인쇄소의 실수로 나형 vol.1 해설의 9, 10, 19, 20 page가 누락된 1쇄가 배송된 분들은 다음 파일을 이용하시기 바랍니다. (오르비 고객센터에 문의하시면 맞교환 가능합니다)

7/15 현재 발견된 오류, 오탈자는 없으니 학습에 참고하시기 바랍니다.

1회 예상 등급컷, 난이도 탑 3			
등급컷	원점수	난이도 Top	문제번호
1등급	88	1위	21번 ★★
2등급	80	2위	30번 ★
3등급	70	3위	20번

★ Warning ★

- 위 자료는 저자 및 검토진들의 주관적인 생각과 경험을 근거로 예상한 자료이므로 '참고'만 하세요.
- 예상 등급컷은 11월 기준입니다.
(7 ~ 10월에는 체감상 어렵게 느껴질 수 있습니다.)

2019학년도 기대 모의고사 Vol.1
수학 나형 〈2회〉 해설

이 교재의 문제가 포함되어 있는 타 교재 혹은 학원 수업물이 있다면
kidae6150@naver.com 메일 부탁드립니다.
(해설집 표지 2Page 참고)

문제	답	문제	답	문제	답
1	③	11	③	21	③
2	④	12	②	22	5
3	⑤	13	①	23	55
4	③	14	②	24	6
5	⑤	15	①	25	15
6	②	16	③	26	10
7	④	17	⑤	27	72
8	①	18	④	28	2
9	②	19	①	29	54
10	④	20	⑤	30	105

1. $18\times 3^{-2}=\dfrac{18}{9}=2$.

2. $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$이므로 $n(A\cup B)=7$.

3. $f'(x)=3x^2+2x+a$이므로 $f'(1)=5+a=7$. 따라서 $a=2$.

4. $\dfrac{1+\log_3 12}{\log_3 6}=\dfrac{\log_3 36}{\log_3 6}=\log_6 36=2$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}-2^n}{4^n-3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=4$.

6. 두 사건 A, B가 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$.
그리고 $\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B)=1$에서 $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(A)$.
따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$이다.

7. $f(1)$, $f(2)$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3 중 하나인데
$f(1)f(2)=3$이므로 $f(1)=1$, $f(2)=3$ or $f(1)=3$, $f(2)=1$
이어야 한다. 함수 $f:X\to X$의 역함수가 존재하므로 f는
일대일대응이다. 따라서 $f(3)=2$임을 알 수 있다.
이를 통해 $f^{-1}(2)=3$임도 알 수 있으므로 $f(3)+f^{-1}(2)=5$

8. 공차를 d라 하면 $a_1a_3=(a_2-d)(a_2+d)=(a_2)^2-d^2=12$ 이므로
$d=2$. ($d=-2$이면 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수일 수 없다.)
따라서 $a_5=a_2+3d=4+6=10$

9. $x^2-(n+2)x+2n=(x-n)(x-2)=0$의 두 근은 2, n이다.
$q\Rightarrow p$ 여야 하므로 q의 진리집합이 p의 진리집합에
포함되어야한다. 2와 n이 짝수여야 하므로, 따라서 n의
최솟값은 2이다.

10. 원소가 각각 1, 3개, 그리고 각각 2, 2개인 경우로 나눌 수 있다.
1, 3개인 경우, ${}_4\mathrm{C}_1$로 하나의 원소를 골라주고 그 원소만을 갖는
집합을 생성한다. 나머지 3개의 원소를 또 다시 집합으로
구성해주면, 원하는 분할이 나온다.
2, 2개인 경우에는
$\{1, 2\}+\{3, 4\}$, $\{1, 3\}+\{2, 4\}$, $\{1, 4\}+\{2, 3\}$으로 총 3가지가
있다. 따라서 정답은 ${}_4\mathrm{C}_1+3=7$.

11. a^2+b^2의 값이 짝수인 경우는 (a, b)가 (짝, 짝), (홀, 홀)인
경우이다. 이러한 확률은 $\dfrac{3\times 3+3\times 3}{36}=\dfrac{1}{2}$.
여기에서 4미만의 짝수가 나올 확률, 즉 $(a, b)=(1, 1)$인 확률
$\dfrac{1}{36}$을 빼주면 되므로 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{17}{36}$

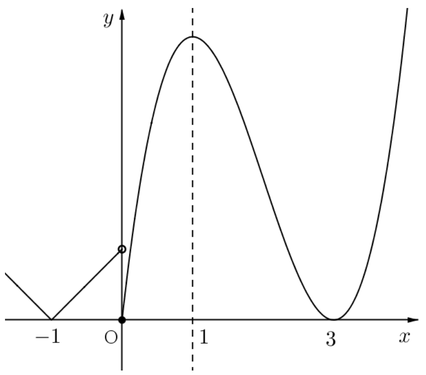
12. $t=0$에서의 점 P의 위치가 0일 때, $t=5$에서의 점 P의
위치는 $\displaystyle\int_0^5 v(t)dt=\left[t^2-3t\right]_0^5=10$이다.

13. $\mathrm{E}(\overline{X})=200$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{4}}=15$이므로 $\overline{X}$를 정규화 해서 이
확률을 구해주면 $\mathrm{P}(170\le\overline{X}\le x)=\mathrm{P}\left(-2\le Z\le\dfrac{x-200}{15}\right)$ 이다.
$0.8185=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$ 이므로 $\dfrac{x-200}{15}=1$이다.
따라서 $x=215$이다.

14. 만약 $x=a$에서 $f(x)$가 연속이면, 연속의 조건에 의하여
좌극한값과 우극한값이 같으므로
$\lim\limits_{x\to a-}f(x)\times\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\{f(a)\}^2\ge 0$이다. 따라서 불연속인 점만
고려해주면 되는데,
좌극한값과 우극한값의 부호가 다른 경우는 $x=-2$ 뿐이다.
(참고: $x=-1$, 1일 때는 한 극한값이 0이어서 포함되지
않는다.)

(해설)

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



극대, 극소의 정의에 의하여

$x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=3$에서 각각 극소, 극소, 극대, 극소임을 알 수 있다.

따라서 $m=1,\ n=3$이므로 $5m+n=8$ 이다.

28. 등비수열의 공비를 r이라 하자.

$a_2\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{4}{a_3}\right)=4$에서 $a_2=a_1r=\dfrac{a_3}{r}$이므로 $r+\dfrac{4}{r}=4 \Leftrightarrow$ $r^2-4r+4=0$이다. 따라서 $r=2$.

i) 평범한 전개

$S_6+S_3=\dfrac{a_1(1-r^6)+a_1(1-r^3)}{1-r}=70a_1$이므로 $a_1=\dfrac{60}{70}=\dfrac{6}{7}$이다.

따라서 $a_4+a_5+a_6=\dfrac{6}{7}\times(2^3+2^4+2^5)=48$이다.

ii) 식의 형태에 집중한 방법

$S_6+S_3=60$에서 약간의 관찰을 해보자.

$S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$인데, $\dfrac{a_4}{a_1}=\dfrac{a_5}{a_2}=\dfrac{a_6}{a_3}=r^3=8$이므로

$S_6=(a_1+a_2+a_3)+8(a_1+a_2+a_3)=9S_3$임을 알 수 있다.

즉, $S_6+S_3=10S_3=60$에서 $S_3=6$임과 $S_6=9S_3=54$임을 알 수 있다.

문제에서 묻는 것은 $a_4+a_5+a_6$, 즉 S_6-S_3이므로 정답은 $54-6=48$이다.

출제자의 한마디
등차수열, 등비수열 문제는 대부분 특정 형태를 띠고 있는 경우가 대다수이다. 그 형태에 유의해서 문제에 접근을 한다면 훨씬 다양한 풀이가 가능하다.

29. (가)조건을 보면 $(x-1)f'(1)\le 0$, $(x-2)^2f'(2)\le 0$, $(x-3)^3f'(3)\le 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

$(x-1)f'(1)\le 0$와 $(x-3)^3f'(3)\le 0$를 봐보자.

$(x-1)f'(1)\le 0$를 보면, $x=1$의 좌, 우에서 $(x-1)$의 부호가 바뀜을 알 수 있다.

($x>1$일 때는 $x-1>0$이고, $x<1$일 때는 $x-1<0$이다.)

하지만 $f'(1)$은 상수이기 때문에, $f'(1)$이 0이 아니라고 가정하면, $x=1$의 좌, 우 근방에서 $(x-1)f'(1)$의 부호가 바뀐다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)f'(1)\le 0$를 만족한다는 조건을 충족시키지 못한다.

이는 $f'(1)$이 0이 아니라고 가정한 것이 잘못된 것이다.

따라서 $f'(1)=0$이다. (귀류법을 사용)

(참고 : 혹은, $x=0,\ x=2$를 $(x-1)f'(1)\le 0$에 대입하여 $f'(1)\ge 0$, $f'(1)\le 0$를 얻음으로써 $f'(1)=0$임을 알아도 무방하다. 하지만 이 해설 역시 $x=1$를 기준으로 좌, 우의 x값을 잡아줘야 된다는 점에서 위의 풀이와 비슷하다.)

마찬가지로 $(x-3)^3f'(3)\le 0$에서 $(x-3)^3$의 부호가 $x=3$의 좌, 우에서 부호변화가 생기므로, 위의 논리와 똑같이 설명하면 $f'(3)=0$임을 알 수 있다.

위에서 구한 두 조건 $f'(1)=f'(3)=0$에서 $f'(x)=0$은 두 근 1, 3을 갖는 삼차방정식 이므로

$f'(x)=k(x-1)(x-3)(x-a)$ $(k\ne 0)$

(단, k는 $f'(x)$의 최고차항의 계수이고, a는 상수)로 둘 수 있다.

$(x-2)^2f'(2)\le 0$에서는 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)^2$의 부호가 음수인 경우가 없기 때문에, 저 부등식이 항상 성립하기 위해서는 $f'(2)\le 0$여야 한다.

$f'(2)=k\times 1\times(-1)\times(2-a)=k(a-2)$ 이므로

$k>0$일 때, $a\le 2$이고 $k<0$일 때, $a\ge 2$임을 알 수 있다.

이제 (나)조건을 보자.

$f(x)$의 극대 또는 극소인 점은 오직 하나이기 위해선 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 어떤 x가 오직 하나만 존재해야 한다.

a가 1이나 3이 아닌 다른 숫자라고 가정해보자. 그러면 $f'(x)=0$는 서로 다른 실근을 3개를 가지는 삼차방정식이 된다. 즉, $x=1,\ 3,\ a$일 때 x의 좌, 우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌게 되므로, $f(x)$가 극값을 3개 가지게 된다.

이는 (나)조건에 모순. 따라서 귀류법에 의하여 a는 1이나 3이어야 한다.

i) $k>0$ 일 때,

$a\le 2$를 만족해야하고 a는 1이나 3이어야 하므로 만족하는 a는 1뿐이다. 따라서 $f'(x)=k(x-1)^2(x-3)$.

따라서 $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{9k}{8}=-9$ ($\because k$가 양수이므로 $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{9k}{8}<0$,

$\left|f'\left(\frac{5}{2}\right)\right|=9$) 에서 $k=8$ 이고

$f'(x)=8(x-1)^2(x-3)$

$ii)$ $k<0$ 일 때,

$a\geq 2$를 만족해야하고 a는 1이나 3이어야 하므로 만족하는 a는 3뿐이다. 따라서 $f'(x)=k(x-1)(x-3)^2$.

$f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3k}{8}=-9$ ($\because k$가 음수이므로 $f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3k}{8}<0$,

$\left|f'\left(\frac{5}{2}\right)\right|=9$)에서 $k=-24$이고

$f'(x)=-24(x-1)(x-3)^2$

$i)$, $ii)$에 의하여 $f'(0)$의 값으로 가능한 값은 각각 -24, 24×9으로 총 2개이고, 최댓값은 216이므로 $M+n=218$이다.

30. 사고가 복잡한 문제이기 때문에 밑줄 쳐진 부분이 이해가 되었다면 알아보기 쉽도록 그 부분에 동그라미를 쳐놓자.

우선 함수 $h(x)$가 연속함수이므로 $f(0)=g(0)$을 만족해야 한다.

(가) 조건에서 $\lim_{t\to-\infty}\frac{h(t)}{t^2}=1$을 통해 $g(x)$의 차수는 이차이며 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

또한 $\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t^3}=1$을 통해 $f(x)$의 차수는 삼차이며 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

이제 (나) 조건을 봐보면, $x\neq 0$인 모든 실수 x에서

$\lim_{t\to 0}h'(x-t)=h'(x)$, $\lim_{t\to 0}h'(x+t)=h'(x)$이므로

($\because x\neq 0$인 모든 실수 x에서 $h'(x)$는 다항함수이고, 연속이기 때문에 극한값=함숫값이 성립한다!)

$\lim_{t\to 0}h'(x-t)h'(x+t)=\{h'(x)\}^2$임을 알 수 있다.

그런데 (나) 조건의 집합의 원소가 -1, 1 뿐이므로

$h'(-1)=h'(1)=0$임을 알 수 있다.

(★다른 x에서는 $h'(x)\neq 0$이다.★)

이제 $x=0$일 때를 고려해줘야 하는데, $x=0$일 때

$\lim_{t\to 0}h'(x-t)h'(x+t)=\lim_{t\to 0}h'(-t)h'(t)$는 t에 $-t$를 대입해도 같은 식이기 때문에 $t\to 0+$일 때만 따져주면 된다.

($\lim_{t\to 0}h'(-t)h'(t)=\lim_{t\to 0+}h'(-t)h'(t)$)

$\lim_{t\to 0+}h'(-t)=g'(0)$, $\lim_{t\to 0+}h'(+t)=f'(0)$이므로

$f'(0)g'(0)>0$임을 알 수 있다.

($\because$ 0은 (나) 조건의 집합의 원소가 아니므로)

$x<0$일 때 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$이고 $h'(-1)=g'(-1)=0$이므로 $g(x)=(x+1)^2+a$ 꼴이다.

또한 $g'(0)=2$이므로 $g'(0)>0$이다. 따라서 $f'(0)>0$

($\because f'(0)g'(0)>0$)

$x\geq 0$일 때 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$이고 $f'(0)>0$, $f'(1)=0$이다.

만약 $f(x)$가 $x=1$에서 극대 혹은 극소를 갖는다고 가정해보자.

$f(x)$가 $x=1$에서 극대를 갖는다면, $x_2>1$인 어떤 x_2에서 극소를 가질 것이고, $f'(x_2)=0$을 만족시킨다.

($\because$ 최고차항의 계수가 양수인 모든 삼차함수에 대하여 극대, 극소인 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 항상 $x_1<x_2$이다.)

(삼차함수 개형을 떠올리거나 도함수인 이차함수의 개형을 떠올려보세요.)

이는 -1, 1을 제외한 다른 x에서는 $h'(x)\neq 0$이다. 라는 (나)조건에 모순이다.

또한 $f(x)$가 $x=1$에서 극소를 갖는다면 $f'(0)>0$이란 조건에 모순이다. (위에서처럼 (나)조건에 의해 모순이 생긴다.)

따라서 $f'(1)=0$이지만 $x=1$에서 $f(x)$는 극대도 극소도 아니다. 즉 $f'(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축과 만나지만 부호변화는 없는 함수여야하고, 따라서 $f'(x)=3(x-1)^2$임을 알 수 있다.

적분하면 $f(x)=(x-1)^3+b$임을 알 수 있다.

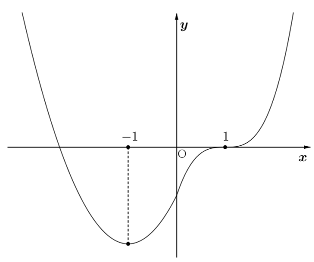
위에서 구한 사실들과 문제에서 사용하지 않은 조건을 종합하면 다음과 같다.

1. $f(0)=g(0)$
2. $f(x)=(x-1)^3+b$
3. $g(x)=(x+1)^2+a$
4. $h(0)<0$, $y=|h(x)|$가 두 점에서 미분가능하지 않다.

우선 $f(0)=g(0)$이므로 $1+a=-1+b$에서 $a=b-2$ 이다.

또한 $f'(0)=3$, $g'(0)=2$이므로 $f'(0)\neq g'(0)$이라서 a, b값에 관계없이 $x=0$에서 함수 $y=|h(x)|$는 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

1.~4.의 조건을 만족시키도록 $y=h(x)$그래프를 그리면 다음과 같다.



$h(1)$이 0이 아닌 다른 값이라면, $y=|h(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.

($y=|h(x)|$와 x축 사이의 두 교점과 $(0,\ h(0))$으로 총 3개다. 이는 $h(0)<0$을 만족시키도록 x축을 그림과 다른 위치에 그려보면서 확인해보도록 하자.)