3. 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $y=f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=(x^2+x+1)(ax^2+bx+c) \text{ (단, } a, b, c\text{는 상수)}$$

함수 $y=|f(x)|$가 $x=2$에서만 미분 불가능할 때, $\dfrac{f(9)}{f(3)}$의 값은?

[4점]

① 21 ② 35 ③ 49 ④ 63 ⑤ 77

3) 정답 ③

얼핏 보면 다항함수 $y=f(x)$가 4차 함수처럼 보이지만, **발문에 명확한 차수를 표시해주지 않았으므로 몇 차 함수인지 따져가며 풀어야 한다**.

i) 다항함수 $y=f(x)$가 4차 함수인 경우

4차 함수의 개형은 오른쪽 그림과 같이 총 4가지의 경우뿐이다. 이 때 **한 점에서만 미분 불가능이라는 것은 곧 3중근이나 극값이 아닌 한 개의 점이 x축과 만나는 경우다.** 이에 따라 오른쪽 그림 중에서 $y=|f(x)|$꼴로 나타냈을 때 한 점만 미분 불가능이 나오는 경우는 2번 개형이다. 그러나 2번 개형은 3중근이 존재하는 개형이지만 **현재 주어진 다항함수 $y=f(x)$는 3중근이 만들어질 수 없다**($\because$ $y=f(x)$을 이루는 항 중 왼쪽 항에 근이 존재하지 않는다). 따라서 다항함수 $y=f(x)$는 4차 함수가 아니다.

ii) 다항함수 $y=f(x)$가 3차 함수인 경우

3차 함수의 개형은 오른쪽 그림과 같이 총 3가지의 경우다. **이 개형 모두 $y=|f(x)|$꼴로 나타냈을 때 한 점에서만 미분 불가능인 경우가 가능하다.** 따라서 $a=0$으로 두고($\because$ 3차 함수로 가정했기 때문이다), 다항함수 $y=f(x)$의 x축과의 교점을 $x=2$로 두고 식을 전개하면 $f(2)=7(2b+c)=0$이 나온다.

$\therefore$ $c=-2b$이며, $\dfrac{f(9)}{f(3)}=\dfrac{91\times 7b}{13\times b}=49$이다.

iii) 다항함수 $y=f(x)$가 2차 함수인 경우

2차 함수의 개형은 오른쪽 그림과 같이 1가지의 경우밖에 없으며, 한 점에서만 미분 불가능인 경우는 존재하지 않는다. 따라서 다항함수 $y=f(x)$는 2차 함수가 아니다.