제 2 교시

수학 영역 (가형)

홀수형

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\cos x}$의 값은? [2점]

① 2　② $\frac{3}{2}$　③ 1　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 0

3. 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{V}(X)=4$일 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값은? [2점]

① 8　② 7　③ 6　④ 5　⑤ 4

4. 좌표공간에 있는 두 점 $\mathrm{A}(3,6,0)$, $\mathrm{B}(0,-3,3)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{C}(a,b,c)$라 할 때, $a+b+c$의 값은? [3점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

5. 곡선 $y=2^x+a$와 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표가 3일 때, 곡선 $y=2^x+a$와 직선 $y=12$가 만나는 점의 x좌표는? [3점]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

6. 주사위 두 개를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 합이 10 이하일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{31}{36}$ ③ $\frac{8}{9}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

7. 함수 $f(x)=\cos x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

8. 두 벡터 $\vec{a}=(4,1)$, $\vec{b}=(2,0)$에 대하여 두 벡터 $2\vec{a}-t\vec{b}$ 와 $\vec{b}$가 서로 수직일 때, 상수 t의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

9. $\int_{1}^{\sqrt{e}} x\ln x dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ⑤ 1

10. 좌표공간에 있는 점 $(2,2,0)$을 중심으로 하고 직선 $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z-2}{2}$ 와 접하는 구가 있다.
이 구의 반지름의 길이는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서

$$\{f(x)\}^2 = e^{3x} + x^2 \ , \quad g(x) = f\left(\int_0^x f(t)dt\right)$$

를 만족시킬 때, $g'(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

12. 좌표평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\angle \mathrm{BAC} = \frac{\pi}{4}$이다. 직선 AB의 기울기가 2일 때, 직선 AC의 기울기가 될 수 있는 두 값 중 더 큰 값은? [3점]

① -9 ② -3 ③ -1 ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

13. 좌표평면에 있는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$에서 그은 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하자.
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{0}$을 만족시키는 점 B와 점 $\mathrm{C}(1, 0)$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

14. 두 점 F, F′을 초점으로 갖는 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{OH}}>\overline{\mathrm{OF}}$이고, 두 삼각형 PFH, PF′H의 둘레의 길이의 차가 10일 때, 쌍곡선의 점근선과 점 F 사이의 거리는 l이다. l^2의 값은?
(단, 두 점 P, F의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

15. x축과 평행한 직선과 곡선 $y=\sin(ax)$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{a}\right)$이 만나서 생기는 두 점을 각각 A, B라 하자. x축 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 한 변의 길이가 1인 정삼각형일 때, 상수 a의 값은? (단, $0 < a \le \pi$ 이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

16. 같은 종류의 콜라 10병과 같은 종류의 사이다 7병을 5명의 학생들에게 다음 조건을 만족시키도록 모두 나누어 주는 방법의 수는? (단, 콜라 1병과 사이다 1병의 용량은 같다.) [4점]

(가) 모든 학생들은 콜라를 사이다보다 적게 받을 수 없다.
(나) 모든 학생들은 사이다를 반드시 받아야 한다.

① 450 ② 475 ③ 500 ④ 525 ⑤ 550

17. 어느 나라의 국민 전체를 대상으로 조사한 생활만족지수 X는 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$ 인 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(|X| \geq m) = \frac{1}{2} + \mathrm{P}(X \geq 60)$$

을 만족시킨다.

이 나라의 국민 중에서 16명을 임의 추출하여 조사한 생활만족지수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \leq 25)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m > 0$) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.1587 ③ 0.6915 ④ 0.8413 ⑤ 0.9772

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x) = \begin{cases} -xe^{-x} & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

곡선 $y = g(x)$의 변곡점이 존재할 때, 곡선 $y = g(x)$의 변곡점의 개수는 n 이고 모든 변곡점의 x좌표 값의 합은 1이다. $f(n)$의 값은? [4점]

① -12 ② -9 ③ -6 ④ -3 ⑤ -0

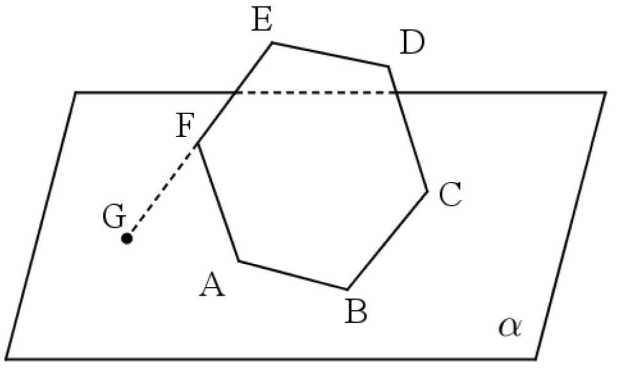
19. 상자에 12개의 공이 들어있고 각 공에는 1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적혀있다.
상자에서 하나의 공을 뽑아 공에 적힌 숫자를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 두 번 할 때, 첫 시행에서 확인한 숫자를 a, 다음 시행에서 확인한 숫자를 b라 하자.
$7 \le n \le 12$인 자연수 n에 대하여 $a+b \le n$일 때 $ab<6$ 일 확률을 p_n이라 하자. 다음은 $\sum_{k=7}^{12} p_k$의 값을 구하는 과정이다.

> $ab<6$을 만족시키는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값은 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.
> 따라서 $n \ge 7$일 때 $ab<6$를 만족시키는 a, b는 $a+b \le n$도 항상 만족시킨다.
>
> $a+b \le n$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 음이 아닌 정수 c에 대하여 $a+b+c=n$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 같고, 이러한 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.
>
> 따라서 $p_n = \boxed{\text{(다)}}$ 이고 $\sum_{k=7}^{12} p_k = \frac{5}{3}$이다.

위의 (가)에 알맞은 숫자를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(2p) \times g(p)$의 값은? [4점]

① 44 ② 40 ③ 36 ④ 32 ⑤ 28

20. 그림과 같이 길이가 2이고 평면 α 위에 있는 선분 AB를 한 변으로 갖는 정육각형 ABCDEF가 있다.
직선 AF와 평면 α 사이의 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이고 직선 EF가 평면 α와 만나서 생기는 점을 G라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\overline{FG}=2$
ㄴ. 삼각형 AFG의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{2}$이다.
ㄷ. 평면 α 위의 점 P가 $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{GF}=0$을 만족시킬 때, $\overline{AP}$의 최솟값은 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 정수 n과 $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=(\ln x)^3-3|\ln x-n|$에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근이 3개가 되도록 하는 정수 k의 개수를 $g(n)$이라 하자.
$\sum_{m=1}^{20} g(m-10)$의 값은? [4점]

① 30 ② 28 ③ 26 ④ 24 ⑤ 22

단답형

22. $(ax+2)^4$의 전개식에서 x^3의 계수가 64일 때, 자연수 a의 값을 구하시오. [3점]

23. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에서 x축에 접할 때, 함수 $g(x)=e^{-x}f(x)+3x$에 대하여 $g'(0)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 사건 A, B 에 대하여 $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{3}$ 일 때, $45 \times \mathrm{P}(A^C \cap B)$의 값을 구하시오. (단, A^C는 A의 여사건이다.) [3점]

25. 함수 $y = f(x)$를 매개변수 t $(t > 0)$로 나타내면

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = e^t \ln t \end{cases}$$

이다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{q}{p}e$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

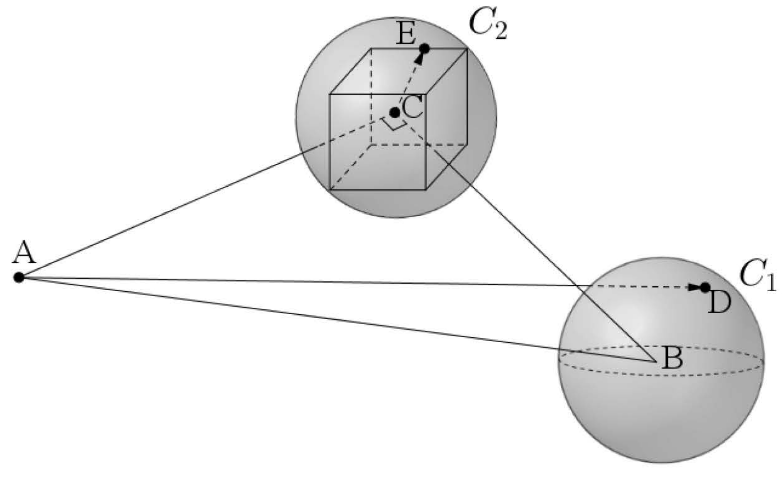
26. 대학교 1학년인 남학생 1명, 여학생 2명과 대학교 2학년인 남학생 1명과 여학생 2명을 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 같은 학년 학생들끼리 이웃하지 않는다.
(나) 남학생들끼리 이웃하지 않는다.

27. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{a}=1$과 포물선 $y^2=4p(x+b)$는 한 초점 $\mathrm{F}(2,\,0)$을 공유한다. 타원과 포물선이 만나는 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{3}$일 때, $a+b+p$의 값을 구하시오. (단, $p>0$) [4점]

28. 어느 드라마의 시청률을 알아보기 위하여 100명을 임의로 선택하여 조사하였더니 10명이 시청했다고 답하였다.
이 결과를 이용하여 구한 드라마의 전체 시청률 p에 대한 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간이 $a\leq p\leq b$일 때, $l_\alpha=b-a$라 하자.
어떤 양수 t에 대하여 α의 값과 관계없이 항상
$\mathrm{P}(Z\leq tl_\alpha)=\frac{\alpha+100}{200}$이 성립할 때, $3t$의 값을 구하시오.
(단, $0<\alpha<100$이고 Z 는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

29. $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=4\sqrt{2}$ 인 직각삼각형 ABC와 두 점 B, C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 두 구 C_1, C_2가 있다. 구 C_2에 내접하는 한 정육면체를 평면 ABC로 자른 단면은 정사각형이고, 이 정사각형의 모든 꼭짓점은 직선 AC 또는 직선 BC 위에 있다. 구 C_1 위를 움직이는 점 D와 정육면체의 모서리 위를 움직이는 점 E에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



30. 실수 전체 집합에서 증가하는 연속함수 $y=f(x)$와 집합 $A=\left\{x \,\middle|\, \left(\int_2^x f(t)dt-f(4)\right)\left(\int_4^x f(t)dt-f(2)\right)=0\right\}$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)+n(A)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $\{2, 4\}\subset A$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(4-x)+f(4+x)=2f(4)$
> (다) $\int_4^5 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx=2$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2019학년도 기대 모의고사 Vol.1 해설지

수학 영역 (가형)

저자	김 기 대
약력	고려대학교 수학과 13학번 대학수학능력시험 수학 가형 3연속 만점 2016~2019 학년도 기대모의고사 저자 (전 문항 출제 및 해설) 2018년 오르비 수학연구소장
검토진	유준희 고려대학교 수학과 졸 고려대학교 수학대학원 석.박사 통합과정 고려대학교 수학과 학부생 검토진 한상범 이정윤 박주용 배수현 이재원 권순엽 정혜원 허재영 박강균 송준엽 이승빈 이두형

기대모의고사의 문제오류 제기, 오타 제보, 무단복제 등은 kidae6150@naver.com 으로 제보해주세요.

정오표는

atom.ac/books/5434에서 보실 수 있습니다.

〈기대모의고사 출판 계획〉

Volume	출판시기	교재 컨셉	평균 1등급컷
Vol.1 가형 (ver. 2019) 4회분	18년 6월	* 최근 수능과 제일 비슷한 성격의 시험지구성 (27+3) * 212930 ⇒ 미분, 기벡, 적분	89
Vol.2 가형 (ver. 2019) 3회분	18년 8월 (6평 반영)	* 212930 이외의 4점문항 난이도 상승 및 여러 상황 구현 ⇒ 체감난이도 상승	88~92 (예정)
Vol.1 나형 (ver. 2019) 4회분	18년 6월	* 최근 수능과 제일 비슷한 성격의 시험지구성 (28+2) * 212930 ⇒ 개수/확통/미적	89
Vol.2 나형 (ver. 2019) 3회분	18년 8월 (6평 반영)	* 212930 이외의 4점문항 난이도 상승 및 여러 상황 구현 ⇒ 체감난이도 상승	88~92 (예정)

Vol.2는 출간 미정입니다. 만약 출간하게 된다면,
Vol.1은 Vol.2와 겹치는 문항이 전혀 없습니다.

2019 기대모의고사에는 작년 기대모의고사 우수문항이 포함되어 있습니다.

〈기대모의고사 특징〉

1. 현 수능수학의 트렌드 (27+3, 28+2)가 시작된 13수능부터 새로운 교육과정이 반영된 최신 수능까지의 트렌드가 녹아든 모의고사.

이 교재의 난이도의 스펙트럼은 13, 14수능보다 약간 어려운 난이도부터 16, 17수능 정도의 난이도까지입니다.
(1컷 92 부근)

기대모의고사 Vol.1 가형은 최근 4년 연속 수능 21, 29, 30번에 출제되었던 조합인 '미적분2' 2문제와 '기하와 벡터' 1문제 조합을 유지했고 두 과목에 비해 쉽게 출제되지만 방심할 수 없는 '확률과 통계' 역시 참신한 문제들로 준비했습니다.

2. 평가원이 보여주었던 출제방침 및 습관 적극 반영

중단원별로 고른 문제 출제, 소단원별 교과이수과정표 참고, 수능과 똑같은 과목별 출제문항비율 등의 평가원의 굵직한 출제 매뉴얼부터 객관식 1번~20번 사이의 정답분포를 고르게 배치하는 '답갯수법칙'(물론 작년 수능엔 깨졌지만.),
문제 상황의 표현 등등 평가원의 사소한 출제습관 까지도 교재에 담아냈습니다.

3. 대학수학능력시험에서 필요한 사고력과 필수개념 활용을 강조한 문항구성

발상적인 문제는 출제하지 않았습니다.
수능에서 요구하는 '교과서적 지식'과 '사고력'만으로 자연스럽게 풀리는 문제들로만 구성된 교재입니다.

〈기대모의고사 온라인 해설강의〉

본 모의고사의 해설 강의를 저자가 직접 합니다.
class.orbi.kr
에서 저자 직강 해설강의를 찾아보세요.
(8월 말 쯤 업로드 예정)

〈자작물을 보호해주세요.〉

최근 '컨텐츠'의 중요성이 부각되는 교육계에서
자작물을 도용하는 사례가 늘고 있습니다.

교재 원형을 수업교재로 사용하는 것은 상관없으나,
다음 사례들은 모두 저작권법에 위배됩니다.

1) 스캔파일, PDF변환파일
2) 한글로 원본 그대로를 타이핑, 2차 저작물 제작
3) 일부 문항만을 따서 교재에 사용
(저자의 허락 없이는 출처를 기재해도 위배대상)

이외에도 본 교재를 영리적 목적으로 사용한 사례가
있다면 제보해주세요.

공익을 위한 일 이외에는 그 누구에게도 본 교재의
문제사용을 허용하지 않겠습니다.
(검토진 포함)
저자에게 사용을 허락받았다, 과거에 자신에게 배우던
제자라 상관없다는 등의 거짓말에 속지 마세요.

또한 이 모의고사의 문제들은 100% 순수창작
문제입니다. 다른 모의고사들처럼 기존에 있던 문제들을
참고해서 만든 문제들이 아닙니다.
수능 기출문제조차도 '단순변형'이 아닌 경향,
표현을 참고하는 수준으로만 반영되었기 때문에
타 교재에서 같은 문제가 나오기 힘듭니다.

따라서 **이 교재의 문제가 노골적으로 포함되어 있는**
타 교재 혹은 학원 수업물이 있다면
kidae6150@naver.com로 메일 부탁드립니다.
관련사실을 입증하려면 증거자료가 필요하기 때문에,
증거자료(문제가 도용된 교재나 사진)를 확보하신 후
제보해주시면 **손해배상금의 일부를 드리겠습니다.**

본 모의고사의 문제들과 해설들은 저자와 검토진들의
정성과 노력으로 만들어진 자작물입니다.

학생 여러분들의 적극적인 신고가 좋은 컨텐츠를 만드는
원동력이 됩니다.

2019학년도 기대 모의고사 Vol.1
수학 가형 〈1회〉 해설

이 교재의 문제가 포함되어 있는 타 교재 혹은 학원 수업물이 있다면
kidae6150@naver.com 메일 부탁드립니다.
(해설집 표지 2Page 참고)

문제	답	문제	답	문제	답
1	②	11	②	21	②
2	③	12	⑤	22	2
3	①	13	④	23	3
4	②	14	④	24	15
5	⑤	15	③	25	5
6	④	16	④	26	32
7	②	17	⑤	27	16
8	③	18	③	28	50
9	①	19	①	29	11
10	①	20	⑤	30	10

1. $\vec{a}+2\vec{b}=(4,1)$ 이므로 모든 성분의 합은 5이다.

2. $x\to 0$일 때 $\frac{e^x-1}{x}\to 1$, $\cos x\to 1$로 수렴하므로 정답은 1.

3. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$로부터 $\mathrm{E}(X^2)=8$이다.

4. $a=\frac{2\times3+1\times0}{1+2}=2$, $b=\frac{2\times6+1\times(-3)}{1+2}=3$
$c=\frac{2\times0+1\times3}{1+2}=1$ 이므로 정답은 6이다.

5. $2^3+a=4$이므로 $a=-4$.
$2^x-4=12$에서 $x=4$이므로, 정답은 4이다.

6. 여사건을 이용하여, 두 눈의 합이 11, 12일 때의 확률을 1에서 빼주면 된다. 두 눈의 합이 11인 경우에는 (6, 5), (5, 6)이 있고 12인 경우에는 (6, 6)이 있으므로, 두 눈의 합이 11, 12일 때의 확률은 $\frac{2+1}{36}=\frac{1}{12}$이다.
따라서 정답은 $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$이다.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=A$ (A는 상수) 라 하면
$f(x)=\cos x+\frac{A}{\pi}$이므로
$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\frac{A}{\pi}\right)dx=\left[\sin x+\frac{A}{\pi}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ 에서 $A=2$.

따라서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$

8. $2\vec{a}-t\vec{b}$와 $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $(2\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ 이고 이로부터 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=t|\vec{b}|^2$을 알 수 있다.
문제에서 주어진 벡터들을 대입하면 $16=4t$. 따라서 $t=4$ 이다.

9. 부분적분법을 활용해주면
$$\int_1^{\sqrt{e}}x\ln x dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{2}xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$$
$=\frac{1}{4}$이다.

10. 구의 중심을 $\mathrm{C}(2,2,0)$라 하고, 직선과 구의 접점 P를 $(2t+1,\ t,\ 2t+2)$로 두자.

직선의 방향벡터와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$가 수직이어야 하므로,
$(2t-1, t-2, 2t+2)\cdot(2,1,2)=0$이다.
이로부터 $t=0$임을 알 수 있고, 따라서 $\mathrm{P}(1,0,2)$이다.

구의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{CP}}$의 길이이므로 $r=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$.

11. 합성함수 미분법에 의하여 $g'(0)=f(0)f'(0)$이다.
$\{f(x)\}^2=e^{3x}+x^2$ 역시 합성함수 미분법에 의하여
$2f(0)f'(0)=3$이므로 $g'(0)=\frac{3}{2}$이다.

12. 직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각도를 θ라 하면,
$\tan\theta=2$이다.
이 때 직선 AC의 기울기가 될 수 있는 값은
$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$이다.
$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$, $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2+1}{1-2}=-3$이므로 정답은 $\frac{1}{3}$이다.

13. 두 점 A, C가 x축 위에 있으므로 삼각형 ABC의 넓이 $S(\theta)$는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times|\mathrm{B}$의 y좌표$|$ 로 구할 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$에서 점 P가 선분 AB의 중점임을 알 수 있기 때문에 점 B의 y좌표는 $2\sin\theta$이고, 삼각형 OPA에서 $\angle\mathrm{AOP}=\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\sec\theta-1$.

$\therefore S(\theta)=\sin\theta\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)$이고 $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{1}{2}$이다.

(위의 풀이는 $\theta>0$일 때를 전제로 쓰인 풀이이다.
$\theta\to0+$인 상황만 구하면 되므로 상관없다.)

14. 두 삼각형 PFH, PF′H의 둘레의 길이의 차는
$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'H}}+\overline{\mathrm{HP}}-(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FH}}+\overline{\mathrm{HP}})=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{F'H}}-\overline{\mathrm{FH}}$인데
$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}$는 쌍곡선의 정의에 의하여 쌍곡선의 주축의 길이, $\overline{\mathrm{F'H}}-\overline{\mathrm{FH}}$는 $\overline{\mathrm{F'F}}$와 같다.

따라서 $10=2+2\sqrt{1+a^2}$에서 $a^2=15$임을 알 수 있다.
즉 쌍곡선의 점근선은 $y=\pm\sqrt{15}x$이고, 점 F는 $(4, 0)$이므로 점 $(4, 0)$과 직선 $y=\pm\sqrt{15}x$ 사이의 거리는 $\sqrt{15}$임을 알 수 있다. 따라서 $l^2=15$.

15. 곡선 $y=\sin ax\left(0\le x\le\frac{\pi}{a}\right)$는 직선 $x=\frac{\pi}{2a}$에 대하여

대칭이므로 선분 AB 역시 직선 $x=\frac{\pi}{2a}$에 대하여 대칭이여야 한다. 그리고 한 변의 길이가 1이므로 A, B의 x좌표는

각각 $\frac{\pi}{2a}+\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2a}-\frac{1}{2}$이다.
점 C가 x축 위에 있으므로, 점 A, B의 y좌표는 정삼각형의 높이인 $\frac{\sqrt{3}}{2}$와 같아야 한다. 따라서 $\sin a\left(\frac{\pi}{2a}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(혹은 $\sin a\left(\frac{\pi}{2a}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$)여야 한다.

즉, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\right)=\cos\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$로부터 $\frac{a}{2}=\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi\cdots$

이 가능한데 이 중 $0<a\le\pi$인 a는 $a=\frac{\pi}{3}$임을 알 수 있다.

16. 우선 (나) 조건으로부터 5명의 학생들에게 각각 1병의 사이다를 우선적으로 나눠 줘야 한다.
남은 2병의 사이다를 5명의 학생들에게 나누어 줘야 하므로 이 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_2$.
(가)조건으로부터 각 학생들이 받은 사이다의 수만큼 콜라를 우선적으로 나눠 줘야 한다. 이후 남은 3병의 콜라를 5명의 학생들에게 나누어 줘야 하므로 이 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3$.

따라서 정답은 ${}_5\mathrm{H}_2\times{}_5\mathrm{H}_3=525$ 이다.

17. $\mathrm{P}(|X|\ge m)=\mathrm{P}(X\ge m)+\mathrm{P}(X\le -m)=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(X\le -m)$

이므로 $\mathrm{P}(X\le -m)=\mathrm{P}(X\ge 60)$이다. 확률밀도함수는 $x=m$에 대하여 대칭이므로, $-m$과 60의 평균이 m이다. 따라서 $m=20$.

X가 $m=20, \sigma=10$인 정규분포를 따르므로 $\overline{X}$는
$m=20, \sigma=\frac{10}{\sqrt{16}}=\frac{5}{2}$인 정규분포를 따른다.

따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}\le 25)=\mathrm{P}(Z\le 2)=0.9772$이다.

18. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 두자.
$x<0$에서 $g'(x)=-e^{-x}(1-x)$이고 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $f(0)=0$, $f'(0)=-1$이다.
따라서 $b=-1, c=0$, $f(x)=x^3+ax^2-x$.

$g''(x)$를 구해보면 $g''(x)=\begin{cases}(2-x)e^{-x} & (x<0)\\ 6x+2a & (x>0)\end{cases}$이다.

$i)$ $a\ge0$일 때,
$x<0$에서 $g''(x)>0$이고 $x\ge0$에서도 $g''(x)\ge0$이므로 $g(x)$의 변곡점이 존재하지 않는다.

$ii)$ $a<0$일 때,
$\lim_{x\to0+}g''(x)=2a<0$이고 $\lim_{x\to0-}g''(x)=2>0$이므로 $x=0$의 좌, 우에서 $g''(x)$의 부호가 바뀌었다. 따라서 $x=0$에서 변곡점을 갖는다.
또한 $6x+2a=0$, $x=-\frac{a}{3}$에서도 $g''(x)$의 부호변화가 있으므로

변곡점은 총 2개이며 두 변곡점의 x좌표의 합은 $-\frac{a}{3}+0$이다.

따라서 $n=2$, $a=-3$이고, $f(x)=x^3-3x^2-x$에서
$f(n)=f(2)=8-12-2=-6$임을 알 수 있다.

출제자의 한마디
변곡점을 판단하는 기준은 $f''(x)$의 값이 0인지가 아닌 $f''(x)$의 부호변화가 있는지를 체크하는 것이다. 이 문제처럼 $f''(x)\neq0$ 여도 변곡점을 가질 때도 있으며, $f''(x)=0$ 여도 변곡점을 갖지 않을 때도 있다.

19. $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)은
$(5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1)$
로 총 10개이고, $(5, 1), (1, 5)$일 때 $a+b$는 최댓값 6을 갖는다.
$\therefore p=6$

a, b는 자연수이고, c는 음이 아닌 정수이므로
$a=a'+1, b=b'+1$로 두면 $a+b+c=a'+b'+c+2=n$에서
$a'+b'+c=n-2$이다.
이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c)의 개수는

$_3\mathrm{H}_{n-2} = {}_n\mathrm{C}_{n-2} = {}_n\mathrm{C}_2$이다.

$\therefore f(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

조건부확률에 의하여

$g(n) = \dfrac{10}{\frac{n(n-1)}{2}} = \dfrac{20}{n(n-1)}$이다. (10은 $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)의 개수)

따라서 $f(2p)\times g(p) = 44$이다.

출제자의 한마디
보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.
확률문제에서 중복조합을 사용할 경우, 근원사건의 확률에 대한 고민을 한 후 사용해주자.

20.

ㄱ.

정육각형이므로 선분 AB, CF, DE가 모두 평행하므로 점 F에서 평면 α까지의 거리는 점 E에서 평면 α까지의 거리의 절반이다. 따라서 직선 EF와 평면 α 위에 있는 점 G에 대하여 선분 EG의 중점이 F임을 알 수 있다. 즉 $\overline{\mathrm{FG}} = \overline{\mathrm{FE}} = 2$.

ㄴ.

$\overline{\mathrm{FG}} = \overline{\mathrm{FA}} = 2$ 이고 $\angle \mathrm{GFA} = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$ 이므로 삼각형 FGA은 정삼각형이다. 따라서 F에서 선분 AG까지의 거리가 $\sqrt{3}$이다. 또한 직선 AF와 평면 α 사이의 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로 점 F에서 평면 α 까지의 거리는 $2\times\sin\frac{\pi}{6} = 1$이다.

위의 결과에 따라 삼각형 AFG와 평면 α의 사이각을 θ라 하면,

$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

따라서 삼각형 AFG의 평면 α로의 정사영의 넓이는

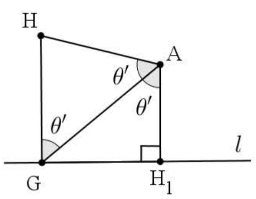
$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right) = \sqrt{2}$이다.

ㄷ.

$\overrightarrow{\mathrm{GP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GF}} = 0$에서 두 직선 GP, GF가 수직임을 알 수 있다. 점 F에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면, 삼수선의 정리에 의하여 직선 GH, GP 역시 수직이다.

ㄴ.에서 구한 정보들을 이용하면 $\overline{\mathrm{HG}} = \overline{\mathrm{HA}} = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$이고,

이를 그림으로 그리면 다음과 같다.



(직선 l은 직선 GP이고 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AH_1}}$.)

$\overline{\mathrm{AG}} = 2$이므로 이등변삼각형 HGA에서 $\cos\theta' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이고,

따라서 $\overline{\mathrm{AH_1}} = \overline{\mathrm{AG}}\cos\theta' = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

출제자의 한마디
점 G는 직선 AB 위의 점이다. 두 평면 위에 동시에 있는 점들은 하나의 직선을 이루는데, 지금 이 문제에 표시된 모든 점들은 정육각형을 포함하는 어떤 평면 β 위에 있다. 즉, A, B, G는 두 평면 α, β 위에 있으므로, 이 세 점은 한 직선(두 평면의 교선) 위에 있다.

21. 출제의도 : 미분을 통해 그래프의 개형을 그림으로써 근의 개수를 판별하는 이과의 전통적인 21번 문제. 하지만 n의 값에 따라 극값을 가지는 x가 포함될 수도, 포함되지 않을 수도 있기 때문에 평범한 미분개형문제보다 어렵게 생각 될 것으로 판단된다.

$x > e^n$일 때, $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x + 3n$이고 $f'(x) = \dfrac{3(\ln x)^2 - 3}{x}$

$0 < x < e^n$일 때, $f(x) = (\ln x)^3 + 3\ln x - 3n$이고

$f'(x) = \dfrac{3(\ln x)^2 + 3}{x}$ 이다.

$0 < x < e^n$에서는 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이므로 극점이 존재하지 않는다. 반면, $x > e^n$에서는 $x = e, \frac{1}{e}$에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 극점이 존재한다.

하지만, $x = e, \frac{1}{e}$가 항상 $x > e^n$에 포함되는 것이 아니기 때문에, n의 범위를 나누어 $f(x)$를 그려줘야 한다.

i) $n \ge 1$일 때,

$x > e^n$일 때에도 $e^n \ge e$, 즉 $x > e$이므로 이 범위에선

$f'(x) = \dfrac{3(\ln x)^2 - 3}{x}$이고, 이 역시 항상 양수이므로 $f(x)$는 전구간에서 증가함수이다.

따라서 $f(x) = k$의 해가 3개가 되도록 하는 정수 k가 없으므로 $g(n) = 0$.

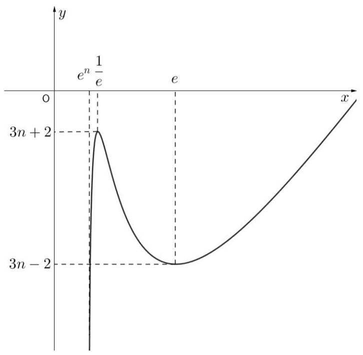
ii) $n < -1$일 때,

$e^n < e^{-1}$이므로 $x = e, \frac{1}{e}$가 모두 $x > e^n$에 포함된다. 따라서

$f(x)$는 $x = \frac{1}{e}$에서 극댓값 β, $x = e$에서 극솟값 α를 가진다.

따라서 $\beta = f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 - 3|1+n|$, $\alpha = f(e) = 1 - 3|1-n|$인데,

$1 + n < 0,\ 2 < 1 - n$이므로 $\beta = 3n + 2,\ \alpha = 3n - 2$이고 그래프를 그리면 다음과 같다.

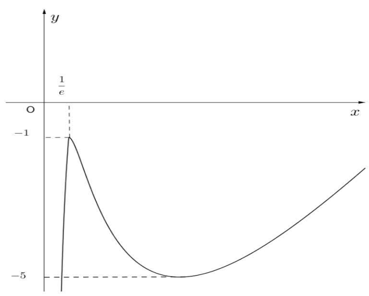


따라서 $f(x)=k$의 해가 3개가 되도록 하는 k는 $3n-2<k<3n+2$를 만족시키는 k이고, 가능한 k값들은 $3n-1,\ 3n,\ 3n+1$로써 n의 값에 관계없이 항상 3개다.

따라서 $n<-1$일 때, $g(n)=3$

iii) $n=-1,\ 0$일 때

먼저 $n=-1$일 때, *ii*)와 같이 $x=\dfrac{1}{e}$에서 극댓값을 가지지만, 그 점에서 미분가능하지 않는 그래프를 가진다.



이 역시 가능한 k값들은 $-2,\ -3,\ -4$이므로 $g(-1)=3$이다.

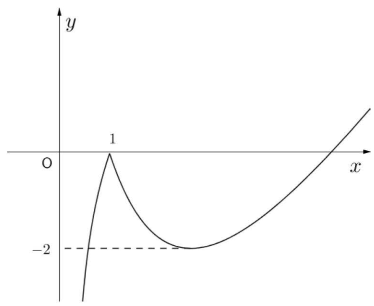
$n=0$일 때, $x=\dfrac{1}{e}$은 범위 $x>e^n=1$에 포함되지 않아서 극댓값이 없다고 착각할 수 있다.

하지만, $x>1$일 때 $f'(x)=\dfrac{3(\ln x)^2-3}{x}$이므로 $f'(x)<0$이고

$x<1$일 때 $f'(x)=\dfrac{3(\ln x)^2+3}{x}$이므로 $f'(x)>0$이다. 즉, $x=1$의 좌, 우에서 $f'(x)$의 부호변화가 있고, $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가짐을 알 수 있다.

(즉, 극대점에서 미분이 불가능하지만, 극대점임은 틀림없다.)

극솟값은 $x=e$에서 가지므로 극댓값은 $f(1)=0$, 극솟값은 $f(e)=-2$이다. 따라서 $k=-1$일 때만 $f(x)=k$가 세 근을 가지므로 $g(0)=1$이다.



위에서 구한 $g(n)$을 종합하면

$n\geq 1$일 때, $g(n)=0$

$n\leq -1$일 때, $g(n)=3$

$n=0$일 때, $g(n)=1$이므로

$$\sum_{m=1}^{20} g(m-10)=(g(-9)+\cdots+g(-1))+g(0)+(g(1)+\cdots+g(10))$$

$$=3\times 9+1\times 1+0\times 10=28\text{이다.}$$

22. $(ax+2)^4=(ax)^4+{}_4\mathrm{C}_1(ax)^3 2^1+\cdots$ 이므로 x^3의 계수는 $8a^3$이다. 이 값이 64여야 하므로 $a^3=8 \Rightarrow a=2$ 이다.

23. 미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프가 원점에서 x축에 접하므로 $f(0)=0,\ f'(0)=0$이다. $g(x)=f(x)e^{-x}+3x$을 미분한 후 $x=0$을 대입하면 $g'(0)=(f'(0)-f(0))e^0+3=3$임을 알 수 있다.

24. $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$ 로부터

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 이므로 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 $45\times \mathrm{P}(A^C\cap B)=15$.

25. 점 $(2,\ 0)$은 $t=1$일 때의 점이다.

$\dfrac{dy}{dt}=e^t\left(\dfrac{1}{t}+\ln t\right)$, $\dfrac{dx}{dt}=2t+1$이므로 $t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e}{3}$이다.

따라서 접선의 방정식은 $y=\dfrac{e}{3}(x-2)$이며 $\mathrm{A}(2,\ 0)$,

$\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{2}{3}e\right)$이므로 삼각형OAB의 넓이는 $\dfrac{2}{3}e$이다.

따라서 $p+q=5$이다.

26. 학생들이 나열되는 자리를 왼쪽부터 순서대로 A, B, C, D, E, F라 하자.

총 6명의 학생들이 일렬로 나열되는데, 각 학년의 학생이 3명씩이므로 (가)조건에 따르면 A, C, E에 1학년, B, D, F에 2학년이 배치되거나 A, C, E에 2학년, B, D, F에 1학년이 배치되어야 한다.

따라서 A, C, E에 1학년, B, D, F에 2학년이 배치되는 경우의 수에 2배를 해주면 정답이 나올 것이다.

각 학년의 학생들을 나열하는 방법의 수는 각각 3!이므로 총 경우의 수는 3!×3!이다.

하지만, 1학년의 남학생과 2학년의 남학생이 이웃하지 않으므로 두 남학생이 각각 A, B/B, C/C, D/D, E/E, F에 배치되는 경우의 수를 빼줘야 한다. 이러한 경우는 5가지이고,

나머지 자리에 각 학년의 학생들을 나열하는 방법의 수는 각각 2!이다.

따라서 정답은 ${}_2\mathrm{C}_1 \times (3!\times 3!-5\times 2!\times 2!)=32$ 이다.

27. 타원의 한 초점이 $(2,0)$이므로 $a=12$이다.
즉, 단축의 길이가 $4\sqrt{3}$인데, 타원과 포물선이 만나는 교점 사이의 거리도 $4\sqrt{3}$이다.
타원과 포물선은 x축 대칭인 그래프를 갖는데, 이를 통해 타원과 포물선의 두 교점은 x좌표가 서로 같음을 알 수 있다.
또한 타원 위의 점 중 x좌표가 같은 두 점 사이의 거리의 최댓값은 단축의 길이이므로,

단축의 길이 $=4\sqrt{3}=$ 타원과 포물선이 만나는 교점 사이의 거리

라는 정보를 통해 두 교점은 타원의 단축 위에 있음을 알 수 있다.

교점 중 하나를 점 A라 하자. 선분 AF의 길이는 타원의 장축의 길이의 절반인 4이므로, 포물선의 정의에 의하여 포물선의 준선은 점 A에서 x축 방향으로 -4만큼 떨어진 $x=-4$임을 알 수 있다.

포물선의 꼭짓점은 준선이 x축과 만나는 점과 초점을 잇는 선분의 중점이므로, $(-1,0)$을 꼭짓점으로 갖는다.
따라서 $b=1$, $p=2-(-1)=3$이다.

따라서 $a+b+p=12+1+3=16$.

28. $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$을 만족시키는 양수 k에 대하여 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간 $a\le p\le b$에 대하여 $b-a=2k\times\dfrac{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{\sqrt{n}}$로 알려져 있다. (단, $\hat{p}$는 표본비율이며 $\hat{q}=1-\hat{p}$이다.)

문제 조건에서 $n=100$, $\hat{p}=0.1$이므로 대입해보면
$l_\alpha=2k\times\dfrac{\sqrt{0.1\times0.9}}{\sqrt{100}}=\dfrac{3}{50}k$이다.

$\mathrm{P}(Z\le tl_\alpha)=\dfrac{\alpha+100}{200}=\dfrac{\alpha}{200}+\dfrac{1}{2}$으로부터

$\mathrm{P}(Z\le tl_\alpha)-\dfrac{1}{2}=\mathrm{P}(0\le Z\le tl_\alpha)=\dfrac{\alpha}{200}=\mathrm{P}(0\le Z\le k)$를

만족시켜야 하므로 $tl_\alpha=k$에서 $t=\dfrac{50}{3}$, $3t=50$임을 알 수 있다.

출제자의 한마디

$\dfrac{\alpha}{200}=\mathrm{P}(0\le Z\le k)$이 만족하는 이유는 확률변수 Z는 평균이 0인 표준정규분포이므로, Z의 확률밀도함수는 0을 기준으로 좌우대칭인 함수이기 때문이다.

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$ 조건이 어색한 학생들은 보통의 통계문제를 풀 때, 신뢰도 95%의 95란 숫자와, 뒤에 나오는 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$의 95란 숫자가 같은 것만 체크한 후 k를 1.96이라고 '무의식적'으로 잡고 풀었을 가능성이 높다.

이 문제는 기존에 풀어본 적이 있어서 풀 수 있는 문제가 아닌, 완전 개념형 문제이다.

본인이 15학년도에 확률밀도함수의 대칭성을 이용한 문제를 냈을 때도 '왜 이런 소재로 준킬러 문제를 내냐'는 평이 있었다. 하지만 16학년도, 17학년도 평가원, 수능에서 볼 수 있듯이, 확률과 통계에서 중요한 트렌드가 되었다. **확통의 처음과 끝은 '개념'임을 간과하지 말자.**

cf. 3년간의 검토동안 대부분의 검토진들이 '실력이 어중간한 학생들이 이 문제를 틀리고선 오히려 자존심 때문에 욕할 것 같다. 하지만 실제론 매우 좋은 개념형 문제이다.' 라고 평한 문제이다.

29. 구 위의 점에 대한 벡터 내적, 합의 최대, 최소를 묻는 문제의 경우 스타트는 항상 '구의 중심을 시점으로 하는 벡터로 분해' 하는 것이 좋다.

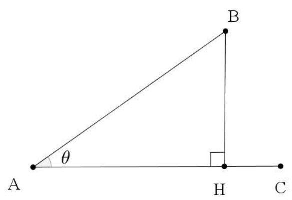
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$로 벡터분해하면 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$는 크기는 $\sqrt{3}$이고 방향은 어느 방향이든 다 가질 수 있는 벡터이기 때문에, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$의 값은 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$가 결정이 됐을 때 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$를 같은 방향으로 결정해주면 내적값이 최대가 될 것이다.

이제 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$가 최대일 때의 상황을 구해보자.

(cf. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$가 각각 최대인 상황이 '동시에' 이루어질 수 있기 때문에 가능한 풀이이다. 비슷한 문제풀이 구조를 띄는 문제로는 2016학년도 수능 29번이 있다.)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|\times\cos\theta$를 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times(|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|\times\cos\theta)$의 관점으로 보면, 두 점 C, E를 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times(|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|\times\cos\theta)=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}}|$와 같다.
(단, θ가 예각일 때)

(참고)



위 그림에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ (단, θ가 예각)

위 개념은 실전에서 매우 자주 사용되므로 꼭 알아두자.

$\overrightarrow{AB}$는 고정된 벡터이고 점 C 역시 고정된 점이므로, E의 수선의 발 H_2가 점 C의 수선의 발 H_1으로부터 멀리 떨어져 있을 때 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$가 최대가 나온다.

따라서 최대인 경우는 그림에 있는 정육면체의 오른쪽 면 위에 점 E가 있을 때임을 알 수 있다.

(참고 : 만약 점 E가 오른쪽 면이 아닌 왼쪽 면에 있다면 두 벡터의 사잇각이 둔각이 나와 최솟값이 나오게 된다.)

따라서 이 상황에서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$의 값은 $8 \times 1 = 8$이다. … ①

이제 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$의 최댓값을 결정해보자. 점 E의 위치는 정육면체의 특정한 한 면(문제의 그림 기준 오른쪽 면) 위에 있어야 함이 결정된 상태이다.
또한 $\overrightarrow{BD}$는 점 E의 위치에 관계없이 $\overrightarrow{CE}$와 같은 방향을 가질 수 있고 크기가 $\sqrt{3}$으로 고정되어 있으므로, 결국 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$의 값은 $|\overrightarrow{CE}|$에 의해 결정된다.

정육면체의 오른쪽 면이 구와 만나는 네 점 중 하나가 E일 때, $|\overrightarrow{CE}|$은 최댓값 $\sqrt{3}$을 가짐을 알 수 있고, 따라서 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$의 최댓값은 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ … ②

①, ②에 의하여 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{CE}$의 최댓값은 11임을 알 수 있다.

출제자의 한마디

벡터의 구성요소는 방향과 크기이다. 중심이 O인 원 위의 점 P에 대한 벡터가 있을 때 $\overrightarrow{OP}$가 나오게끔 벡터분해를 해주면 $\overrightarrow{OP}$는 방향 무제한, 크기 고정인 벡터이기 때문에 벡터 간 계산 값의 최대, 최소를 결정할 때 자유분방하게 활약할 수 있다.

물론, 원 나왔을 때 무조건 이렇게 하면 풀린다! 라고 하는 것은 아니다.
'첫 시도로 해볼 만한 제일 괜찮은 풀이' 정도일 뿐이다.

30. (가)조건에서 방정식 $\left(\int_2^x f(t)dt - f(4)\right)\left(\int_4^x f(t)dt - f(2)\right) = 0$의 해 중 두 개가 2, 4임을 알 수 있으므로 $x = 2, 4$를 대입해보자.

$x = 2$를 저 식에 대입하면 $f(4)\left(f(2) - \int_4^2 f(t)dt\right) = 0$이다.

따라서 $f(4) = 0$이거나 $f(2) = \int_4^2 f(t)dt$여야 한다. …①

또한, $x = 4$를 저 식에 대입하면 $\left(f(4) - \int_2^4 f(t)dt\right)f(2) = 0$이다.

따라서 $f(2) = 0$이거나 $f(4) = \int_2^4 f(t)dt$여야 한다. …②

결론적으로 ①, ②에서 각각 두 경우 중 최소한 한 경우씩을 만족해야 하므로, 4개의 케이스가 나온다.

i) $f(4) = 0$ and $f(2) = 0$ 일 때, 실수 전체 집합에서 증가한다는 조건에 모순이 되므로 불가능하다.

ii) $f(4) = 0$ and $f(4) = \int_2^4 f(t)dt$일 때,

$f(4) = 0 = \int_2^4 f(t)dt$인데, $f(x)$는 실수 전체 집합에서 증가하는 함수이고 $f(4) = 0$이므로 구간 $(2, 4)$에서 함수 $f(x)$는 음의 함숫값을 갖고, 따라서 $\int_2^4 f(t)dt$의 값은 0이 될 수 없다.

(자세히 말하면 $\int_2^4 f(t)dt$는 음수여야 한다.)

iii) $f(2) = 0$ and $f(2) = \int_4^2 f(t)dt \left(= -\int_2^4 f(t)dt\right)$일 때,
ii)에서와 비슷하게 $f(x)$가 증가함수이고 $f(2) = 0$이므로 구간 $(2, 4)$에서 함수 $f(x)$는 양의 함숫값을 갖기 때문에 $\int_2^4 f(t)dt$의 값은 0이 될 수 없다. 따라서 모순.

i) ~ *iii*)이 모두 불가능하므로, 결국
$f(4) = \int_2^4 f(t)dt$ and $f(2) = \int_4^2 f(t)dt \left(= -\int_2^4 f(t)dt\right)$
만 가능함을 알 수 있고, 이 두 식에서 <u>$f(4) = a$라 하면 $f(2) = -a$</u>임을 알 수 있다.
(∵(나)조건에서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 점 $(4, f(4))$ 에 대한 대칭이므로)
(참고로, $f(x)$는 증가하는 함수이므로 $f(4) = a$는 당연히 양수여야 할 것이다.)

이제 (나)조건과 (다)조건을 융합해서 보자. (나)조건은 점대칭, (다)조건은 적분관계식을 주었는데, 익숙한 조건이 아닌가?
바로 18학년도 6평 30번 문제에서 사용된 점대칭함수의 적분이다.
점대칭함수의 적분에 의하여 $\int_3^5 f(x)dx$의 값은 네 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(3, f(4))$, $(5, f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같으므로,

(**<u>해설 마지막의 추가해설(유도과정)을 반드시 읽어보도록 하자.</u>**)
$\int_3^5 f(x)dx = \int_4^5 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = 2f(4)$이다.
$\int_4^5 f(x)dx = 2f(4) - \int_3^4 f(x)dx$를 (다)조건에 대입하면
$2f(4) - \int_3^4 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx = 2f(4) - \int_2^4 f(x)dx = f(4)$
$= 2$ 이므로 $f(4) = 2$이다.

출제자의 한마디
해설의 편의를 위해 정적분의 구간을 나눠 두 정적분으로 만드는 '번거로운 짓'을 했지만, 실전풀이는 증가하는 점대칭함수의 그래프를 그려서 해석할 수 있어야 한다.

따라서 $f(6)$의 값을 구하면 되는데,
$f(4)=2,\ f(2)=-2$이고 $f(x)$는 $(4,\ 2)$에 대한 점대칭함수이므로
$f(6)+f(2)=2f(4)$에서 $f(6)=6$임을 알 수 있다.

이제, A의 원소 중 2,4가 아닌 것들을 파악해 보자.

$f(4)=2,\ f(2)=-2$를 대입해보면
$\left\{x \,\middle|\, \left(\int_2^x f(t)dt-2\right)\left(\int_4^x f(t)dt+2\right)=0\right\}$인데,
$\int_2^x f(t)dt-2=\int_2^x f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=\int_4^x f(t)dt$이므로 결국
$\int_4^x f(t)dt\left(\int_4^x f(t)dt+2\right)=0$의 해를 찾으면 된다.

$\int_4^x f(t)dt$의 값이 0이거나 -2인 x를 모두 찾기 위해 함수
$g(x)=\int_4^x f(t)dt$의 그래프를 그려보자.
$g(2)=-\int_2^4 f(t)dt=-2,\ g(4)=0$이고 $g'(x)=f(x)$이다.

또한 $g'(x)=f(x)=0$을 만족시키는 $x=\alpha$는 구간 $(2,\ 4)$에 오직 하나 존재할 것이고 ($\because f(2)f(4)=-4<0$이고 $f(x)$는 증가함수이므로 사이값 정리에 의하여)
함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 가질 것이다.

그 극솟값은 $f(2)$의 값인 -2보다 작으므로
($\because$구간 $(2,\ \alpha)$에서 $f(x)<0 \Leftrightarrow g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 감소함수이다.)
결론적으로 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2, $g(x)=-2$의 서로 다른 실근의 개수도 2가 되어 $n(A)$의 값은 4가 된다.

따라서 $f(6)+n(A)=6+4=10$.

['점대칭함수의 적분에 의하여 $\int_3^5 f(x)dx$의 값은 네 점 $(3,\ 0),\ (5,\ 0),\ (3,\ f(4)),\ (5,\ f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같으므로~' 에 대한 추가해설(유도과정)]

ⓐ $f(x)=0$인 x는 3보다 작다. (즉, $f(3)>0$)
pf) $f(4)=\int_2^4 f(t)dt$를 보자.
$f(4)$는 $(3,\ 0),\ (4,\ 0),\ (3,\ f(4)),\ (4,\ f(4))$를 꼭짓점으로 갖는 직사각형의 넓이와 같다.
만약 $f(x)=0$인 x가 3 이상이라 가정하면, (귀류법)
$\int_3^4 f(t)dt$의 값은 이 직사각형의 넓이와 같을 수 없다.
(=직사각형의 넓이보다 항상 작은 값을 갖게 된다.)
심지어 $\int_2^3 f(t)dt$의 값은 $f(t)$가 구간 $(2,\ 3)$에서 음수이므로 정적분 값도 음수이다.
이는 조건에 모순이므로 $f(x)=0$인 x는 3보다 작다.
또한 $f(x)$는 증가함수이므로, $x\geq 3$이면 $f(x)>0$.

ⓑ $\int_3^5 f(t)dt=2f(4)$
pf) 정적분의 값=둘러싸인 넓이가 되려면, 적분구간 내에서 $f(t)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다. (부호가 양수이면 그대로, 부호가 음수이면 정적분의 값에 -1을 곱해줘야 둘러싸인 넓이)

ⓐ에서 $x\geq 3$이면 $f(x)>0$임을 보였으므로 적분구간 $3\sim5$에서 $f(t)$의 부호는 바뀌지 않는다.
즉, 정적분의 값=둘러싸인 넓이이고, $f(x)$는 $(4,\ f(4))$에 대해 점대칭이므로
$x=3,\ y=f(4),\ y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이와
$x=5,\ y=f(4),\ y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 같다.
$\int_3^5 f(t)dt$에서 $x=5,\ y=f(4),\ y=f(x)$로 둘러싸인 부분을
$x=3,\ y=f(4),\ y=f(x)$로 둘러싸인 부분으로 옮겨주면 점 $(3,\ 0),\ (5,\ 0),\ (3,\ f(4)),\ (5,\ f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같음을 알 수 있다.

($cf.$ 적분구간 내에서 함숫값의 부호가 바뀌지 않아야 기하학적으로 증명이 되지만, 사실 (가)식을 적분구간 $[0,\ 1]$에서 적분한 후 좌변의 적분에 치환적분을 적당히 적용시켜주면 함숫값의 부호에 상관없이 $\int_3^5 f(t)dt=2f(4)$임을 보일 수 있다.)

1회 예상 등급컷, 난이도 탑 3			
등급컷	원점수	난이도 Top	문제번호
1등급	92	1위	30번 ★
2등급	88	2위	29번 ★
3등급	83	3위	21번

★ Warning ★

- 위 자료는 저자 및 검토진들의 주관적인 생각과 경험을 근거로 예상한 자료이므로 '참고'만 하세요.
- 예상 등급컷은 11월 기준입니다.
  (6~9월에는 좀 더 어렵게 느낄 수 있습니다.)

제 2 교시

수학 영역(나 형)

홀수형

5지선다형

1. $3^{-1}\times 9^{2}$의 값은? [2점]

① 81 ② 27 ③ 9 ④ 3 ⑤ 1

2. 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{0, 3, 6\}$에 대하여 $n(A-B)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$ 에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=2t+4$$

일 때, $t=2$에서의 속도는? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n}+2^{n}}{3^{n+1}+2^{n}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

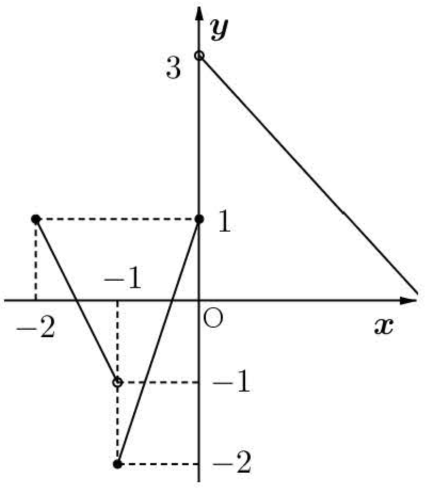
5. 함수 $f(x)=\begin{cases} -2x & (x<1) \\ x^2-a & (x \ge 1) \end{cases}$ 가 $x=1$에서 연속일 때, a의 값은? [3점]

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

6. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=\begin{cases} x+a & (x \ne 5) \\ a & (x=5) \end{cases}$ 가 정의되기 위한 a의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0+} f(x) + \lim_{x\to -1-} f(x)$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

8. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 두 부분집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 4, 5\}$에 대하여 집합 $(A \cup B^C)^C$의 모든 원소의 합은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

9. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(B), \quad \mathrm{P}(A \cap B)=\frac{1}{8}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

10. 두 함수

$$f(x)=x, \quad g(x)=x^2-2x$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

11. 10개의 문자 E, Y, E, C, O, N, T, A, C, T를 배열하여 만들 수 있는 문자열 중 하나를 고를 때, 두 개의 E가 서로 이웃한 문자열을 고를 확률은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

12. 1, 2를 포함한 5개의 자연수로 9를 분할하는 방법의 수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

13. 음이 아닌 정수 x, y, z, w에 대하여 방정식 $x+y+z=4^{2-w}$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는? [3점]

① 169　② 171　③ 173　④ 175　⑤ 177

14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$라 하자.

$S_n=\frac{3n+1}{n}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-a_n}{1+a_n}$의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

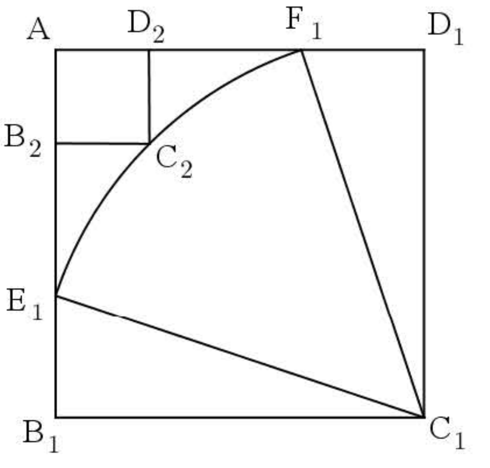
15. 명제

'$x \geq 4$ 이면 $x^2-6x+a \geq 0$ 이다.'

가 참이 되도록 하는 a의 최솟값은? [4점]

① 12 ② 11 ③ 10 ④ 9 ⑤ 8

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $AB_1C_1D_1$의 두 변 AB_1, AD_1을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 중심을 C_1으로 하고 두 점 E_1, F_1을 지나는 부채꼴을 그린 후 사각형 $AB_2C_2D_2$가 정사각형이 되도록 변 AB_1 위의 점 B_2, 호 E_1F_1 위의 점 C_2, 변 AD_1 위의 점 D_2를 잡는다.
이와 같은 방법으로 중심을 C_n으로 하고 두 변 AB_n, AD_n을 $2:1$로 내분하는 점 E_n, F_n을 지나는 부채꼴을 그린 후 사각형 $AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$가 정사각형이 되도록 변 AB_n 위의 점 B_{n+1}, 호 E_nF_n 위의 점 C_{n+1}, 변 AD_n 위의 점 D_{n+1}를 잡는다.
사각형 $AB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



…

① $\frac{81}{155}(6\sqrt{5}-5)$ ② $\frac{81}{145}(6\sqrt{5}-5)$ ③ $\frac{486}{155}\sqrt{5}$
④ $\frac{81}{155}(6\sqrt{5}+5)$ ⑤ $\frac{81}{145}(6\sqrt{5}+5)$

17. 수열 $\{a_n\}$은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \begin{cases} a_m + 3 & (n\text{이 홀수일 때}) \\ 2a_m & (n\text{이 짝수일 때}) \end{cases} \quad \left(\text{단, } m = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

를 만족시킨다. $a_6 + a_8 = 26$일 때, a_{12}의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않는 최대의 정수이다.) [4점]

① 20 ② 18 ③ 16 ④ 14 ⑤ 12

18. 함수 $f(x) = ax(x-6)$ $(a>0)$와 6이하의 음이 아닌 정수 k에 대하여 ${}_6\mathrm{C}_k \times f(k)$의 최솟값이 -10일 때, 상수 a의 값을 구하는 과정이다.

> i) $k=0$ or 6일 때,
> ${}_6\mathrm{C}_k \times f(k) = 0$ 이다.
>
> ii) $1 \le k \le 5$일 때,
> ${}_6\mathrm{C}_k = \dfrac{6!}{\boxed{\text{(가)}} \times k!}$ 이므로
> ${}_6\mathrm{C}_k \times f(k) = -\dfrac{6!a}{(5-k)!(k-1)!}$ 이다.
> $\dfrac{4!}{(5-k)!(k-1)!} = {}_4\mathrm{C}_{k-1}$ 이므로,
> ${}_6\mathrm{C}_k \times f(k)$는 $k = \boxed{\text{(나)}}$ 에서 최솟값을 갖는다.
>
> i), ii)에 의하여, ${}_6\mathrm{C}_k \times f(k)$의 최솟값이 -10이 되도록 하는 a의 값은 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(k)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 숫자를 각각 p, q라 할 때, $g\left(\dfrac{1}{2pq}\right)$의 값은? [4점]

① 2 ② 6 ③ 24 ④ 48 ⑤ 120

19. 함수 $y=\frac{1}{x}(x>0)$의 그래프를 x축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프 위에 점 P가 있을 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하자. 원점 O에 대하여 사각형 $\mathrm{OH_1PH_2}$의 둘레의 길이의 최솟값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

20. 자연수 a와 정규분포 $\mathrm{N}(10, 2^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $x \geq a$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\mathrm{P}(a \leq X \leq x)$$

라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

<보 기>

ㄱ. $a=6$일 때, $f(14)=0.9544$
ㄴ. $f(a+2)$의 최댓값은 0.3830이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0.7$의 실근이 존재하지 않기 위한 자연수 a의 최솟값은 9이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 좌표평면에서 자연수 m과 함수 $f(x)=\left|\frac{30}{x-2m}\right|$에 대하여 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a는 $2m$이 아닌 자연수이고 b는 자연수이다. (나) $b \leq f(a)$

자연수 n에 대하여 $a>n$인 점 P의 개수를 A_n, $a<n$인 점 P의 개수를 B_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{2m} A_n > \sum_{n=2m}^{4m-1} B_n$가 되도록 하는 m의 최댓값은? [4점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

단답형

22. $\log_3 54 - \log_9 4$의 값을 구하시오. [3점]

23. 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(3X)=6$, $\mathrm{V}(2X)=36$일 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_4=7$, $a_1+a_3+a_5=9$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

25. 어떤 자연수 n보다 작거나 같은 자연수 m에 대하여 $\int_{-1}^{1} x^m dx = 0$을 만족시키는 자연수 m의 개수가 5일 때, 가능한 모든 n의 합을 구하시오. [3점]

26. A, B를 포함한 6명의 학생들이 검은색 볼펜 3개, 빨간색 볼펜 2개, 파란색 볼펜 1개를 모두 1개씩 나눠가지려 한다. A, B가 같은 색의 볼펜을 받았을 때, 그 색이 검은색일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 함수 $f(x)=\begin{cases} |x+1| & (x<0) \\ x(x-3)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$ 가 극대, 극소가 되도록 하는 x의 개수를 각각 m, n이라 하자. $5m+n$의 값을 구하시오. [4점]

28. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $a_2\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{4}{a_3}\right)=4$, $S_6+S_3=60$이다. $a_4+a_5+a_6$의 값을 구하시오. (단, 모든 자연수 k에 대하여 $a_k \neq 0$이다.) [4점]

29. 다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)$으로 가능한 값의 개수는 n이고 그 중 최댓값은 M이다. $M+n$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $(x-n)^n f'(n) \le 0$ (단, $n=1, 2, 3$)
> (나) 극대 또는 극소인 점이 오직 하나이다.
> (다) $\left|f'\left(\frac{5}{2}\right)\right|=9$

30. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 연속함수

$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge 0) \\ g(x) & (x < 0) \end{cases}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t \to -\infty} \frac{h(t)}{t^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{h(t)}{t^3} = 1$
> (나) $\{x \mid \lim_{t \to 0} \{h'(x-t)h'(x+t)\} \le 0\} = \{-1, 1\}$

$h(0)<0$ 이고 함수 $y=|h(x)|$가 두 점에서만 미분가능하지 않을 때, $h(3)h(-3)$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2019학년도 기대 모의고사 Vol.1 해설지

수학 영역(나형)

저자	김 기 대
약력	고려대학교 수학과 13학번 대학수학능력시험 수학 가형 3연속 만점 2016~2019 학년도 기대모의고사 저자 (전 문항 출제 및 해설) 2018년 오르비 수학연구소장

검토진	유준희 고려대학교 수학과 졸 고려대학교 수학대학원 석.박사 통합과정 고려대학교 수학과 학부생 검토진 한상범 이정윤 박주용 박강균 이재원 권순엽 정혜원 서울대학교 경제학과 학부생 검토진 김지언 김성태 (18수능수학 만점)

기대모의고사의 문제오류 제기, 오타제보 등은
kidae6150@naver.com로 제보해주세요.
정오표는
atom.ac/books/5434에서 보실 수 있습니다.

〈기대모의고사 출판 계획〉

Volume	출판시기	교재 컨셉	평균 1등급컷
Vol.1 가형 (ver. 2019) 4회분	18년 6월	* 최근 수능과 제일 비슷한 성격의 시험지구성 (27+3) * 212930 ⇒ 미분, 기백, 적분	89
Vol.2 가형 (ver. 2019) 3회분	18년 8월 (6평 반영)	* 212930 이외의 4점문항 난이도 상승 및 여러 상황 구현 ⇒ 체감난이도 상승	88~92 (예정)
Vol.1 나형 (ver. 2019) 4회분	18년 6월	* 최근 수능과 제일 비슷한 성격의 시험지구성 (28+2) * 212930 ⇒ 개수/확통/미적	89
Vol.2 나형 (ver. 2019) 3회분	18년 8월 (6평 반영)	* 212930 이외의 4점문항 난이도 상승 및 여러 상황 구현 ⇒ 체감난이도 상승	88~92 (예정)

Vol.2는 출간 미정입니다. 만약 출간하게 된다면,
Vol.1은 Vol.2와 겹치는 문항이 전혀 없습니다.

2019 기대모의고사에는 작년 기대모의고사 우수문항이 포함되어 있습니다.

〈기대모의고사 특징〉

1. 현 수능수학의 트렌드 (27+3, 28+2)가 시작된 13수능부터 새로운 교육과정이 반영된 최신 수능까지의 트렌드가 녹아든 모의고사.

이 교재의 난이도의 스펙트럼은 13, 14수능보다 약간 어려운 난이도부터 16, 17수능 정도의 난이도까지입니다.

기대모의고사 Vol.1 나형은 최신 교육과정이 적용된 17, 18학년도 수능 21, 29, 30번에 출제되었던 조합인 '수학 II' 1문제, '미분 또는 확률과 통계' 1문제, '미적분' 1문제 조합을 유지했고 킬러 이외의 4점 문항도 난이도가 적절하고 배울 것이 있는 문항들로 구성했습니다.

2. 평가원이 보여주었던 출제방침 및 습관 적극 반영

중단원별로 고른 문제 출제, 소단원별 교과이수과정표 참고, 수능과 똑같은 과목별 출제문항비율 등의 평가원의 굵직한 출제 매뉴얼부터 객관식 1번~20번 사이의 정답분포를 고르게 배치하는 '답갯수법칙'(물론 작년 수능엔 깨졌지만.), 문제 상황의 표현 등등 평가원의 사소한 출제습관 까지도 교재에 담아냈습니다.

3. 대학수학능력시험에서 필요한 사고력과 필수개념 활용을 강조한 문항구성

발상적인 문제는 출제하지 않았습니다.
수능에서 요구하는 '교과서적 지식'과 '사고력'만으로 자연스럽게 풀리는 문제들로만 구성된 교재입니다.

〈기대모의고사 온라인 해설강의〉

본 모의고사의 해설 강의를 저자가 직접 합니다.
class.orbi.kr
에서 저자 직강 해설강의를 찾아보세요.
(8월 말 쯤 업로드 예정)

〈자작물을 보호해주세요.〉

최근 '컨텐츠'의 중요성이 부각되는 교육계에서
자작물을 도용하는 사례가 늘고 있습니다.

교재 원형을 수업교재로 사용하는 것은 상관없으나,
다음 사례들은 모두 저작권법에 위배됩니다.

1) 스캔파일, PDF변환파일
2) 한글로 원본 그대로를 타이핑, 2차 저작물 제작
3) 일부 문항만을 따서 교재에 사용
(저자의 허락 없이는 출처를 기재해도 위배대상)

이외에도 본 교재를 영리적 목적으로 사용한 사례가
있다면 제보해주세요.

공익을 위한 일 이외에는 그 누구에게도 본 교재의
문제사용을 허용하지 않겠습니다.
(검토진 포함)
저자에게 사용을 허락받았다, 과거에 자신에게 배우던
제자라 상관없다는 등의 거짓말에 속지 마세요.

또한 이 모의고사의 문제들은 100% 순수창작
문제입니다. 다른 모의고사들처럼 기존에 있던 문제들을
참고해서 만든 문제들이 아닙니다.
수능 기출문제조차도 '단순변형'이 아닌 경향,
표현을 참고하는 수준으로만 반영되었기 때문에
타 교재에서 같은 문제가 나오기 힘듭니다.

따라서 **이 교재의 문제가 노골적으로 포함되어 있는**
타 교재 혹은 학원 수업물이 있다면
kidae6150@naver.com로 메일 부탁드립니다.
관련사실을 입증하려면 증거자료가 필요하기 때문에,
증거자료(문제가 도용된 교재나 사진)를 확보하신 후
제보해주시면 **손해배상금의 일부를 드리겠습니다.**

본 모의고사의 문제들과 해설들은 저자와 검토진들의
정성과 노력으로 만들어진 자작물입니다.

학생 여러분들의 적극적인 신고가 좋은 컨텐츠를 만드는
원동력이 됩니다.

2019학년도 기대 모의고사 Vol.1
수학 나형 〈3회〉 해설

이 교재의 문제가 포함되어 있는 타 교재 혹은 학원 수업물이 있다면
kidae6150@naver.com 메일 부탁드립니다.
(해설집 표지 2Page 참고)

문제	답	문제	답	문제	답
1	②	11	①	21	②
2	④	12	①	22	3
3	③	13	②	23	13
4	①	14	③	24	10
5	⑤	15	⑤	25	19
6	②	16	④	26	7
7	③	17	①	27	8
8	④	18	②	28	48
9	⑤	19	④	29	218
10	③	20	⑤	30	16

1. $3^{-1}\times 9^2 = 3^3 = 27$

2. $A-B=\{1, 2, 4, 5\}$이므로 $n(A-B)=4$

3. $x'(t)=2$이므로 시각 t에 관계없이 항상 속도는 2이다.

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$.

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=-2$, $\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)=1-a$이므로 $-2=-a+1$여야 $x=1$에서 연속이다. 따라서 $a=3$.

6. $x=1, 2, 3, 4, 5$를 대입하여 $f(x)$의 치역의 원소들을 모두 구해보면 $a, 1+a, 2+a, 3+a, 4+a$이다. 다섯 수가 모두 X에 포함되어야 하므로 $a=1$이어야 한다.

7. 그래프를 통해 $x=0$에서의 우극한은 3, $x=-1$에서의 좌극한은 -1임을 알 수 있다. 따라서 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to -1-}f(x)=2$

8. $B^C=\{2, 3\}$이므로 $A\cup B^C=A=\{1, 2, 3\}$이다. 따라서 $(A\cup B^C)^C=\{4, 5\}$이므로 원소의 합은 9이다.

9. $\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(B)$에서 $1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$ ($\because$독립) 이므로 두 식을 $\mathrm{P}(A)$로

정리해주면 $\left(\mathrm{P}(A)-\frac{1}{2}\right)^2=0$. 따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이다.

10. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 교점은 $(0, 0)$, $(3, 3)$이고 구간 $[0, 3]$에서 $f(x)>g(x)$을 만족시킨다. (그래프를 그려보자.)
따라서 두 함수로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_0^3\{f(x)-g(x)\}dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$ 이다.

11. E, Y, E, C, O, N, T, A, C, T에는 E, C, T가 2개씩, Y, O, N, A가 1개씩 있으므로 나열하는 경우의 수는 $\frac{10!}{2!2!2!}$.
이 중 두 개의 E가 모두 이웃한 문자열의 개수는 E 2개를 하나로 본다면 $\frac{9!}{2!2!}$으로 계산할 수 있으므로, $\dfrac{\frac{9!}{2!2!}}{\frac{10!}{2!2!2!}}=\frac{1}{5}$이다.

12. $9=5+1+1+1+1$
$=4+2+1+1+1$
$=3+3+1+1+1$
$=3+2+2+1+1$
$=2+2+2+2+1$
중 1, 2를 포함한 분할은 3가지이다.
(1, 2를 고정해둔 후 자연수 6을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수를 구해도 된다.)

13. $i)$ $w=0$일 때, ${}_3\mathrm{H}_{16}$
$ii)$ $w=1$일 때, ${}_3\mathrm{H}_4$
$iii)$ $w=2$일 때, ${}_3\mathrm{H}_1$ 이므로, ${}_3\mathrm{H}_{16}+{}_3\mathrm{H}_4+{}_3\mathrm{H}_1=171$

14. $S_n=\frac{3n+1}{n}$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=3$으로 수렴한다.

즉, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$이어야 한다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-a_n}{1+a_n}=\frac{3-0}{1+0}=3$이다.

출제자의 한마디
S_n이 주어졌다고 $S_n-S_{n-1}=a_n$을 무조건 구하고 보는 '기계적 풀이'는 지양하자. 문제에서 묻고 있는 것이 무엇인지 정확히 파악한 후, 필요한 정보만으로 문제들을 풀 수 있도록 훈련하는 것이 중요하다.

15. x^2-6x+a는 $x=3$에서 최솟값 $a-9$를 갖는 이차함수 므로 $x\geq 4$에서 x^2-6x+a의 최솟값은 $x=4$ 일 때인 $a-8$이다.

따라서 $a-8\geq 0$여야 문제의 명제를 만족시키므로 a의 최솟값은 8이다.

16. 정사각형 $AB_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 l이라 하면 선분 AC_2의 길이는 $\sqrt{2}l$이다.

또한 선분 C_2C_1의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이인 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$이고 AC_1의 길이는 $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2}l+\sqrt{10}=3\sqrt{2}$이다. 따라서 $l=3-\sqrt{5}$.

수열 $\{S_n\}$의 첫 번째 항은 정사각형 $AB_1C_1D_1$의 넓이인 9이고 공비는 $\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{14-6\sqrt{5}}{9}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{9}{1-\frac{14-6\sqrt{5}}{9}}=\frac{81}{6\sqrt{5}-5}=\frac{81}{155}(6\sqrt{5}+5)$$ 이다.

17. 문제에서 제시된 수열의 귀납적 정의에 의하여
$a_6=2a_3=2(a_1+3)$, $a_8=2a_4=4a_2=8a_1$ 이므로
$a_6+a_8=10a_1+6=26$에서 $a_1=2$.

따라서 $a_{12}=2a_6=4a_3=4(a_1+3)=20$이다.

18. ${}_6\mathrm{C}_k=\frac{6!}{(6-k)!\times k!}$이므로 $g(k)=(6-k)!$.

${}_6\mathrm{C}_k\times f(k)=-\frac{6!a}{(5-k)!(k-1)!}$이고,

$\frac{4!}{(5-k)!(k-1)!}={}_4\mathrm{C}_{k-1}$이므로

${}_6\mathrm{C}_k\times f(k)=-30a\times {}_4\mathrm{C}_{k-1}$임을 알 수 있다.

또한 $k=3$일 때 ${}_4\mathrm{C}_{k-1}$이 최댓값 6을 가지므로 $p=3$.
(참고) ${}_4\mathrm{C}_{k-1}$이 최대일 때가 $-30a\times{}_4\mathrm{C}_{k-1}$가 최소일 때이다.)
${}_6\mathrm{C}_3\times f(3)=-180a$이고 이 값이 -10이어야 하므로

이어야 하므로 $a=\frac{1}{18}$. 따라서 $q=\frac{1}{18}$이고 $g\left(\frac{1}{2pq}\right)=g(3)=6$.

19. $y=\frac{1}{x}$를 x축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 함수는

$y=\frac{1}{x-2}$이다. 따라서 점 P를 $\left(a, \frac{1}{a-2}\right)$로 둘 수 있다.

옮기기 전 함수 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$의 모든 점의 x, y좌표가 항상 양수이므로, 점 P의 x좌표는 2보다 큰 양수이다. 따라서 $a>2$.

사각형 OH_1PH_2의 둘레의 길이는 $2\left(a+\frac{1}{a-2}\right)$로 구할 수 있는데, 식을 변형하여 산술기하평균 부등식을 사용하기 적합한 식으로 만들어보자.

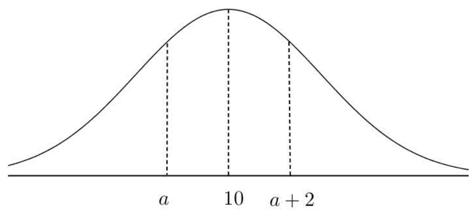
$a+\frac{1}{a-2}=(a-2)+\frac{1}{a-2}+2\geq 2\sqrt{1}+2=4$
(단, 등호는 $a=3$일 때 성립)

따라서 사각형 OH_1PH_2의 둘레의 길이의 최솟값은 $2\times4=8$이다.

20.

ㄱ.
$a=6$일 때, $f(14)=\mathrm{P}(6\leq X\leq 14)=2\times\mathrm{P}(10\leq X\leq 14)$
($\because$확률변수의 확률밀도함수의 그래프가 평균인 $x=10$에 대하여 대칭이므로) 이고,
$\mathrm{P}(10\leq X\leq 14)=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.4772$ 이므로
$f(14)=0.9544$이다. (ㄱ.은 참)

ㄴ.
$f(a+2)=\mathrm{P}(a\leq X\leq a+2)$인데, 이 값이 최대일 때는 a와 $a+2$의 평균이 확률변수 X의 평균인 10과 같을 때가 최대이다. 즉, $a=9$일 때이다. (기출에 빈출된 유형이다. 아직도 모르고 있었다면, 아래 그래프로 이해하자.)



이 때의 $f(a+2)=f(11)$의 값을 구해보면

$f(11)=\mathrm{P}(9\leq X\leq 11)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\leq Z\leq\frac{1}{2}\right)=2\times0.1915=0.3830$

이다. (ㄴ.도 참)

ㄷ.
확률변수 X의 확률밀도함수와 x축 사이의 부분의 넓이는 1이다.
따라서 $f(x)=\mathrm{P}(a\leq X\leq x)$의 값은 x가 커지면 커질수록 큰 값을 가지지만, x가 매우 큰 유한한 숫자 (ex. 10억, 100조 등) 커져도 그 값은 $\mathrm{P}(a\leq X)$ 미만임을 알 수 있다.

즉 $\mathrm{P}(a\leq X)>0.7$이어야 방정식 $\mathrm{P}(a\leq X\leq x)=0.7$의 해가 존재할 수 있으므로, 반대로 $\mathrm{P}(a\leq X)<0.7$이면 방정식 $\mathrm{P}(a\leq X\leq x)=0.7$의 해가 존재하지 않을 것이다.

$a\geq 10$일 땐 $\mathrm{P}(a\leq X\leq x)$의 값이 0.7 이하임이 자명하다.
(10이 평균이므로, 정확히는 0.5 이하이다.)

$a=9$일 때, $\mathrm{P}(9\leq X)=\mathrm{P}(-0.5\leq Z)=0.6915$ 이므로 0.7보다 작은 값을 가진다.
$a=8$일 때, $\mathrm{P}(8\leq X)=\mathrm{P}(-1\leq Z)=0.8413$이므로 0.7보다 큰 값을 가진다.

$1 \le a \le 7$인 자연수일 때는 모든 $\mathrm{P}(a \le X)$ 값들이 $\mathrm{P}(8 \le X)$값인 0.8413보다 크기 때문에, 자명하게 0.7보다 큰 값을 가진다.

종합하면 $a \ge 9$인 자연수일 때 방정식 $f(x) = 0.7$의 해가 존재하지 않는다. (ㄷ.도 참.)

21. $f(x)$는 직선 $x = 2m$에 대하여 대칭인 함수이다.

<u>$f(4m)$의 값이 1보다 작다고 가정해보자. (귀류법의 시작)</u>

A_1과 B_{4m-1}을 비교해보면
($cf.$ 이 둘을 비교하는 이유는 1과 $4m-1$의 평균이 $2m$이고, $f(x)$가 $x = 2m$에 대하여 대칭이기 때문이다.)

$a > 1$이고 문제의 조건을 만족시키는 점 P의 x좌표가 될 수 있는 값은 2부터 $4m-1$ 까지다. ($\because f(4m)$의 값이 1보다 작으므로 P($4m$, 자연수)인 P가 존재할 수 없기 때문에.)

또한 $a < 4m-1$이고 문제의 조건을 만족시키는 점 P의 x좌표가 될 수 있는 값은 마찬가지로 1부터 $4m-2$ 까지다.
따라서 $A_1 = B_{4m-1}$이다.
마찬가지로 $A_2 = B_{4m-2}$, $A_3 = B_{4m-3}$, $\cdots$, $A_k = B_{4m-k}$임을 알 수 있어서 $f(4m)$의 값이 1보다 작다고 가정하면
$\sum_{n=1}^{2m} A_n = \sum_{n=2m}^{4m-1} B_n$가 되어서 모순이다.

그렇다면 가정이 잘못된 것인데, 과연 $f(4m)$의 값이 1 이상이라면 $\sum_{n=1}^{2m} A_n > \sum_{n=2m}^{4m-1} B_n$을 만족할까?

$a < 4m-1$이고 문제의 조건을 만족시키는 점 P의 x좌표가 될 수 있는 값은 여전히 1부터 $4m-2$ 까지인 반면

$a > 1$이고 문제의 조건을 만족시키는 점 P의 x좌표가 될 수 있는 값은 2부터 최소 $4m$ 까지다. 따라서 $A_1 > B_{4m-1}$.

마찬가지로
$A_2 > B_{4m-2}$, $A_3 > B_{4m-3}$, $\cdots$, $A_{2m-1} > B_{2m+1}$, $A_{2m} = B_{2m}$
이므로 결국 $\sum_{n=1}^{2m} A_n > \sum_{n=2m}^{4m-1} B_n$가 되기 위해선 $f(4m) \ge 1$임을 알 수 있다.

$f(4m) = \dfrac{30}{2m} \ge 1$로부터 $15 \ge m$이므로 m의 최댓값은 15이다.

출제자의 한마디
그래프가 어떤 점, 어떤 직선에 대하여 대칭인지 파악하는 것은 단원을 불문하고 중요한 관찰이다.

22. $\log_3 54 - \log_9 4 = \log_3 \dfrac{54}{2} = 3$이다.

23. $\mathrm{E}(3X) = 3\mathrm{E}(X) = 6$, $\mathrm{V}(2X) = 4\mathrm{V}(X) = 36$이므로
$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 9 + 2^2 = 13$.

24. 세 수 a_1, a_3, a_5도 등차수열을 이루므로
$a_1 + a_3 + a_5 = 3a_3 = 9$이고, $a_3 = 3$임을 알 수 있다.
따라서 $a_4 = 4$이고, 공차 d는 $a_4 - a_3 = 1$임을 알 수 있다.
따라서 $a_{10} = a_3 + 7d = 10$임을 알 수 있다.

25. m이 홀수이면 $y = x^m$의 그래프는 원점대칭,
m이 짝수이면 $y = x^m$의 그래프는 y축 대칭이므로
$\int_{-1}^{1} x^m dx = 0$을 만족시키려면 m은 홀수여야 한다.
5번째 홀수가 9이며, 이 값이 n 이하의 최대의 홀수여야 하므로 가능한 값은 $n = 9$, $n = 10$이다. 따라서 정답은 19.

26. i) A, B가 검정색 볼펜을 받았을 때,
4명 중 1명을 골라 나머지 검정색 볼펜을 받게 하고, 나머지 3명 중 1명을 골라 파랑색 볼펜을 받게 하면 나머지 2명은 자연스럽게 빨강색 볼펜을 받게 된다.
이 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 12$

i)A, B가 빨강색 볼펜을 받았을 때,
4명 중 1명을 골라 파랑색 볼펜을 받게 하면 나머지 3명은 자연스럽게 검정색 볼펜을 받게 된다.
이 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$

따라서 $\dfrac{12}{12+4} = \dfrac{3}{4}$이다.

27. (해설에 앞서)
극대와 극소인 점에서 반드시 미분가능이거나 연속일 필요가 없다.

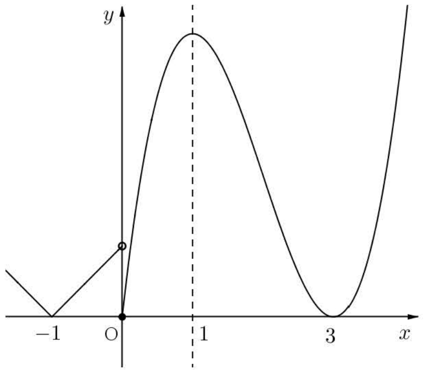
(더 깊게 파고들면, 굳이 그 점에서 연속인 필요조차 없다. 자세한 내용은 orbi.kr/00011507827 칼럼을 읽어보도록 하자.)

극댓값의 정의는 '$x = a$를 포함하는 어떤 개구간에 대하여 그 개구간 내의 모든 원소 x들에 대하여 $f(x) < f(a)$을 만족하면 $f(a)$는 $f(x)$의 극댓값' 이고

극솟값의 정의는 '$x = a$를 포함하는 어떤 개구간에 대하여 그 개구간 내의 모든 원소 x들에 대하여 $f(x) > f(a)$을 만족하면 $f(a)$는 $f(x)$의 극솟값' 라고 <u>**교과서에 나와있다.**</u>

(해설)

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



극대, 극소의 정의에 의하여

$x=-1, x=0, x=1, x=3$에서 각각 극소, 극소, 극대, 극소임을 알 수 있다.

따라서 $m=1, n=3$이므로 $5m+n=8$ 이다.

28. 등비수열의 공비를 r이라 하자.

$a_2\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{4}{a_3}\right)=4$에서 $a_2=a_1r=\dfrac{a_3}{r}$이므로 $r+\dfrac{4}{r}=4 \Leftrightarrow$ $r^2-4r+4=0$이다. 따라서 $r=2$.

$i)$ 평범한 전개

$S_6+S_3=\dfrac{a_1(1-r^6)+a_1(1-r^3)}{1-r}=70a_1$이므로 $a_1=\dfrac{60}{70}=\dfrac{6}{7}$이다.

따라서 $a_4+a_5+a_6=\dfrac{6}{7}\times(2^3+2^4+2^5)=48$이다.

$ii)$ 식의 형태에 집중한 방법

$S_6+S_3=60$에서 약간의 관찰을 해보자.

$S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$인데, $\dfrac{a_4}{a_1}=\dfrac{a_5}{a_2}=\dfrac{a_6}{a_3}=r^3=8$이므로

$S_6=(a_1+a_2+a_3)+8(a_1+a_2+a_3)=9S_3$임을 알 수 있다.

즉, $S_6+S_3=10S_3=60$에서 $S_3=6$임과 $S_6=9S_3=54$임을 알 수 있다.

문제에서 묻는 것은 $a_4+a_5+a_6$, 즉 S_6-S_3이므로 정답은 $54-6=48$이다.

출제자의 한마디
등차수열, 등비수열 문제는 대부분 특정 형태를 띠고 있는 경우가 대다수이다. 그 형태에 유의해서 문제에 접근을 한다면 훨씬 다양한 풀이가 가능하다.

29. (가)조건을 보면 $(x-1)f'(1)\le 0$, $(x-2)^2f'(2)\le 0$, $(x-3)^3f'(3)\le 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

$(x-1)f'(1)\le 0$와 $(x-3)^3f'(3)\le 0$를 봐보자.

$(x-1)f'(1)\le 0$를 보면, $x=1$의 좌, 우에서 $(x-1)$의 부호가 바뀜을 알 수 있다.

($x>1$일 때는 $x-1>0$이고, $x<1$일 때는 $x-1<0$이다.)

하지만 $f'(1)$은 상수이기 때문에, $f'(1)$이 0이 아니라고 가정하면, $x=1$의 좌, 우 근방에서 $(x-1)f'(1)$의 부호가 바뀐다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)f'(1)\le 0$를 만족한다는 조건을 충족시키지 못한다.

이는 $f'(1)$이 0이 아니라고 가정한 것이 잘못된 것이다.

따라서 $f'(1)=0$이다. (귀류법을 사용)

(참고 : 혹은, $x=0, x=2$를 $(x-1)f'(1)\le 0$에 대입하여 $f'(1)\ge 0$, $f'(1)\le 0$를 얻음으로써 $f'(1)=0$임을 알아도 무방하다. 하지만 이 해설 역시 $x=1$를 기준으로 좌, 우의 x값을 잡아줘야 된다는 점에서 위의 풀이와 비슷하다.)

마찬가지로 $(x-3)^3f'(3)\le 0$에서 $(x-3)^3$의 부호가 $x=3$의 좌, 우에서 부호변화가 생기므로, 위의 논리와 똑같이 설명하면 $f'(3)=0$임을 알 수 있다.

위에서 구한 두 조건 $f'(1)=f'(3)=0$에서 $f'(x)=0$은 두 근 $1, 3$을 갖는 삼차방정식 이므로

$f'(x)=k(x-1)(x-3)(x-a)$ $(k\neq 0)$

(단, <u>k는 $f'(x)$의 최고차항의 계수이고, a는 상수</u>)로 둘 수 있다.

$(x-2)^2f'(2)\le 0$에서는 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)^2$의 부호가 음수인 경우가 없기 때문에, 저 부등식이 항상 성립하기 위해서는 $f'(2)\le 0$여야 한다.

$f'(2)=k\times 1\times(-1)\times(2-a)=k(a-2)$ 이므로

<u>$k>0$일 때, $a\le 2$이고 $k<0$일 때, $a\ge 2$</u>임을 알 수 있다.

이제 (나)조건을 보자.

$f(x)$의 극대 또는 극소인 점은 오직 하나이기 위해선 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 어떤 x가 오직 하나만 존재해야 한다.

a가 1이나 3이 아닌 다른 숫자라고 가정해보자. 그러면 $f'(x)=0$는 서로 다른 실근을 3개를 가지는 삼차방정식이 된다. 즉, $x=1, 3, a$일 때 x의 좌, 우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌게 되므로, $f(x)$가 극값을 3개 가지게 된다.

이는 (나)조건에 모순. 따라서 귀류법에 의하여 a는 1이나 3이어야 한다.

$i)$ $k>0$ 일 때,

$a\le 2$를 만족해야하고 a는 1이나 3이어야 하므로 만족하는 a는 1뿐이다. 따라서 $f'(x)=k(x-1)^2(x-3)$.

따라서 $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{9k}{8}=-9$ ($\because k$가 양수이므로 $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{9k}{8}<0$,

$\left|f'\left(\frac{5}{2}\right)\right|=9$) 에서 $k=8$ 이고

$f'(x)=8(x-1)^2(x-3)$

$ii)$ $k<0$ 일 때,

$a\geq 2$를 만족해야하고 a는 1이나 3이어야 하므로 만족하는 a는 3뿐이다. 따라서 $f'(x)=k(x-1)(x-3)^2$.

$f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3k}{8}=-9$ ($\because k$가 음수이므로 $f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3k}{8}<0$,

$\left|f'\left(\frac{5}{2}\right)\right|=9$)에서 $k=-24$이고

$f'(x)=-24(x-1)(x-3)^2$

$i), ii)$에 의하여 $f'(0)$의 값으로 가능한 값은 각각 -24, 24×9 으로 총 2개이고, 최댓값은 216이므로 $M+n=218$이다.

30. 사고가 복잡한 문제이기 때문에 밑줄 쳐진 부분이 이해가 되었다면 알아보기 쉽도록 그 부분에 동그라미를 쳐놓자.

우선 함수 $h(x)$가 연속함수이므로 $f(0)=g(0)$을 만족해야 한다.

(가) 조건에서 $\lim_{t\to-\infty}\frac{h(t)}{t^2}=1$을 통해 $g(x)$의 차수는 이차이며 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

또한 $\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t^3}=1$을 통해 $f(x)$의 차수는 삼차이며 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

이제 (나) 조건을 봐보면, $x\neq 0$인 모든 실수 x에서

$\lim_{t\to 0}h'(x-t)=h'(x)$, $\lim_{t\to 0}h'(x+t)=h'(x)$이므로

($\because x\neq 0$인 모든 실수 x에서 $h'(x)$는 다항함수이고, 연속이기 때문에 극한값=함숫값이 성립한다!)

$\lim_{t\to 0}h'(x-t)h'(x+t)=\{h'(x)\}^2$임을 알 수 있다.

그런데 (나) 조건의 집합의 원소가 -1, 1 뿐이므로

$h'(-1)=h'(1)=0$임을 알 수 있다.

(★다른 x에서는 $h'(x)\neq 0$이다.★)

이제 $x=0$일 때를 고려해줘야 하는데, $x=0$일 때

$\lim_{t\to 0}h'(x-t)h'(x+t)=\lim_{t\to 0}h'(-t)h'(t)$는 t에 $-t$를 대입해도 같은 식이기 때문에 $t\to 0+$일 때만 따져주면 된다.

($\lim_{t\to 0}h'(-t)h'(t)=\lim_{t\to 0+}h'(-t)h'(t)$)

$\lim_{t\to 0+}h'(-t)=g'(0)$, $\lim_{t\to 0+}h'(+t)=f'(0)$이므로

$f'(0)g'(0)>0$임을 알 수 있다.

($\because$ 0은 (나) 조건의 집합의 원소가 아니므로)

$x<0$일 때 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$이고

$h'(-1)=g'(-1)=0$이므로 $g(x)=(x+1)^2+a$ 꼴이다.

또한 $g'(0)=2$이므로 $g'(0)>0$이다. 따라서 $f'(0)>0$

($\because f'(0)g'(0)>0$)

$x\geq 0$일 때 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$이고

$f'(0)>0$, $f'(1)=0$이다.

만약 $f(x)$가 $x=1$에서 극대 혹은 극소를 갖는다고 가정해보자.

$f(x)$가 $x=1$에서 극대를 갖는다면, $x_2>1$인 어떤 x_2에서 극소를 가질 것이고, $f'(x_2)=0$을 만족시킨다.

($\because$ 최고차항의 계수가 양수인 모든 삼차함수에 대하여 극대, 극소인 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 항상 $x_1<x_2$이다.)

(삼차함수 개형을 떠올리거나 도함수인 이차함수의 개형을 떠올려보세요.)

이는 -1, 1을 제외한 다른 x에서는 $h'(x)\neq 0$이다. 라는 (나)조건에 모순이다.

또한 $f(x)$가 $x=1$에서 극소를 갖는다면 $f'(0)>0$이란 조건에 모순이다. (위에서처럼 (나)조건에 의해 모순이 생긴다.)

따라서 $f'(1)=0$이지만 $x=1$에서 $f(x)$는 극대도 극소도 아니다.

즉 $f'(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축과 만나지만 부호변화는 없는 함수여야하고, 따라서 $f'(x)=3(x-1)^2$임을 알 수 있다.

적분하면 $f(x)=(x-1)^3+b$임을 알 수 있다.

위에서 구한 사실들과 문제에서 사용하지 않은 조건을 종합하면 다음과 같다.

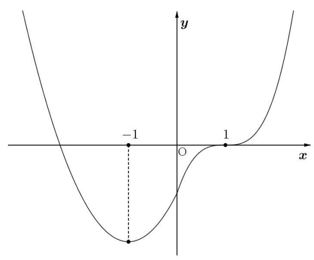
1. $f(0)=g(0)$
2. $f(x)=(x-1)^3+b$
3. $g(x)=(x+1)^2+a$
4. $h(0)<0$, $y=|h(x)|$가 두 점에서 미분가능하지 않다.

우선 $f(0)=g(0)$이므로 $1+a=-1+b$에서 $a=b-2$ 이다.

또한 $f'(0)=3$, $g'(0)=2$이므로 $f'(0)\neq g'(0)$이라서

a, b값에 관계없이 $x=0$에서 함수 $y=|h(x)|$는 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

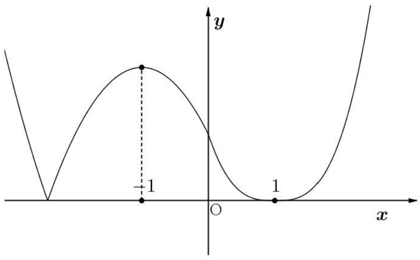
1.~4.의 조건을 만족시키도록 $y=h(x)$그래프를 그리면 다음과 같다.



$h(1)$이 0이 아닌 다른 값이라면, $y=|h(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.

($y=|h(x)|$와 x축 사이의 두 교점과 $(0, h(0))$으로 총 3개다. 이는 $h(0)<0$을 만족시키도록 x축을 그림과 다른 위치에 그려보면서 확인해보도록 하자.)

$h(1)=f(1)=0$이므로 이차함수 $g(x)$와 x축이 만나는 점에서
$y=|h(x)|$가 미분가능하지 않지만
$x=1$에서 삼차함수 $f(x)$가 x축에 접해져있기 때문에
$y=|h(x)|$가 미분가능하게 된다.
〈참고그림 : $y=|h(x)|$〉



따라서 $f(1)=0$으로부터 $b=0$이므로 $a=b-2=-2$이다.

종합하면 $f(x)=(x-1)^3$, $g(x)=(x+1)^2-2$이므로
$h(3)h(-3)=f(3)g(-3)=8\times2=16$이다.

3회 예상 등급컷, 난이도 탑 3			
등급컷	원점수	난이도 Top	문제번호
1등급	89~92	1위	30번 ★
2등급	81	2위	21번
3등급	71	3위	29번

★ Warning ★

- 위 자료는 저자 및 검토진들의 주관적인 생각과 경험을 근거로 예상한 자료이므로 '참고'만 하세요.
- 예상 등급컷은 11월 기준입니다.
  (8 ~ 10월에는 체감상 어렵게 느껴질 수 있습니다.)