01

[풀이]

지수법칙에 의하여

$8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2^{3\times\frac{1}{3}}=2$

이므로

$\therefore\ 2^2\times 8^{\frac{1}{3}}=4\times 2=8$

답 ④

02

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{3+0+0}{2+0}=\frac{3}{2}$$

답 ③

03

[풀이]

집합 A가 집합 B의 부분집합이므로

$7\in A$이면 $7\in B$이어야 한다.

따라서 a는 7일 수 밖에 없다.

답 ③

04

[풀이]

$f(3)=4$, $g(4)=5$이므로

합성함수의 정의에 의하여

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(4)=5$

답 ⑤

05

[풀이]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

$p\Rightarrow q$이므로 $P\subset Q$이다. 즉, $a\in Q$이다.

$a^2-3a-4\le 0$, $(a-4)(a+1)\le 0$

풀면

$-1\le a\le 4$

따라서 실수 a의 최댓값은 4이다.

답 ④

06

[풀이]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-a$

$f'(1)=3-a=0$

$\therefore\ a=3$

답 ②

07

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k^2-a_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k^2-\sum_{k=1}^{10}a_k$$

$=2\times 7-3=11$

답 ④

08

[풀이]

함수 $y=\sqrt{2(x+3)}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 함수

$y=\sqrt{2(x-m+3)}=\sqrt{2x-2m+6}$

의 그래프와 일치한다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$-2m+6=0$

$\therefore\ m=3$

답 ②

09

[풀이]

문제에서 주어진 유리함수의 방정식을 정리하면

$$y=\frac{3(x-1)+4}{x-1}=3+\frac{4}{x-1}$$

이 함수의 두 점근선의 방정식은 각각

$x=1$, $y=3$

$\therefore\ a+b=4$

답 ④

10

[풀이]

$x \to 1-$일 때, $f(x)$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$$

$x \to 2+$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 1-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x) = 2$$

답 ⑤

11

[풀이]

수열 $\left\{ \left(\frac{x}{5} \right)^n \right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x}{5}$인 등비수열이다.

등비급수의 수렴 조건에 의하여

$\frac{x}{5} = 0$ 또는 $-1 < \frac{x}{5} < 1$

풀면

$-5 < x < 5$

이때, 정수 x가 가질 수 있는 값을 모두 쓰면

$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

따라서 문제에서 주어진 등비급수가 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는

$2 \times 4 + 1 = 9$

답 ⑤

12

[풀이]

두 집합 $A \cap B^C$, $A \cap B$에 대하여

$(A \cap B^C) \cap (A \cap B) = \varnothing$,

$(A \cap B^C) \cup (A \cap B) = A$

이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$\therefore\ \mathrm{P}(A \cap B^C) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

답 ②

13

[풀이]

문제에서 주어진 두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\log_2 10 - \log_2 5}{2-1} = \log_2 \frac{10}{5} = \log_2 2 = 1$$

($\because$ 로그의 성질, 로그의 정의)

답 ①

14

[풀이]

이 인공지능 시스템에 고양이 사진을 입력할 사건을 A, 이 인공지능 시스템이 입력된 사진을 고양이 사진으로 인식할 사건을 B라고 하자.

수학적 확률의 정의에 의하여

$\mathrm{P}(B) = \frac{36}{80}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{32}{80}$

구하는 조건부 확률은

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{32}{80}}{\frac{36}{80}} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

답 ⑤

[참고]

조건부 확률의 정의를 이용하여 확률을 구할 수도 있다.

(단위: 장)

인식 / 입력	고양이 사진(B)	강아지 사진(B^C)	합계
고양이 사진(A)	32	8	40
강아지 사진(A^C)	4	36	40
합계	36	44	80

조건부 확률의 정의에 의하여

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

15

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하자.

$r = 0$이라고 가정하자.

문제에서 주어진 두 등식은 각각

$0=4(0-a_1)$, $\sum_{k=1}^{6} a_k = a_1 = 15$

각각을 정리하면

$a_1=0$, $a_1=15$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $r \neq 0$이다.

$a_1=0$이라고 가정하자.

문제에서 주어진 두 번째 등식에서

$\sum_{k=1}^{6} a_k = 0 \neq 15$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $a_1 \neq 0$이다.

일반항 a_n은

$a_n = a_1 r^{n-1} (a_1 \neq 0,\ r \neq 0)$

이므로

문제에서 주어진 두 등식은 각각

$a_1 r^2 = 4a_1(r-1) \Rightarrow (r-2)^2 = 0$에서 $r=2$

$\sum_{k=1}^{6} a_k = \frac{a_1(r^6-1)}{r-1} = 15 \Rightarrow a_1 = \frac{15}{63}$

일반항 a_n은

$a_n = \frac{15}{63} \times 2^{n-1}$

세 수 a_1, a_3, a_5는 이 순서대로 공비가 $4(=2^2)$인 등비수열이므로

$\therefore\ a_1+a_3+a_5 = \frac{a_1(4^3-1)}{4-1}$

$= \frac{15}{63} \times \frac{63}{3} = 5$

답 ③

16

[풀이]

점 P의 시각 t에서의 속도는

$v(t)=3t^2+2at+b$

점 P의 시각 t에서의 가속도는

$a(t)=6t+2a$

시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로

$v(1)=3+2a+b=0$

시각 $t=2$에서 점 P의 가속도가 0이므로

$a(2)=12+2a=0$

a, b에 대한 연립일차방정식을 풀면

$a=-6$, $b=9$

$\therefore\ a+b=3$

답 ①

17

[풀이1]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2ax$

문제에서 주어진 항등식에 두 함수 $f(x)$, $f'(x)$의 방정식을 대입하면

$4(ax^2+b)=(2ax)^2+x^2+4$

정리하면

$(4a-4a^2-1)x^2+4(b-1)=0$

항등식의 필요충분조건에 의하여

$(2a-1)^2=0$, $b=1$

풀면

$a=\frac{1}{2}$, $b=1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$

$\therefore\ f(2)=3$

답 ①

[풀이2]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2ax$

문제에서 주어진 항등식에 $x=0$을 대입하면

$4f(0)=(f'(0))^2+4$

$f(0)=b$, $f'(0)=0$이므로

$4b=4$ 즉, $b=1$

문제에서 주어진 항등식에 $x=1$을 대입하면

$4f(1)=(f'(1))^2+5$

$f(1)=a+1$, $f'(1)=2a$이므로

$4a+4=4a^2+5$

정리하면

$4a^2-4a+1=0$, $(2a-1)^2=0$

풀면

$a=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 방정식은

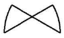
$f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$

$\therefore\ f(2)=3$

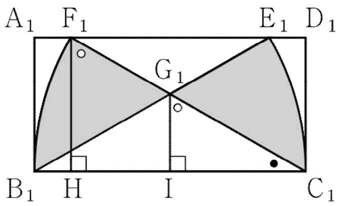
답 ①

18

[풀이]

그림 R_n에서 새롭게 그려지는  모양의 도형의 넓이를 a_n이라고 하자.

두 점 F_1, G_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.



R_1

(단, $\bullet = 30^\circ$, $\circ = 60^\circ$)

원의 정의에 의하여 $\overline{C_1F_1} = \overline{C_1B_1} = 2$이므로

직각삼각형 C_1F_1H에서 삼각비의 정의에 의하여

$\sin(\angle HC_1F_1) = \dfrac{\overline{F_1H}}{\overline{C_1F_1}} = \dfrac{1}{2}$

이므로 $\angle HC_1F_1 = 30^\circ$ 이다.

직각삼각형 C_1G_1I에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{G_1I} = \overline{C_1I} \times \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

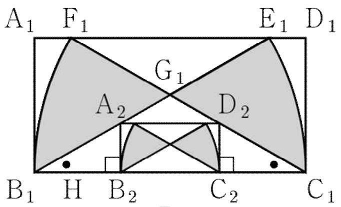
$\dfrac{a_1}{2} = (\triangledown C_1F_1B_1$의 넓이$) - (\triangle C_1G_1B_1$의 넓이$)$

$= 4\pi \times \dfrac{30}{360} - \dfrac{1}{2} \times 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$= \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$a_1 = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{A_2B_2} = x$로 두자.



R_2

(단, $\bullet = 30^\circ$)

두 직각삼각형 $A_2B_1B_2$, $D_2C_2C_1$에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{B_1B_2} = \overline{C_2C_1} = \sqrt{3}x$

이므로

$\overline{B_1C_1} = \overline{B_1B_2} + \overline{B_2C_2} + \overline{C_2C_1}$

$= 2x + 2\sqrt{3}x = 2$

정리하면

$x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $1 : x$이므로 넓이의 비는 $1 : x^2$이다.

$a_2 = x^2 a_1 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} a_1$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $a_{n+1} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} a_n$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{2\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}\pi - 12}{9}$$

답 ②

19

[풀이]

문제에서 주어진 부등식을 변형하면

$a + 2 < b \le c + 2$

표를 이용하여 위의 부등식을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)를 찾자.

a	b	c
×	1	1, 2, 3, 4, 5, 6
×	2	1, 2, 3, 4, 5, 6
×	3	1, 2, 3, 4, 5, 6
1	4	2, 3, 4, 5, 6
1, 2	5	3, 4, 5, 6
1, 2, 3	6	4, 5, 6

순서쌍 (a, b, c)의 개수는 곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여

$1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 = 22$

구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여

$\dfrac{22}{6^3} = \dfrac{11}{108}$

답 ④

20

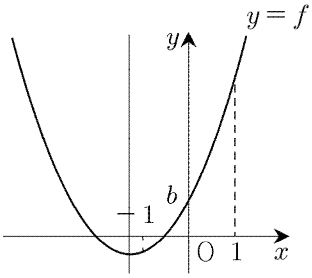
[풀이]
음이 아닌 정수 a, b, c, d가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여
$c+d=2k$이어야 한다.
($\because c+d=2(n-a-b)$이고, $n-a-b$는 정수이다.)
$c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 k_1, k_2에 대하여 $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 k_3, k_4에 대하여 $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우이다.
($\because$ (짝수)+(짝수)=(짝수),
(짝수)+(홀수)=(홀수),
(홀수)+(홀수)=(짝수)
이므로, 두 정수의 합이 짝수이면 서로 합하는 두 정수는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.)
(1) $c=2k_1$, $d=2k_2$인 경우:
문제에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면
$a+b+k_1+k_2=n$
(단, $a\ge 0$, $b\ge 0$, $k_1\ge 0$, $k_2\ge 0$)
방정식 $a+b+k_1+k_2=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, k_1, k_2의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ k_1,\ k_2)$의 개수는 a, b, k_1, k_2 중에서 중복을 허용하여 n개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4\mathrm{H}_n$와 같다. 그러므로 방정식 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $\boxed{{}_4\mathrm{H}_n}$이다.
이때, ${}_4\mathrm{H}_n={}_{4+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_3$이다.
(2) $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$인 경우:
문제에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면
$a+b+k_3+k_4=n-1$
(단, $a\ge 0$, $b\ge 0$, $k_3\ge 0$, $k_4\ge 0$)
방정식 $a+b+k_3+k_4=n-1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, k_3, k_4의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ k_3,\ k_4)$의 개수는 a, b, k_3, k_4 중에서 중복을 허용하여 $n-1$개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4\mathrm{H}_{n-1}$와 같다. 그러므로 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $\boxed{{}_4\mathrm{H}_{n-1}}$이다.
이때, ${}_4\mathrm{H}_{n-1}={}_{4+n-1-1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+2}\mathrm{C}_3$이다.
(1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수 a_n은
$a_n=\boxed{{}_4\mathrm{H}_n}+\boxed{{}_4\mathrm{H}_{n-1}}={}_{n+3}\mathrm{C}_3+{}_{n+2}\mathrm{C}_3$
이다. 자연수 m에 대하여
$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\boxed{{}_4\mathrm{H}_{n-1}}=\sum_{n=1}^{m}{}_{n+2}\mathrm{C}_3$
$={}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{m+2}\mathrm{C}_3={}_{m+3}\mathrm{C}_4$
이므로
$\displaystyle\sum_{n=1}^{8}a_n=\sum_{n=1}^{8}{}_4\mathrm{H}_n+\sum_{n=1}^{8}{}_4\mathrm{H}_{n-1}$
$\displaystyle=\sum_{n=1}^{8}{}_{n+3}\mathrm{C}_3+\sum_{n=1}^{8}{}_{n+2}\mathrm{C}_3$
$\displaystyle=2\sum_{n=1}^{8}{}_{n+2}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_3-{}_3\mathrm{C}_3$
$=2\times{}_{11}\mathrm{C}_4+{}_{11}\mathrm{C}_3-{}_3\mathrm{C}_3$
$=660+165-1$
$=\boxed{824}$
이다.
(가): $f(n)={}_{n+3}\mathrm{C}_3$
(나): $g(n)={}_{n+2}\mathrm{C}_3$
(다): $r=824$
$\therefore\ f(6)+g(5)+r$
$={}_9\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_3+824=84+35+824=943$
답 ③

21

[풀이]
두 조건 (가), (나)에서
$f(-1)=-1+a-b>-1$
$f(1)-f(-1)=2+2b>8$
정리하면
$a>b>3$
ㄱ. (참)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하자.
$D/4=a^2-3b>b^2-3b>0$
($\because\ a>b,\ b>3$)
따라서 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. (거짓)
이차함수 $f'(x)$에 대하여
판별식: $D>0$
대칭축: $x=-\dfrac{a}{3}<-1$
경계에서의 함숫값:
$f(-1)=3-2a+b=(3-a)+(b-a)<0$,

$f(1)=3+2a+b>0$

함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



사이값 정리에 의하여

방정식 $f'(x)=0$은 구간 $(-1,\ 1)$에서 실근을 갖는다.

그런데 구간 $(-1,\ 1)$에서 함수 $f'(x)$는 증가하므로 실근의 개수는 1이다.

$-1<x<1$인 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\geq 0$인 것은 아니므로

(다시 말하면 $-1<x<1$에 속하는

어떤 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로)

보기 ㄴ에서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. (참)

문제에서 주어진 방정식을 쓰면

$x^3+ax^2+bx-x(3k^2+2ak+b)=0$

$\Leftrightarrow$

$x=0$

또는

$x^2+ax-3k^2-2ak=0 \qquad \cdots (*)$

만약 이차방정식 (*)이 모두 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지면 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 만약 이차방정식 (*)이 서로 다른 두 허근을 가지면 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. 따라서 다음의 두 경우가 가능하다.(←귀류법)

(1) 이차방정식 (*)이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우 (단, 0을 실근으로 갖는다.)

(*)에 $x=0$을 대입하여 정리하면

$k(3k+2a)=0$ 풀면 $k=0$ 또는 $k=-\dfrac{2a}{3}$

$k=0$을 (*)에 대입하여 정리하면

$x^2+ax=0$ 풀면 $x=0$ 또는 $x=-a(\neq 0)$

이때, 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$k=-\dfrac{2a}{3}$을 (*)에 대입하여 정리하면

$x^2+ax=0$ 풀면 $x=0$ 또는 $x=-a(\neq 0)$

이때, 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) 이차방정식 (*)이 중근을 갖는 경우 (단, 0을 실근으로 갖지 않는다.)

이차방정식 (*)의 판별식을 D라고 하자.

$D=a^2-4(-3k^2-2ak)=0$

정리하면

$12k^2+8ak+a^2=0,\ (2k+a)(6k+a)=0$

풀면

$k=-\dfrac{a}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{a}{6}$

이때, $-\dfrac{a}{2}$와 $-\dfrac{a}{6}$은 0 또는 $-\dfrac{2a}{3}$일 수 없다.

(1), (2)에서

$k=0,\ k=-\dfrac{2a}{3},\ k=-\dfrac{a}{2},\ k=-\dfrac{a}{6}$

따라서 실수 k의 개수는 4이다.

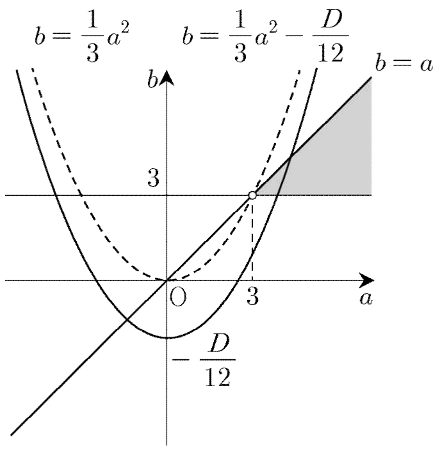
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고1]

보기 ㄱ이 참임을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

부등식의 영역 $b>a>3$을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



(단, 경계는 제외한다.)

이차함수 $b=\dfrac{1}{3}a^2-\dfrac{D}{12}$의 그래프는 위의 그림에서 색칠된 영역을 지나므로 이 이차함수의 y절편은 0보다 작다.

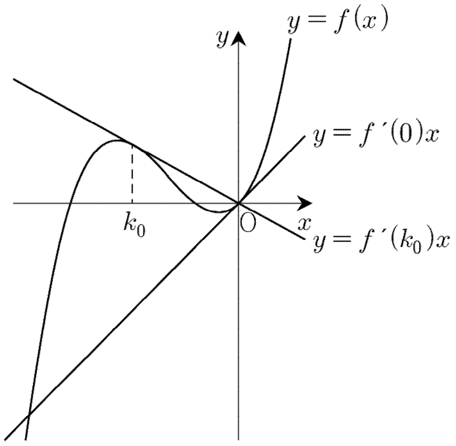
$-\dfrac{D}{12}<0$에서 $D>0$

따라서 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

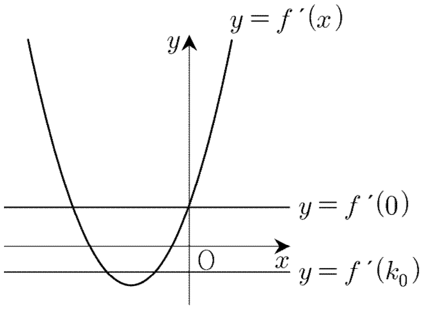
[참고2]

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

원점을 지나는 직선 $y=f'(k)x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수가 2가 되도록 직선과 곡선을 그리면 다음과 같다.



곡선 $y=f'(x)$와 두 직선 $y=f'(0)$, $y=f'(k_0)$의 위치관계는 다음과 같다.



곡선 $y=f'(x)$와 두 직선 $y=f'(0)$, $y=f'(k_0)$의 교점의 개수는 모두 2이고, 4개의 교점의 x좌표는 모두 다르다.
따라서 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

22

[풀이]
${}_8P_2=8\times7=56$
답 ④

23

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2-4x$
$\therefore\ f'(3)=15$
답 15

24

[풀이1]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.
일반항 a_n은 $a_n=a_1+(n-1)d$이므로
$a_5=a_1+4d=5$, $a_{15}=a_1+14d=25$
a_1, d에 대한 연립일차방정식을 풀면
$a_1=-3$, $d=2$
일반항 a_n은 $a_n=2n-5$이므로
$a_{20}=2\times20-5=35$
답 35

[풀이2]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.
네 수 a_5, a_{10}, a_{15}, a_{20}은 이 순서대로 공차가 $5d$인 등차수열을 이룬다.
등차중앙의 정의에 의하여
$2a_{10}=a_5+a_{15}$
즉, $2a_{10}=5+25$에서 $a_{10}=15$
등차중앙의 정의에 의하여
$2a_{15}=a_{10}+a_{20}$
즉, $2\times25=15+a_{20}$에서
$\therefore\ a_{20}=35$
답 35

25

[풀이]
$11=3+3+3+1+1$
$=3+3+5$
$=3+3+1+1+1+1+1$
따라서 방법의 수는 3이다.
(즉, 자연수 5를 홀수인 자연수로 분할하는 수와 같다.)
답 3

26

[풀이]
$(1+2x)(1+x)^5$
$=(1+x)^5+2x(1+x)^5$
$(1+x)^5$의 전개식에서 x^3, x^4의 계수는 각각
${}_5C_3$, ${}_5C_4$
이므로, 문제에서 주어진 다항식의 전개식에서 x^4의 계수는
${}_5C_4+2\,{}_5C_3={}_5C_1+2\,{}_5C_2=5+2\times10=25$
답 25

[참고]
다음과 같은 식 변형도 가능하다.
$(1+2x)(1+x)^5=\{(1+x)^2-x^2\}(1+x)^5$
$=(1+x)^7-x^2(1+x)^5$
x^4의 계수는 ${}_7C_4-{}_5C_2={}_7C_3-{}_5C_2=25$
$(1+2x)(1+x)^5=(1+x+x)(1+x)^5$
$=(1+x)^6+x(1+x)^5$
x^4의 계수는 ${}_6C_4+{}_5C_3={}_6C_2+{}_5C_2=25$

27

[풀이]
조건 (나)에서 주어진 식을 정리하자.
$A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$
$=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B\neq\varnothing$ 이므로
$n(A\cap B)\geq 1$이다.
$n(B-A)=n(U)-n(A-B)-n(A\cap B)$
$=25-11-n(A\cap B)$($\because$ 조건(가), (다))
≤ 13
(단, 등호는 $n(A\cap B)=1$일 때 성립한다.)
따라서 구하는 값은 13이다.
답 13

28

[풀이]
이차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는다고 가정하자.
모든 실수 x에 대하여
$f(x)>0$ ($\leftarrow$최고차항의 계수가 양수인 경우)
또는
$f(x)<0$ ($\leftarrow$최고차항의 계수가 음수인 경우)
이므로 조건 (가)에서 주어진 함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 이는 가정에 모순이다.
이차방정식 $f(x)=0$가 중근을 갖는다고 하자.
인수정리에 의하여
$f(x)=k(x-\alpha)^2$(단, k는 0이 아닌 상수)
조건 (가)에서 주어진 함수는

$$y=\frac{x}{k(x-\alpha)^2}$$

$\alpha=0$이면 $y=\dfrac{1}{kx}$이므로, 이 함수는 $x=0$에서만 불연속이다.($\because$ 함수가 $x=0$에서 정의되지 않기 때문이다.)
$\alpha\neq 0$이면 이 함수는 $x=\alpha$에서만 불연속이다.($\because$ 함수가 $x=\alpha$에서 정의되지 않기 때문이다.)
정리하면 이 함수는 $x=\alpha$에서만 불연속이다. 이는 가정에 모순이다.
따라서 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
인수정리에 의하여
$f(x)=k(x-\beta)(x-\gamma)$
(단, k는 0이 아닌 상수, $\beta<\gamma$)
조건 (가)에서 주어진 함수는

$$y=\frac{x}{k(x-\beta)(x-\gamma)}$$

$\beta=0$이면 $y=\dfrac{1}{k(x-\gamma)}$이므로, 이 함수는 $x=\gamma$에서만 불연속이다.($\because$ 함수가 $x=\gamma$에서 정의되지 않기 때문이다.)
$\gamma=0$이면 $y=\dfrac{1}{k(x-\beta)}$이므로, 이 함수는 $x=\beta$에서만 불연속이다.($\because$ 함수가 $x=\beta$에서 정의되지 않기 때문이다.)
이는 가정에 모순이다. 따라서 $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$이다.
이 함수는 $x=\beta$, $x=\gamma$에서 불연속이므로 $\beta=1$, $\gamma=2$이다.
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=k(x-1)(x-2)$
조건 (나)에서 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}k(x-1)=k=4$$

함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=4(x-1)(x-2)$
$\therefore\ f(4)=24$
답 24

29

[풀이1]
좌표평면에서 점 $(p,\ q)$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점이라고 하자.
$f(p)=q$, $f^{-1}(p)=q$
역함수의 성질에 의하여
$f^{-1}(q)=p$, $f(q)=p$
이므로 점 $(q,\ p)$는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점이다.
따라서 곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$를 모두 지난다. 이때, 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.
$p=q$인 경우: 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점은

직선 $y=x$ 위에 있다.

$p\neq q$인 경우: 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점은 기울기가 -1인 직선 위에 있다.

이제 다음의 두 경우를 생각할 수 있다.

(1) 3개의 교점이 모두 직선 $y=x$ 위에 있는 경우

문제에서 주어진 함수의 방정식에서

$f(-1)=-a+b=-1$

$f(1)=c+\frac{5}{2}=1$ 즉, $c=-\frac{3}{2}$

$f(2)=4c+5=2$ 즉, $c=-\frac{3}{4}$

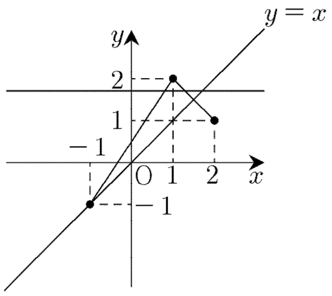
연립방정식의 해가 존재하지 않으므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 3개의 교점이 모두 직선 $y=x$ 위에 있을 수 없다.

(2) 3개의 교점 중에서 하나는 직선 $y=x$ 위에 있고, 나머지 두 개는 기울기가 -1인 직선 위에 있는 경우

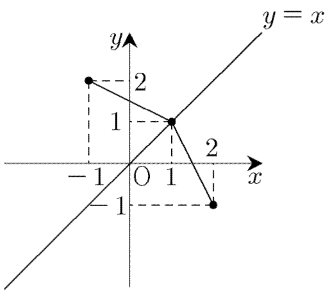
다음의 세 경우로 나누어진다.

• 점 $(-1,\ -1)$이 직선 $y=x$ 위에 있는 경우



함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니므로, 역함수를 갖지 못한다.

• 점 $(1,\ 1)$이 직선 $y=x$ 위에 있는 경우



함수 $f(x)$는 일대일대응(감소함수)이므로, 역함수를 갖는다.

문제에서 주어진 함수 $f(x)$의 방정식에서

$f(-1)=-a+b=2$ …㉠

$f(1)=c+\frac{5}{2}=1$ 즉, $c=-\frac{3}{2}$ …㉡

$f(2)=4c+5=-1$ 즉, $c=-\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로

함수의 연속의 정의에 의하여

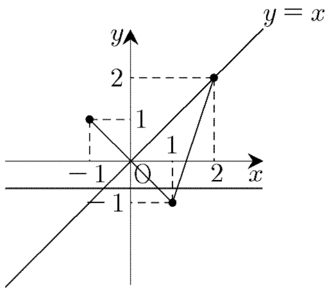
$$\lim_{x\to 1-}f(x)=a+b=c+\frac{5}{2}=f(1)$$

즉, $a+b=c+\frac{5}{2}$ …㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$

• 점 $(2,\ 2)$가 직선 $y=x$ 위에 있는 경우



함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니므로, 역함수를 갖지 못한다.

이상에서

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ 2a+4b-10c=-1+6+15=20$

답 20

[풀이2]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로

함수의 연속의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=a+b=c+\frac{5}{2}=f(1)$$

즉, $a+b=c+\frac{5}{2}$ …㉠

연속함수 $f(x)$가 역함수를 가지므로

함수 $f(x)$는 증가함수 또는 감소함수이다.

($\Leftrightarrow$ 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.)

구간 $[1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는

$c=0$이면 $f(x)=\frac{5}{2}x$($\leftarrow$일차함수)

$c\neq 0$이면 $f(x)=c\left(x+\frac{5}{4c}\right)^2-\frac{25}{16c}$($\leftarrow$이차함수)

이때, 이차함수의 대칭축은 $x=-\frac{5}{4c}$이다.

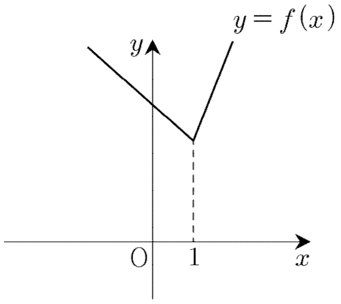
(1) $c=0$인 경우

$c=0$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{5}{2}-a$이므로

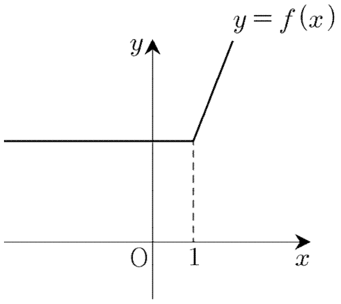
함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} a(x-1)+\dfrac{5}{2} & (x<1) \\ \dfrac{5}{2}x & (x\geq 1) \end{cases}$$

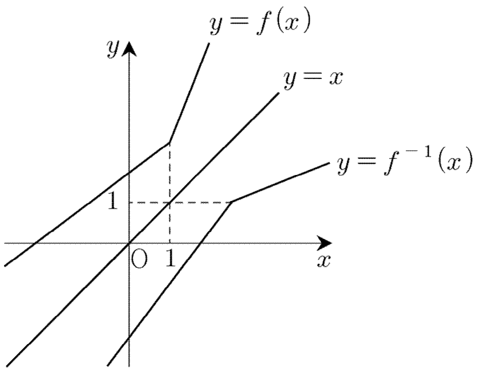
$a<0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



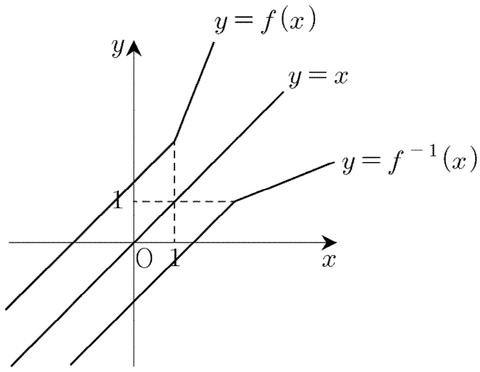
함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니므로
함수 $f(x)$는 역함수를 갖지 않는다.
$a=0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



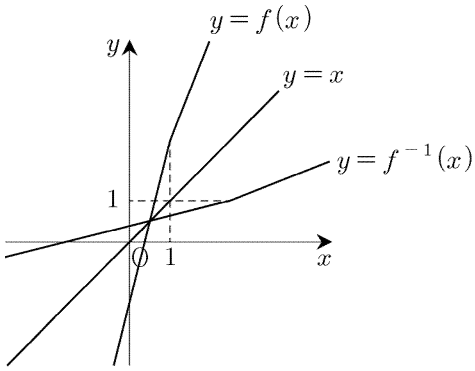
함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니므로
함수 $f(x)$는 역함수를 갖지 않는다.
$0<a<1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는 만나지 않는다.
$a=1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



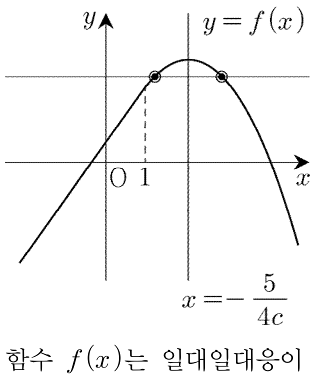
두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는 만나지 않는다.
$a>1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1 $(\neq 3)$이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $c\neq 0$이고, $f(x)$는 이차함수이다. $(\leftarrow$귀류법$)$
(2) $c\neq 0$인 경우

$-\dfrac{5}{4c}>1$ 즉, $-\dfrac{5}{4}<c<0$일 때,

함수 $f(x)$의 그래프는

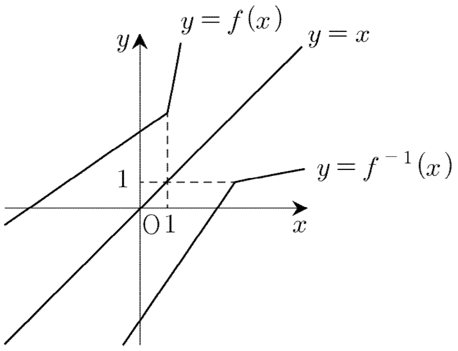


함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니므로
함수 $f(x)$는 역함수를 갖지 않는다.

따라서 $c\leq -\dfrac{5}{4}$ 또는 $c>0$이다.

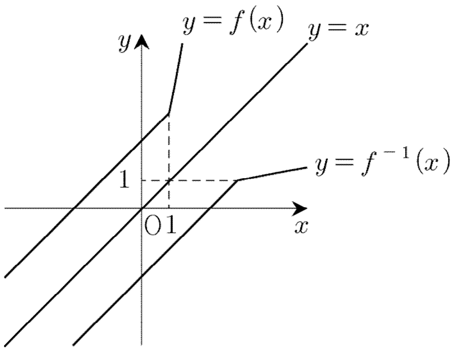
- $c>0$인 경우

함수 $f(x)$는 증가함수여야 하므로 $a>0$이다.
$0<a<1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



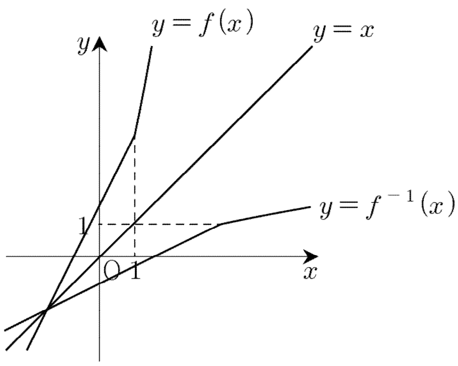
두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

$a=1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

$a>1$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1 ($\neq 3$)이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

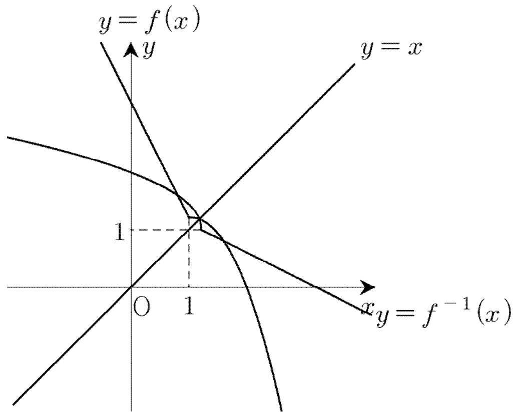
따라서 $c \leq -\dfrac{5}{4}$이다.

• $c \leq -\dfrac{5}{4}$인 경우

함수 $f(x)$는 감소함수여야 하므로 $a<0$이다.

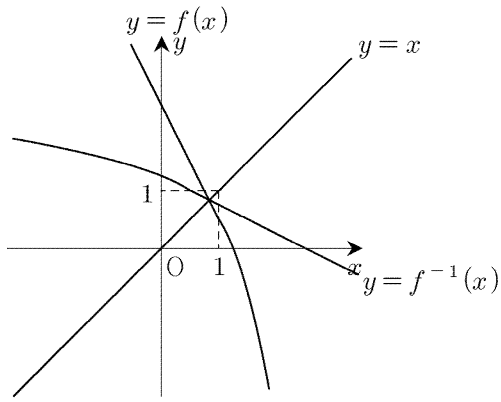
(경우1) 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 교점 중에서 x좌표가 1인 점이 존재하지 않는 경우 (즉, $f(1) \neq 1$인 경우)

$c=-\dfrac{5}{4}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



교점 중에서 x좌표가 1인 점은 없다.

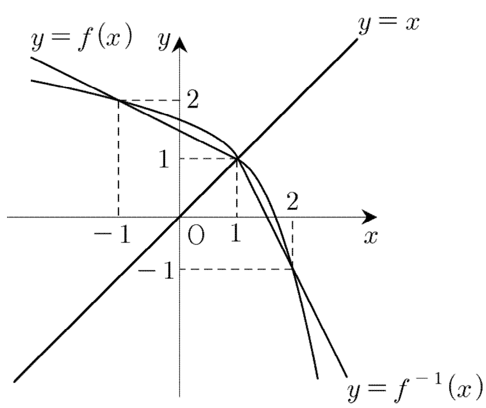
$c<-\dfrac{5}{4}$이고 $c \neq -\dfrac{3}{2}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



교점 중에서 x좌표가 1인 점은 없다.

(경우2) 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 교점 중에서 x좌표가 1인 점이 존재하는 경우 (즉, $f(1)=1$인 경우)

$c=-\dfrac{3}{2}$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프는



교점 중에서 x좌표가 1인 점이 있다.

문제에서 원하는 경우는 (경우2)이다.

$c=-\dfrac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a+b=1$ $\cdots$㉡

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ -\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x & (x\ge 1)\end{cases}$$

세 교점의 좌표를 모두 쓰면

$(-1,\ -a+b)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ -1)$

이때, 두 점 $(-1,\ -a+b)$, $(2,\ -1)$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$-a+b=2$ …㉢

㉡, ㉢을 연립하면

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 2a+4b-10c=-1+6+15=20$

답 20

30

[풀이]

보기 (가)에서 주어진 등식에서

$n=1$일 때, $f(1)=f(1)f(2)$ …㉠

$n\ge 2$일 때,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=f(n)f(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=f(n-1)f(n)$$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$f(n)=f(n)\{f(n+1)-f(n-1)\}$

(단, $n\ge 2$)

정리하면

$f(n)=0$ 또는 $f(n+1)-f(n-1)=1$

(단, $n\ge 2$)

n에 2, 3, 4, 5를 대입하면 각각

$f(2)=0$ 또는 $f(3)-f(1)=1$ …㉡

$f(3)=0$ 또는 $f(4)-f(2)=1$ …㉢

$f(4)=0$ 또는 $f(5)-f(3)=1$ …㉣

$f(5)=0$ 또는 $f(6)-f(4)=1$ …㉤

조건 (나)에 의하여

$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}\le 0$ 즉, $f(5)-f(3)\le 0$

이므로 ㉣에서 $f(4)=0$일 수 밖에 없다.

조건 (나)에 의하여

$\frac{f(6)-f(4)}{6-4}\le 0$ 즉, $f(6)-f(4)\le 0$

이므로 ㉤에서 $f(5)=0$일 수 밖에 없다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$f(1)=0$ 또는 $f(2)=1$ …㉠

$f(2)=0$ 또는 $f(3)-f(1)=1$ …㉡

$f(3)=0$ 또는 $f(2)=-1$ …㉢

$f(4)=0$ …㉣

$f(5)=0$ …㉤

(1) $f(1)=0$인 경우

㉡: $f(2)=0$ 또는 $f(3)=1$

$f(2)=0$이면 ㉢에서 $f(3)=0$이다.

그런데

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=0$

을 만족시키는 사차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

이는 가정에 모순이다.

따라서 ㉡에서 $f(2)\ne 0$, $f(3)=1$이다.

$f(3)=1$이면 ㉢에서 $f(2)=-1$

이상을 정리하면

$f(1)=f(4)=f(5)=0$, $f(2)=-1$, $f(3)=1$

$f(2)f(3)<0$이므로 사이값 정리에 의하여

방정식 $f(x)=0$은 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나 이상의 실근을 갖는다.

그런데 사차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 최대개수는 4이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(2,\ 3)$에서 오직 하나의 실근을 갖는다. 이 실근을 α라고 하자.

인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=k(x-1)(x-4)(x-5)(x-\alpha)$

(단, k는 0이 아닌 상수, $2<\alpha<3$)

$f(2)=6k(2-\alpha)=-1$,

$f(3)=4k(3-\alpha)=1$

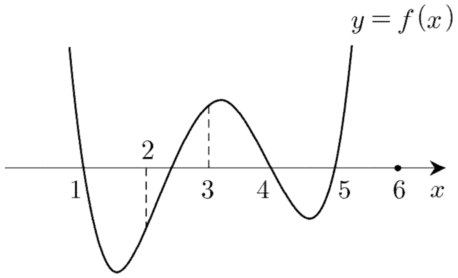
연립하면

$k=\frac{5}{12}$, $\alpha=\frac{12}{5}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\frac{5}{12}(x-1)(x-4)(x-5)\left(x-\frac{12}{5}\right)$$

함수 $f(x)$의 그래프는



위의 그래프에서 두 점 $(4,\ f(4))$, $(6,\ f(6))$을 잇는 직선의 기울기는 양수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(2) $f(2)=1$인 경우

㉢에서 $f(3)=0$이고,

㉡에서 $f(1)=f(3)-1=-1$

이상을 정리하면

$f(1)=-1$, $f(2)=1$,

$f(3)=f(4)=f(5)=0$

$f(1)f(2)<0$이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나 이상의 실근을 갖는다.

그런데 사차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 최대개수는 4이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 오직 하나의 실근을 갖는다. 이 실근을 β라고 하자.

인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=k(x-3)(x-4)(x-5)(x-\beta)$

(단, k는 0이 아닌 상수, $1<\beta<2$)

$f(1)=-24k(1-\beta)=-1$,

$f(2)=-6k(2-\beta)=1$

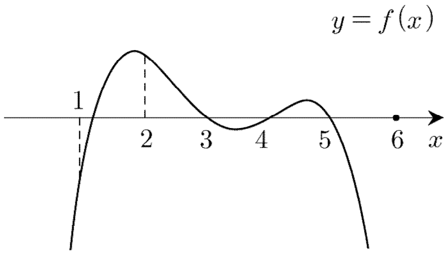
연립하면

$k=-\dfrac{5}{24}$, $\beta=\dfrac{6}{5}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-\dfrac{5}{24}(x-3)(x-4)(x-5)\left(x-\dfrac{6}{5}\right)$

함수 $f(x)$의 그래프는



$\therefore\ 128\times f\left(\dfrac{5}{2}\right)=65$

답 65

[참고]

조건 (가), (나)에서 아래의 표를 얻을 수 있다.

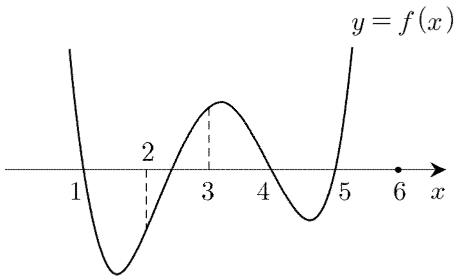
(←발견적 추론)

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	
0	0	0	0	$\neq 0$	1	
0	0	0	$f(4)$	1	$f(4)+1$	
0	0	-1	1	0	$f(6)$	
0	0	$\neq -1$	1	$\neq 0$	2	
0	-1	1	0	0	$f(6)$	경우1
0	-1	1	0	$\neq 0$	1	
0	$\neq -1$	1	$\neq 0$	2	$f(2)+2$	
-1	1	0	0	0	$f(6)$	경우2
-1	1	0	0	$\neq 0$	1	
-1	1	0	$f(4)$	1	$f(4)+1$	
-2	1	-1	2	0	$f(6)$	
$\neq -2$	1	$f(1)+1$	2	$\neq 0$	3	

(경우1)에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\dfrac{5}{12}(x-1)(x-4)(x-5)\left(x-\dfrac{12}{5}\right)$

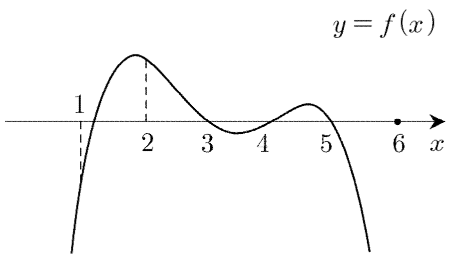
함수 $f(x)$의 그래프는



(경우2)에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-\dfrac{5}{24}(x-3)(x-4)(x-5)\left(x-\dfrac{6}{5}\right)$

함수 $f(x)$의 그래프는



이 중에서 (경우2)만이 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시킨다.