

제 2 교 시

2019학년도 Orbis Optimus 모의고사 1회 문제지

수학 영역 (가형)

홀수형

성명		수험번호	—
----	--	------	-------	-------	-------	---	-------	-------	-------

- 자신이 선택한 유형 ('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.
 - 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
 - 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

가진 것이 꿈뿐이라 내 꿈을 그대 발밑에 깔았습니다
 - 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
 - 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
 - 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
 - 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

* 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

17. 좌표평면 위의 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 한 점 (m, n) 에서 네 점 $(m+1, n), (m-1, n), (m, n+1), (m, n-1)$ 중 한 점으로 이동하는 것을 워킹이라 하자. 점 $(0, 0)$ 에서 출발하여 워킹을 네 번 반복하여 이동하는 모든 경우 중에서 임의로 한 경우를 선택할 때, x 좌표와 y 좌표의 차를 확률변수 X 라 하자. 다음은 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 를 구하는 과정이다. (단, 각 경우가 선택되는 확률은 동일하다.)

워킹을 네 번 반복하여 이동하는 모든 경우의 수는

(가) 이다.

또한 확률변수 X 가 가지는 값은 $k, k-2, k-4$ 이다.

$$P(X=k) = \frac{\boxed{\text{(나)}}}{\boxed{\text{(가)}}}$$

$$P(X=k-4) = \frac{96}{\boxed{\text{(가)}}}$$

이므로

$$P(X=k-2) = 1 - \frac{\boxed{\text{(나)}} + 96}{\boxed{\text{(가)}}}$$

이다.

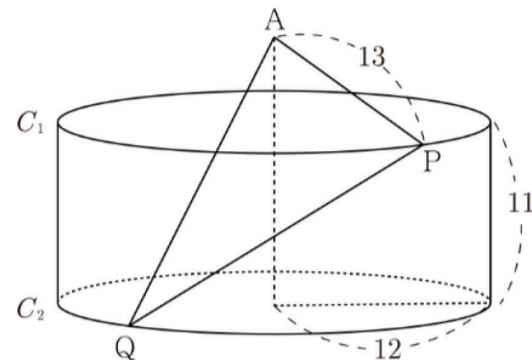
따라서 $E(X) = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c 라 할 때,

$\frac{ac}{bk}$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [4점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

18. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 12이고 높이가 11인 원기둥의 두 밑면 C_1, C_2 의 둘레 위를 움직이는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 원 C_1, C_2 의 중심을 이은 직선 위에 있고 원기둥 밖에 있는 한 점 A에 대하여 $\overline{AP} = 13$ 일 때, 삼각형 APQ의 넓이의 최댓값과 최솟값의 차는?
- (단, 점 A는 점 Q보다 점 P와 더 가깝다.) [4점]



- ① 76 ② 72 ③ 68 ④ 64 ⑤ 60

19. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

$g(x) = \frac{e^x}{f(x)}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = 9$

(나) 함수 $g(x)$ 는 $x = \alpha$ ($\alpha > 0$)에서만 극값을 가진다.

$g(\alpha)$ 의 값은? [4점]

$$\textcircled{1} \frac{e^6}{4} \quad \textcircled{2} \frac{1}{2e} \quad \textcircled{3} \frac{e^6}{3} \quad \textcircled{4} \frac{1}{4e} \quad \textcircled{5} \frac{e^6}{2}$$

20. 양수 x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$)에 대하여 두 점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 를 초점으로 하고 점 $A_i(x_i, y_i)$ 을 지나는 쌍곡선 C_i 의 점근선 중 기울기가 양수인 점근선의 기울기를 m_i 라 하자.

$$0 < x_1 < x_2 = x_3 < c, \quad 0 < y_2 < y_1 = y_3$$

일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. 쌍곡선 C_3 의 주축은 쌍곡선 C_1 의 주축보다 길다.

ㄴ. $a > b > 0$ 일 때, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 모든 점은
영역 $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} > 1 \right\}$ 에 포함된다.
ㄷ. $m_2 m_3 = 1$ 이면 $1 < m_1$ 이다.

- | | | |
|-----------------------------------|---|------------------------------|
| $\textcircled{1} \cup$ | $\textcircled{2} \sqsubset$ | $\textcircled{3} \neg, \cup$ |
| $\textcircled{4} \neg, \sqsubset$ | $\textcircled{5} \neg, \cup, \sqsubset$ | |

21. $0 < k < 4$ 인 상수 k 와 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $f(e^{f(x)})$ 는 $x = 0, x = k, x = 4$ 에서 최대 또는 최소가 된다. $f'(1)$ 의 최솟값이 m 일 때, $k \times m$ 의 값은? [4점]

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

단답형

22. 두 곡선 $y = 2^{x-6} + a$, $y = \log_2(x-b) + 4$ 의 점근선 사이의 교점이 $(4, 6)$ 일 때, ab 의 값을 구하시오. [3점]

23. $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6$ 의 전개식에서 상수항을 구하시오. [3점]

2019학년도 Orbis Optimus 모의고사 6회 문제지

수학 영역 (가형)

홀수형

성명		수험번호		—				
----	--	------	--	---	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형 ('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.
생각만 해도 참 좋은 당신
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

17. 실수 a 에 대하여 삼차함수 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}a^2x^2 + 7ax - 10$ 과 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f''(2) = 0$
 (나) 모든 실수 t 에 대하여 $f(g(t)) = g(t) + t$

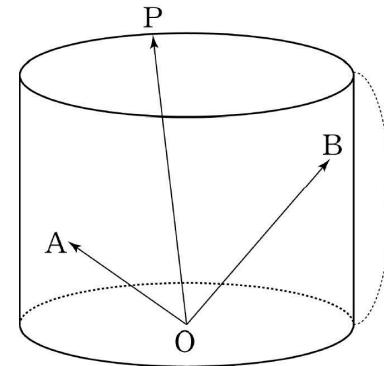
$g'(-2) + g'(0)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

18. 높이가 3cm 이고 밑면의 반지름의 길이가 2cm 인 원기둥이 있다. 원기둥의 옆면 위의 두 점 A, B와 한 밑면의 중심 O, 또 다른 밑면의 둘레 위의 점 P에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$$

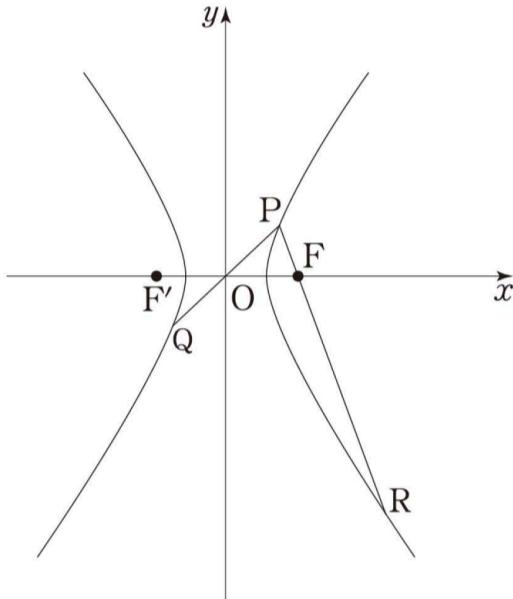
일 때, $|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}|$ 의 값은? [4점]



- ① $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ② $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ ③ $\sqrt{7} + 2$
 ④ $\sqrt{6} + 2$ ⑤ $\sqrt{5} + 2$

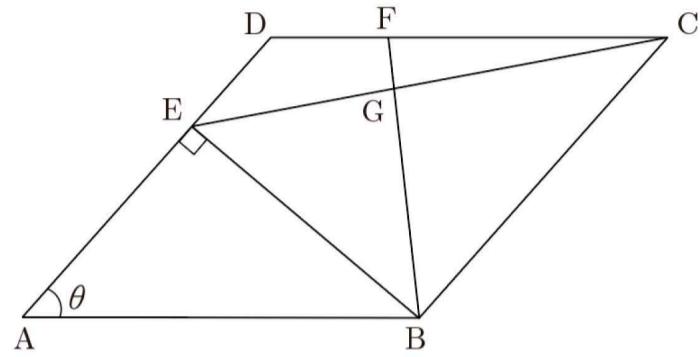
19. 그림과 같이 두 점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ ($c > 0$)을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 있다. 쌍곡선의 제1사분면 위의 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 직선 PF가 쌍곡선과 제4사분면에서 만나는 점을 R라 하자.
- $\overline{PQ} = \overline{FF'}, \quad \overline{PF} = 5, \quad \overline{QR} = 5\sqrt{5}$

일 때, b^2 의 값은? [4점]



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 E라 하자. $\angle ABE = \angle EBF$ 을 만족시키는 선분 CD 위의 점 F에 대하여 선분 BF와 선분 CE 사이의 교점을 G라 하자. $\angle BAE = \theta$ 일 때, <보기> 중 옳은 것만을 있는대로 고른 것은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [4점]



<보기>

- ㄱ. 삼각형 CBF는 이등변삼각형이다.
- ㄴ. $\tan(\angle BCE) = \sin\theta$
- ㄷ. 삼각형 BCG의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때,
 $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{1}{4}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. $f''(x) = 6x - 3a^2$ 이므로 (가) 조건에 의하여 $a = \pm 2$ 이다.

$a = -2$, $f(x) = x^3 - 6x^2 - 14x - 10$ 일 때,

(나) 조건에 의하여 $g(t)$ 은 $f(x) = x + t$ 의 실근인즉, t 값에 따라
이 방정식의 근이 최대 3개 까지 가능하다.
즉, 어떤 t 에 대하여 $g(t)$ 로 가능한 후보가 3개란 것이다.
이렇게 $g(t)$ 로 가능한 값이 여러 개인 경우 $g(t)$ 를 그 값 중 하나
골라 선택하면 되지 않냐고 할 수 있지만, 그럴 경우 연속성이
깨지고 (그 경계점은 $f(x)$ 와 $x + t$ 가 접할 때의 t 값.)
이는 $g(t)$ 가 미분가능한 함수라는 조건에 모순이다.

따라서 $a = 2$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 10$ 이다.

$f(g(t)) = g(t) + t$ 로부터 $f'(g(t))g'(t) = g'(t) + 1$ 이고, $g'(-2)$ 와
 $g'(0)$ 을 구하려면 $g(-2)$, $g(0)$ 의 값이 필요하므로 구해보자.

$t = -2$ 일 때, $f(x) = x - 2$ 의 실근이 $g(-2)$ 이고, 구해보면
 $g(-2) = 1$ 이다. 따라서 $g'(-2) = \frac{1}{4}$.

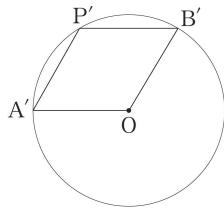
$t = 0$ 일 때, $f(x) = x$ 의 실근이 $g(0)$ 이고, 구해보면 $g(0) = 2$
이다. 따라서 $g'(0) = 1$.

따라서 $g'(-2) + g'(0) = \frac{5}{4}$.

18. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = \sqrt{13}$, $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = \sqrt{13}$ 으로
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 이다.

점 P에서 원기둥의 점 O를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을
P', 두 점 A, B에서 이 밑면에 내린 수선의 발을 A', B'이라
하자. 조건 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 를 만족시키려면 세 점 A', B', P'의
위치는 다음과 같다.

($\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OP'}$ 을 만족시켜야 하므로 사각형 OA'B'P'이 평행
사변형이고, $|\overrightarrow{A'B'}| = 2 \times \sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$ 임을 알 수 있다.)



원기둥의 밑면과 수직인 벡터 성분만 본다면, $\vec{A'A} + \vec{B'B} = \vec{P'P}$ 이다. $|\vec{A'A}| = a$, $|\vec{B'B}| = b$ 라 하면 $a+b=3$ 이고, $|\vec{A'B'}|=2\sqrt{3}$ 이므로 $|b-a|=1$ 이다. 그럼에서 나타내어진 것과 같아 $a=1$, $b=2$ 이다. 따라서 $|\vec{OA}|$ 의 값은 $\sqrt{5}$, $|\vec{OB}|$ 의 값은 $2\sqrt{2}$ 이고 정답은 $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$ 이다.
($b=1 < a=2$ 라 해도 정답인 $|\vec{OA}| + |\vec{OB}|$ 의 값은 같다.)

19. $\overline{PQ} = \overline{FF'}$ 이므로 중심이 원점 O이고, 지름의 길이가

$\overline{FF'} = \overline{PQ}$ 인 원을 그릴 수 있다. 이때, $\overline{PF'} = \overline{QF}$ 이다.

또, 원의 성질에 의하여 $\angle PFQ = \frac{\pi}{2}$ 이다. 이를 통해 삼각형

FQR 는 $\angle QFR = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형임을 알 수 있다.

$\overline{QR} = 5\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{RF} = 10$ 이다. 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{RF} - \overline{RF'} = 2a$ 에서 $\overline{RF'} = 2a + 10$ 이다.

삼각형 PFR 또한 $\angle F'PR = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$\overline{PR} = 15 - 2a$, $\overline{RF'} = 2a + 10$, $\overline{PF'} = 5$ 에서 피타고拉斯 정리를

이용하면 $a = \frac{3}{2}$ 를 구할 수 있다.

$\overline{FF'} = \sqrt{29}$ 이므로 $b^2 = 5$ 이다.

20.

ㄱ.

마름모의 성질에 의하여 $\angle BCD = \theta$, $\angle ABC = \pi - \theta$ 이고

직각삼각형 ABE에서 $\angle ABE = \frac{\pi}{2} - \theta$ 임을 알 수 있다.

$\angle ABE = \angle EBF$ 이므로 $\angle EBF = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

$\angle ABC = \angle ABE + \angle EBF + \angle FBC = \pi - \theta$ 에서 $\angle FBC = \theta$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\angle BCD = \theta = \angle FBC$ 이므로 삼각형 FBC는 이등변삼각형이다. (참)

ㄴ.

마름모의 성질에 의하여 두 선분 AD, BC는 평행하므로 $\angle CBE$ 는 $\angle AEB$ 와 같은 직각이 된다.

직각삼각형 CBE에서 $\overline{BE} = \tan(\angle BCE)$, 직각삼각형 ABE에서 $\overline{BE} = \sin(\angle BAE) = \sin\theta$ 이므로 $\tan(\angle BCE) = \sin\theta$. (참)

ㄷ.

삼각형 BCG의 세 변 중 변 BC의 길이를 1로 알고 있으므로, 높이인 선분 GH (H는 점 G에서 선분 BC에 내린 수선의 발)의 길이 h 를 구하면 넓이 $S(\theta)$ 를 구할 수 있다.

ㄱ.을 통해 $\angle FBC = \theta$ 임을 알아냈으므로 선분 BH의 길이는 $\frac{h}{\tan\theta}$ 임을 알 수 있고, 선분 HC의 길이는 $\frac{h}{\tan(\angle BCE)} = \frac{h}{\sin\theta}$ (\because 보기 ㄴ.) 임을 알 수 있다.

두 선분 BH, HC의 길이의 합은 선분 BC의 길이인 1과

같으므로 $\left(\frac{1}{\tan\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)h = 1$ 임을 알 수 있다.

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \times 1 \times h}{\theta} = \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{h}{\theta} = \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\theta}{\tan\theta} + \frac{\theta}{\sin\theta}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. (참)