{e^x}, \quad y = 3e^x + \frac{x}{e^x}$$

로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

- ① $e^3 - \frac{1}{e^3} - 6$ ② $e^3 + \frac{1}{e^3} - 6$ ③ $e^3 - \frac{1}{e^3} - 4$
 ④ $e^3 - \frac{1}{e^3} + 4$ ⑤ $e^3 - \frac{1}{e^3} + 6$

20. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 다음 표는 x 의 값에 따른 $f(x), f(x)-g(x)$ 의 변화를 나타낸 것이다.

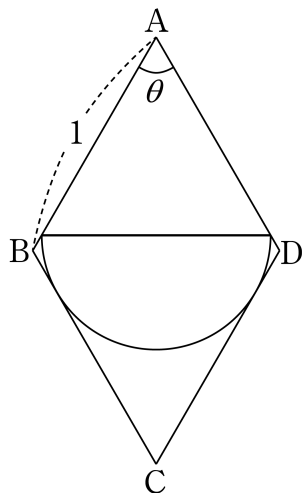
x	$x < 4$	$x = 4$	$4 < x < 7$	$x = 7$	$x > 7$
$f(x)$	+	0	-	0	-
$f(x) - g(x)$	-	0	+		

부등식 $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} \leq f(x)$ 를 만족시키는 자연수 x 의 개수는?

[4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 1이고 $\angle A = \theta$ 인 마름모 ABCD가 있다. 선분 BC와 선분 CD에 접하고 선분 AB 위의 점과 선분 AD 위의 점을 지름의 양 끝점으로 하는 반원의 지름의 길이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{BD} - f(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은?
 (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [4점]



- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

단답형

22. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{5x}} = a$ 이다. $60 \ln a$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 일차변환 $f: (x, y) \rightarrow (2y, -x)$ 를 나타내는 행렬을 A라 하자. 행렬 A^4 으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 (3, 5)가 점 (a, b)로 옮겨진다. $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에서 y 축과 평행하고 점 $(0, 0, 2)$ 를 지나는 평면이 구 $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ 와 한 점에서 만날 때, 원점과 이 평면 사이의 거리를 d 라 하자. $100d$ 의 값을 구하시오. [3점]

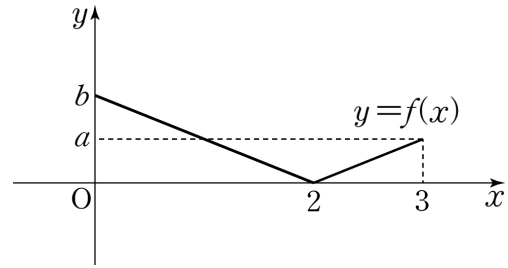
25. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(1) = 0$
 (나) 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기는 $3x^2 + 1$ 이다.

$f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - a}{x} = b$ 이다.

$4(a^2 + b^2)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

26. 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$P(1 \leq X \leq 2) = P(2 \leq X \leq 3)$ 일 때, $E(15X)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

27. 좌표공간 위의 점 $P(3, 2, 1)$ 에서 x 축, y 축, z 축에 내린 수선의 발이 각각 A, B, C 이다. 삼각형 ABC 의 둘레 위의 점 Q 에 대하여 선분 PQ 의 길이의 최솟값은 a 이다. $13a^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 7$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1 & (a_n \geq 0) \\ a_n + k & (a_n < 0) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{16} = a_{23}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값을 구하시오.
(단, k 는 자연수이다.) [4점]

29. 그림과 같이 평면 α 위에 있는 직각이등변삼각형 ABC와 평면 α 위에 있지 않은 직각이등변삼각형 DEF에 대하여 점 D에서 평면 α 위에 내린 수선의 발이 점 A이고,

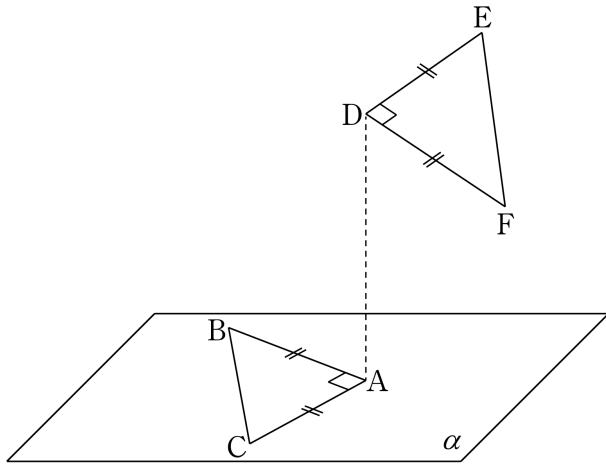
$$\overline{BC} = \overline{EF} = \sqrt{2}, \quad \angle A = \angle D = 90^\circ$$

이다. 두 점 E, F에서 평면 α 위에 내린 수선의 발을 각각 점 P, Q라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\angle QAC = 90^\circ$
- (나) 삼각형 APQ는 정삼각형이고, 삼각형 ABC와 점 A에서만 만난다.

$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CE} = \frac{p + \sqrt{q}}{6}$ 일 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]



30. 이차함수 $f(x) = x^2 - ax$ 와 실수 t 에 대하여 좌표평면에서 중심이 $(t, f(t))$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원이 있다. 이 원 위의 점 Q에 대하여 선분 OQ의 길이의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자. $g(t)$ 가 두 점에서만 미분가능하지 않을 때, $a^2 + 4r^2$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 r 은 양의 상수이고, O는 원점이다.) [4점]

- * 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.