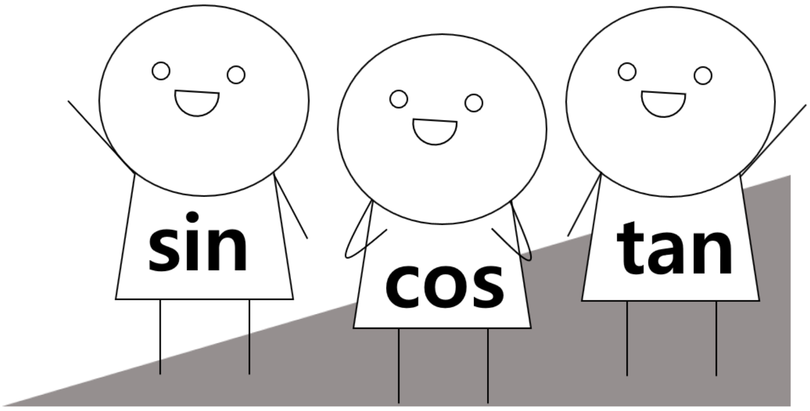
삼각함수 도우미

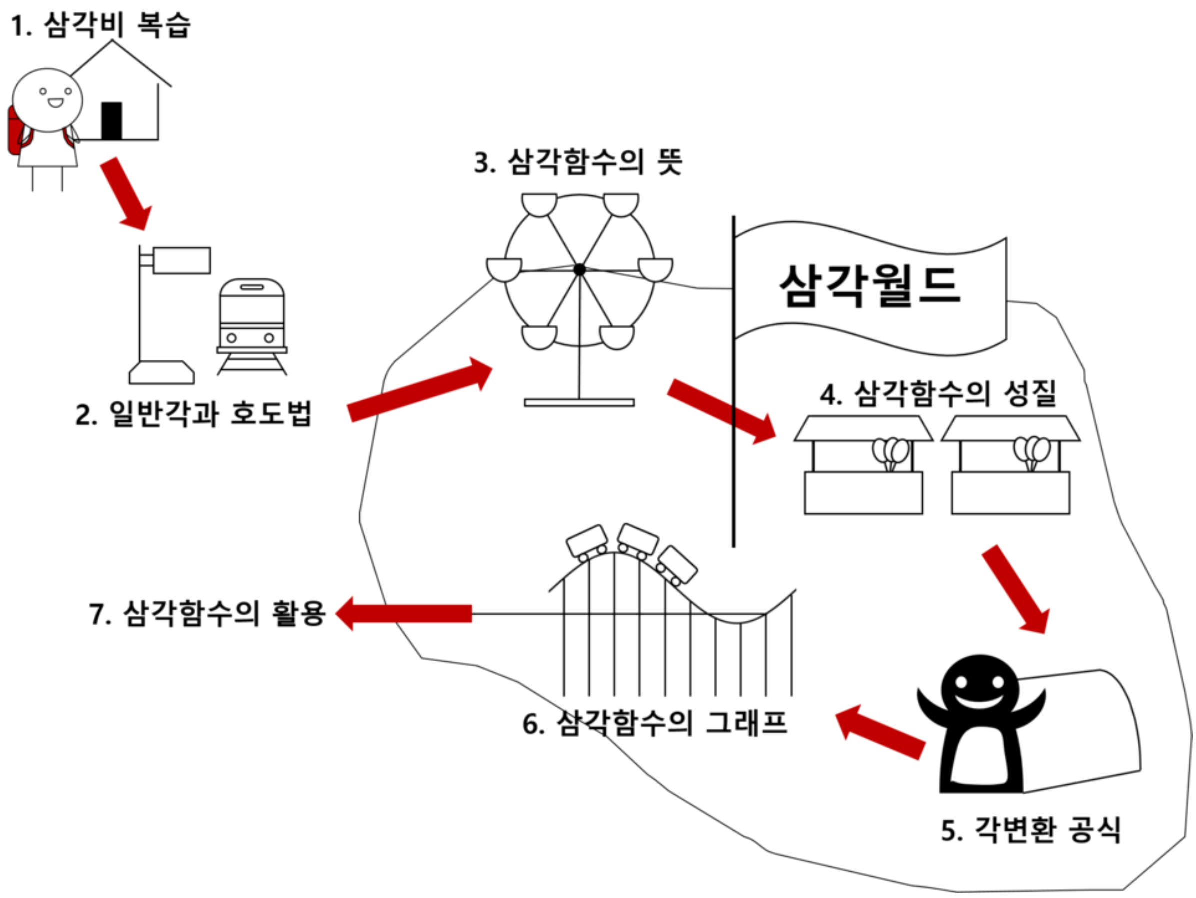
Part 1. 삼각함수의 뜻과 그래프



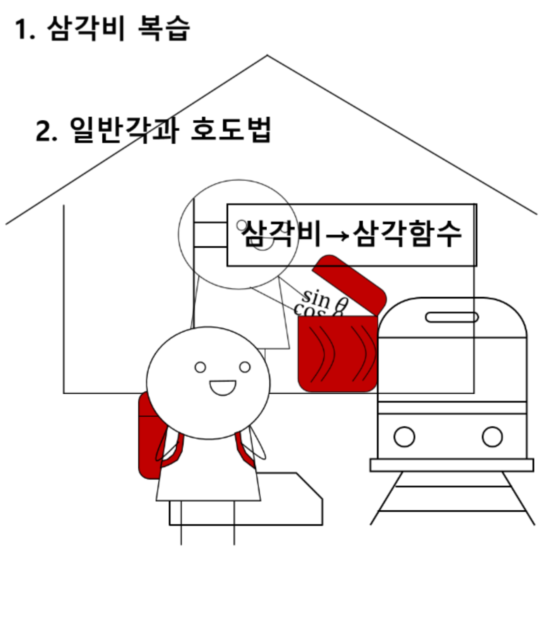
여러분 안녕하세요. 도우미입니다

오늘부터 저와 함께 미적분Ⅱ의 두 번째 대단원의 첫 번째 중단원인 ‘2-1. 삼각

함수의 뜻과 그래프' 를 공부해 볼 텐데요. 이 단원이 끝날 때까지 우리가 거쳐야 하는 여정은 다음과 같습니다.



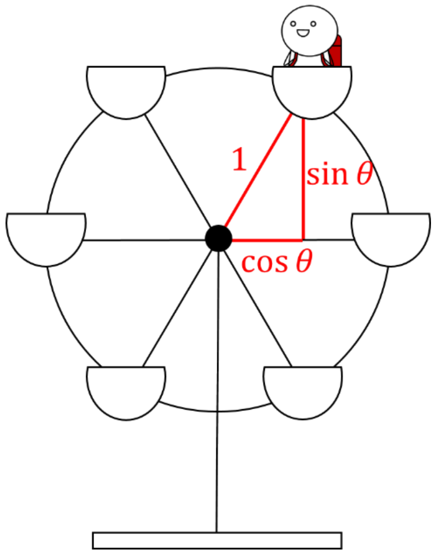
"1. 삼각비 복습" 에서는 중 3 때 배웠던 삼각비 관련 내용 중에서 삼각함수를 공부하는데 필요한 개념들을 챙길 것이고,



“2. 일반각과 호도법”에서는 삼각비를 삼각함수로 확장하기 위해 필요한 개념인 일반각과 호도법에 대하서 간략하게 알아볼 것입니다.

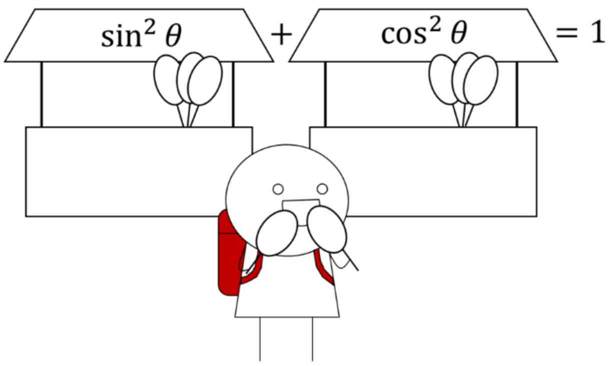
"3. 삼각함수의 뜻"에서는 삼각함수의 정의를 정확하게 이해해 볼 텐데요. 삼각함수의 모든 이야기는 삼각함수의 정의로부터 시작되므로 이 부분은 우리의 여정에서 가장 중요한 부분이라고 할 수 있습니다.

3. 삼각함수의 뜻



"4. 삼각함수의 성질"에서는 삼각함수를 정의로부터 딸려 나오는 몇 가지 간단한 공식들을 익히고 이 공식들을 이용하여 다양한 식의 값을 구해 볼 것입니다.

4. 삼각함수의 성질

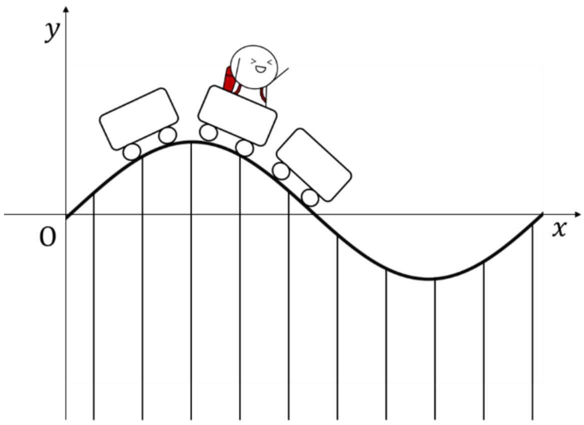


"5. 각변환 공식"에서는 sinθ, cosθ, tanθ 등에서 각 θ 를 바꿔 치기하는 여러가지 규칙들을 알아볼 것입니다. 공식이 좀 많아서 처음에는 거부감이 들 수도 있지만 원리를 이해하고 공식을 적용하다 보면 각을 바꾸는 재미가 꽤 쏠쏠하다는 걸 느끼게 되실 겁니다.

5. 각변환 공식

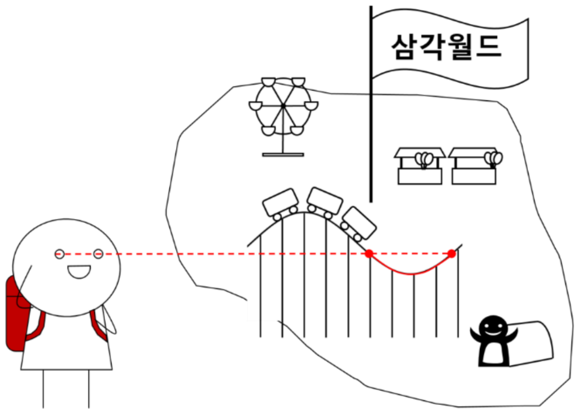
"6. 삼각함수의 그래프"에서는 삼각함수의 그래프를 그리는 방법과 해석하는 방법을 아주 디테일하게 알아볼 것입니다.

6. 삼각함수의 그래프



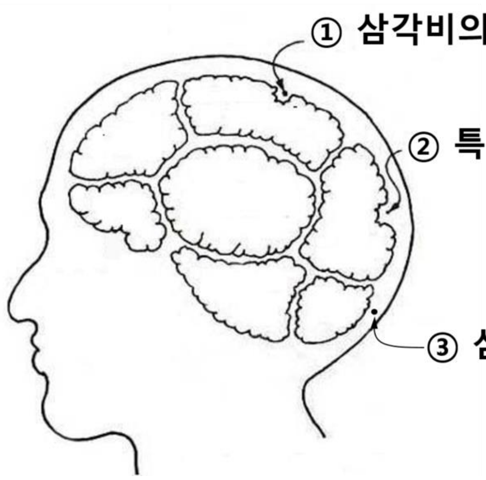
마지막으로 "7. 삼각함수의 활용"에서는 삼각함수의 그래프를 활용하여 삼각방정식 또는 삼각부등식을 풀어 볼 텐데요. 여기까지 공부를 마치면 우리는 삼각함수와 그 그래프를 해석할 줄 아는 눈을 갖게 될 것입니다.

7. 삼각함수의 활용



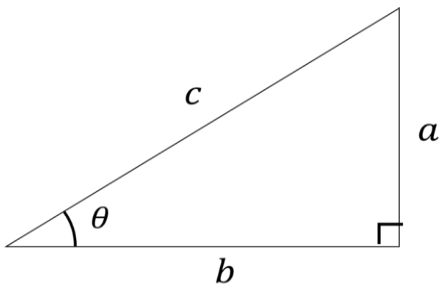
자, 그럼 "1. 삼각비 복습" 부터 바로 시작해 봅시다.

앞으로 삼각함수를 공부하는 과정에서 크게 좌절하지 않기 위해서는 중 3 때 배웠던 "삼각비" 를 어느정도 알고 가는 게 좋은데요. 구체적으로 이번 시간에 우리가 기억속에서 꺼내야 할 개념은 다음의 세 가지입니다. 글을 다 읽으신 후 이 세 가지 개념이 머릿속에 잘 자리 잡았는지 스스로 확인해 보세요.



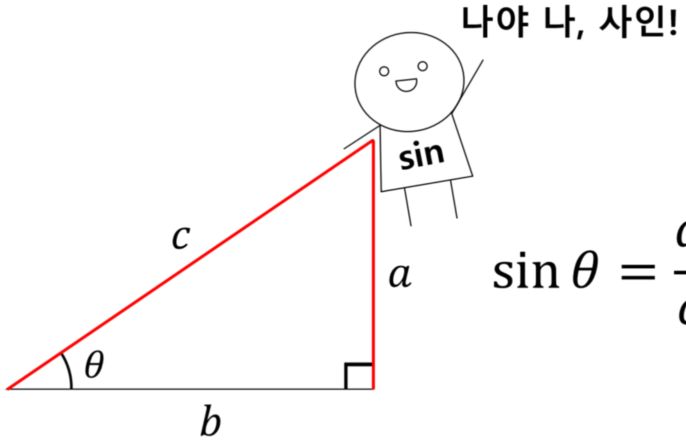
누군가 여러분에게 삼각비가 뭐냐고 묻는다면 다음과 같이 친절하게 설명해 주시기를 바랍니다.

"삼각비란 직각삼각형에서의 두 변의 길이의 비를 말한 단다.
대표적인 삼각비로 sinθ 와 cosθ, 그리고 tanθ 가 있지."



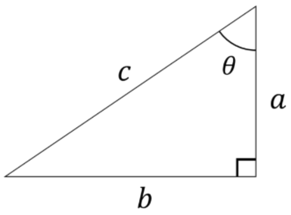
$\frac{a}{c}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
$\sin\theta$		$\cos\theta$		$\tan\theta$	

"sinθ 는 빗변의 길이에 대한 높이의 길이의 비, 즉 (높이)/(빗변)의 값을 갖는데 여기서 높이란 sinθ 에서 θ 가 마주보는 변을 말한 단다."

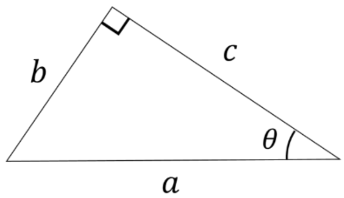


$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$

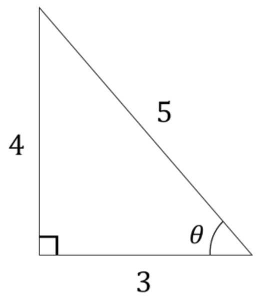
(빗변: 직각삼각형에서 직각의 대변, 가장 긴 변)



$$\sin\theta = \frac{b}{c}$$

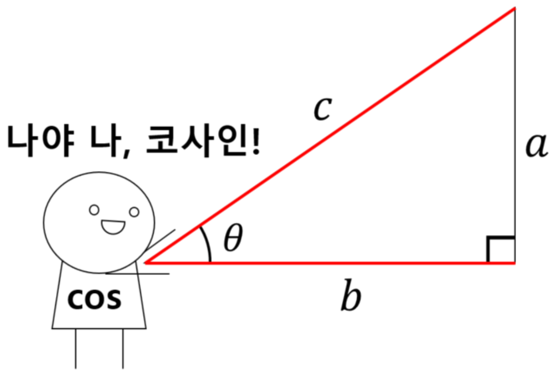


$$\sin\theta = \frac{b}{a}$$

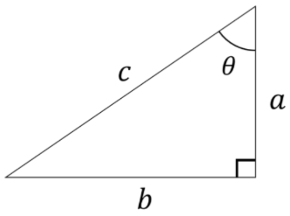


$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

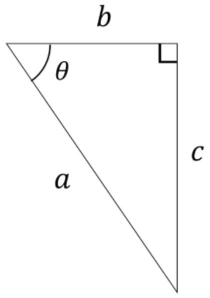
"cosθ 는 빗변의 길이에 대한 밑변의 길이의 비, 즉 (밑변)/(빗변)의 값을 갖는데 여기서 밑변이란 빗변과 함께 cosθ 의 θ 를 끼고 있는 변을 말한 단다."



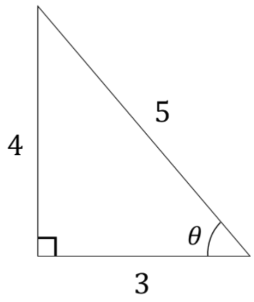
$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$



$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$

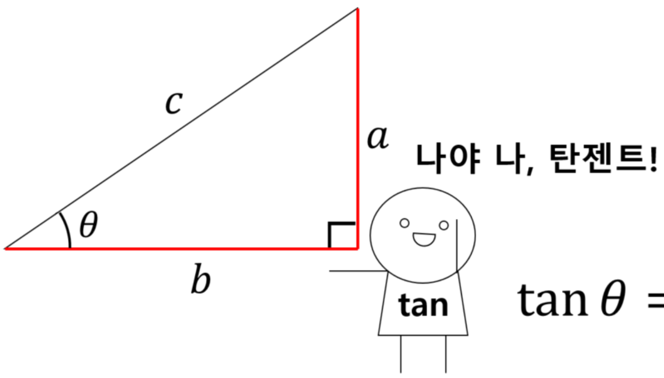


$$\cos\theta = \frac{b}{a}$$



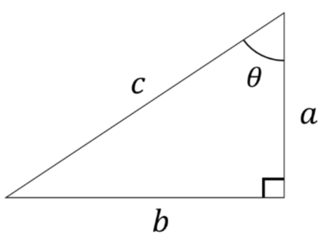
$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

"tanθ 는 밑변의 길이에 대한 높이의 길이의 비 즉, (높이)/(밑변)의 값을 갖는단다. 그렇다 보니 tanθ 는 언제나 sinθ/cosθ 로 바꿔 쓸 수 있지."

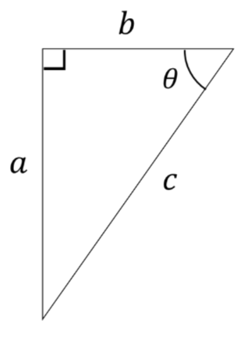


$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

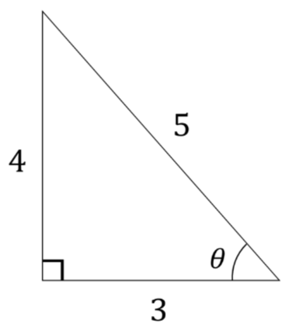
$$= \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$



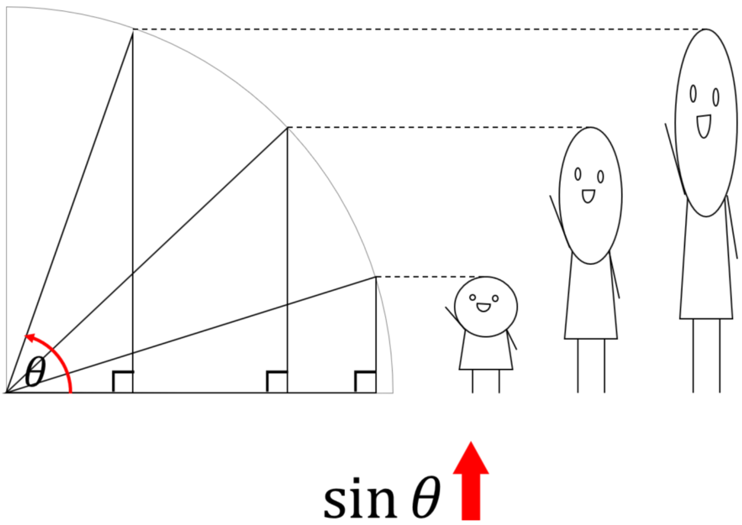
$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$



$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$

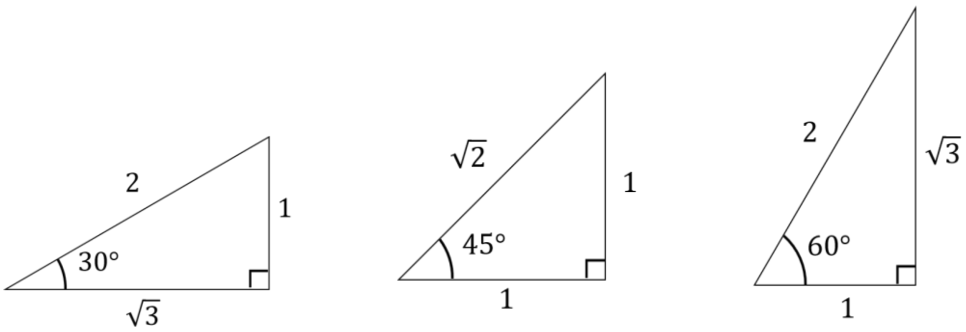
이 정도 설명할 수 있다면 어디 가서 삼각비가 뭔지 좀 안다고 얘기할 수 있겠죠?

좀 더 나아가서 각 θ 의 크기의 변화에 따른 삼각비 값의 변화를 추적해 봅시다. 아래 그림과 같이 직각삼각형의 빗변의 길이를 고정시킨 채 각 θ 의 크기를 점점 키워보면 높이가 점점 길어지는 것을 확인할 수 있습니다. 따라서 (높이)/(빗변)의 값을 갖는 sinθ 는 0°<θ <90°에서 θ 가 커질수록 커집니다.



(θ 는 직각삼각형의 직각이 아닌 두 내각 중 한 각이므로 0°와 90° 사이의 값을 가집니다.)

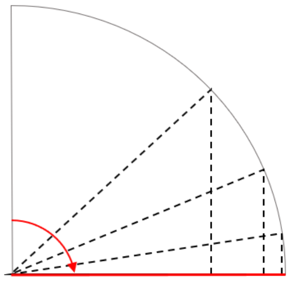
구체적으로 θ 가 30°, 45°, 60°일 때 sinθ 는 각각 1/2, √2/2, √3/2 의 값을 갖습니다. 이 값들은 특수각(30°, 45°, 60°)를 내각으로 갖는 직각삼각형에서 변의 길이의 비를 떠올려 보면 구할 수 있긴 합니다만 특수각에 대한 삼각비 값은 외워 두시는 게 훗날을 위해 좋습니다.



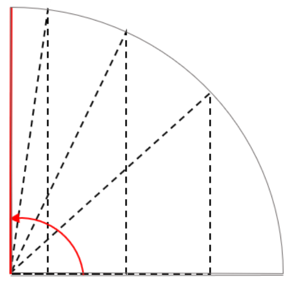
$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

θ=0°가 되면 높이가 사라지므로 sin0°=0 입니다. 반면에 θ=90°가 되면 빗변의 길이와 높이의 길이가 같아지므로 sin90°=1 입니다.

$$\theta = 0^\circ$$



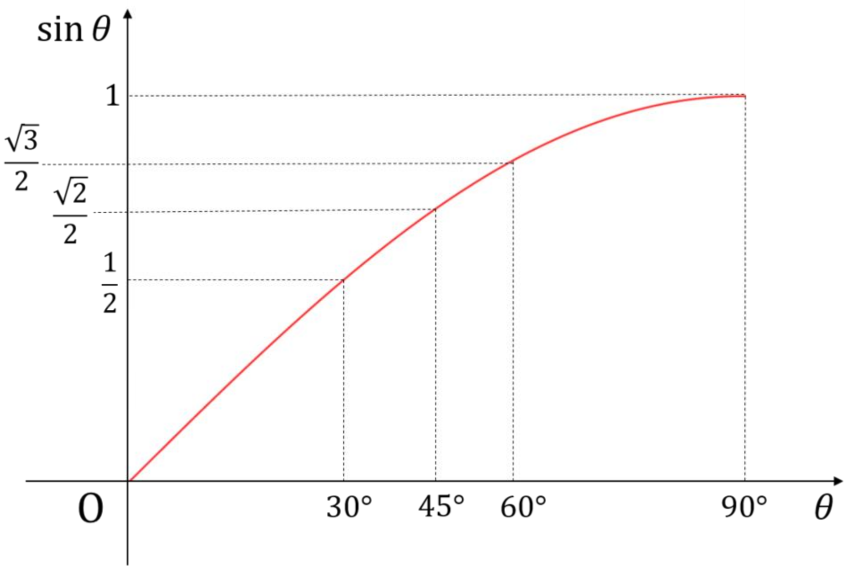
$$\theta = 90^\circ$$



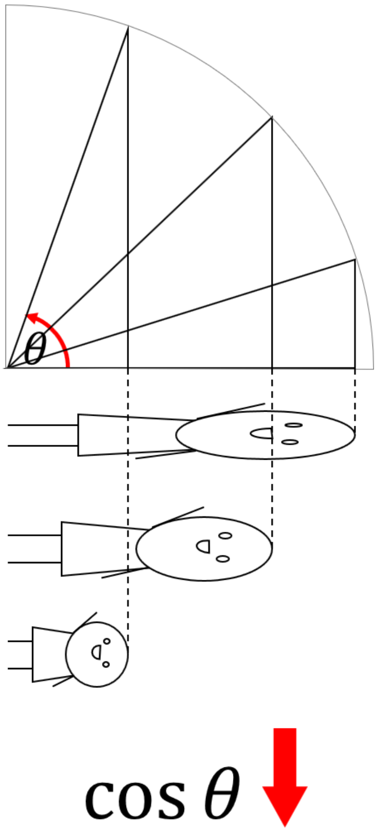
$$\sin 0^\circ = \frac{(\text{높이})}{(\text{빗변})} = \frac{0}{(\text{빗변})} = 0$$

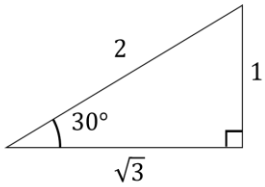
$$\sin 90^\circ = \frac{(\text{높이})}{(\text{빗변})} = \frac{(\text{빗변})}{(\text{빗변})} = 1$$

사실 θ 가 0° 또는 90°일 때는 직각삼각형의 만들어지지 않으므로 삼각비를 정의하기가 조금 애매합니다만 뒤에서 삼각함수를 공부하면 sin0°=0, sin90°=1 임을 확신을 갖고 말할 수 있게 됩니다. 아무쪼록 종합하면 θ 가 0°부터 90°까지 커질 때, sinθ 는 0 부터 1 까지의 값을 가지면서 커집니다.

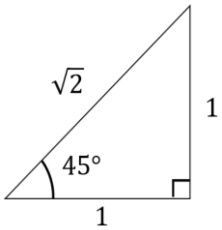


 한편, 이번에는 밑변의 길이 변화에 초점을 맞추어 θ 의 크기를 키워보면 θ 가 커질 때 밑변은 점점 짧아진다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 (밑변)/(빗변)의 값을 갖는 cosθ 는 0°<θ<90°에서 θ 가 커질수록 작아집니다. 구체적으로 θ 가 30°, 45°, 60°일 때 cosθ 는 각각 √3/2, √2/2, 1/2 의 값을 갖습니다.

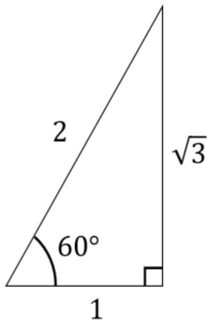




$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



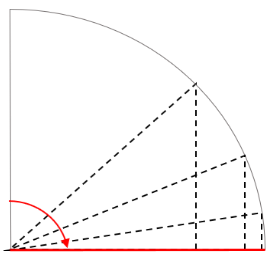
$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



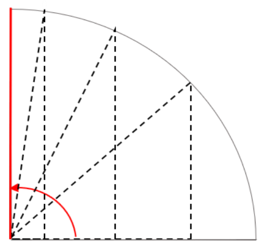
$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

θ=0°가 되면 밑변의 길이는 빗변의 길이와 같아지므로 cos0°=1 입니다. 반면에 θ=90°가 되면 밑변이 사라지므로 cos90°=0 입니다.

$\theta = 0°$



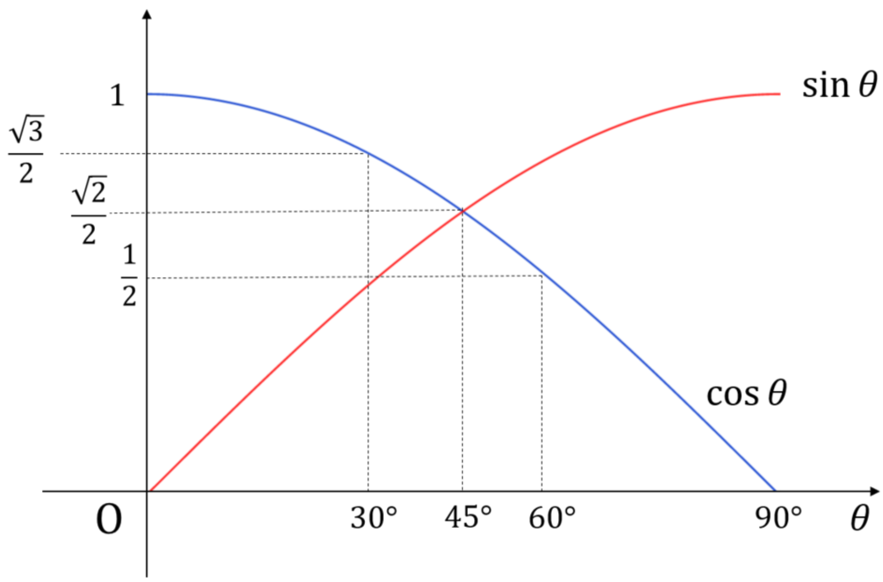
$\theta = 90°$



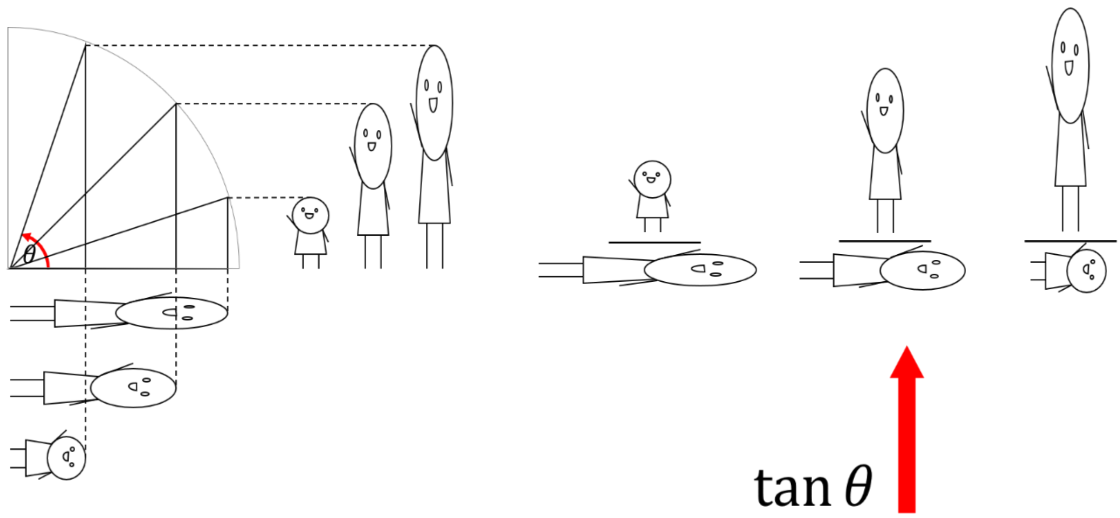
$$\cos 0° = \frac{(\text{밑변})}{(\text{빗변})} = \frac{(\text{빗변})}{(\text{빗변})} = 1$$

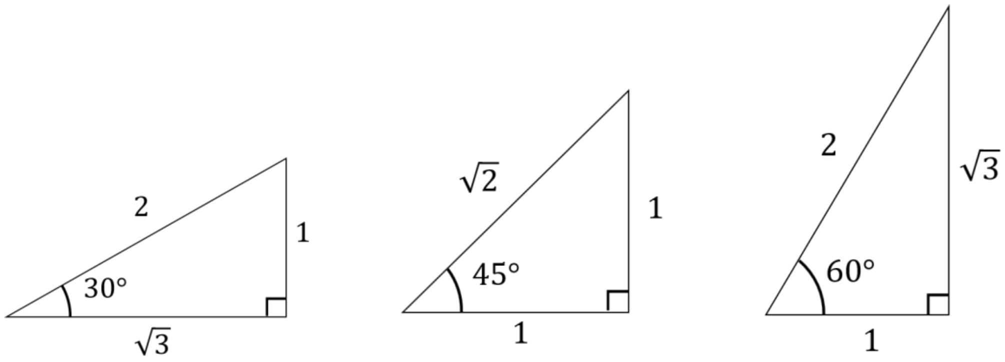
$$\cos 90° = \frac{(\text{밑변})}{(\text{빗변})} = \frac{0}{(\text{빗변})} = 0$$

종합하면 θ 가 0°부터 90°까지 커질 때, cosθ 는 1 부터 0 까지의 값을 가지면서 작아집니다. sinθ 와는 반대되는 양상을 보이네요.



마지막으로 tanθ 의 변화를 추적해 봅시다. 앞서 살펴봤듯이 0°<θ<90°에서 θ 가 커질수록 직각삼각형의 높이는 길어지고 밑변은 짧아지므로 (높이)/(밑변)의 값을 갖는 tanθ 는 θ 가 커질수록 커집니다. 구체적으로 θ 가 30°, 45°, 60°일 때 tanθ 는 각각 √3/3, 1, √3 의 값을 갖습니다.



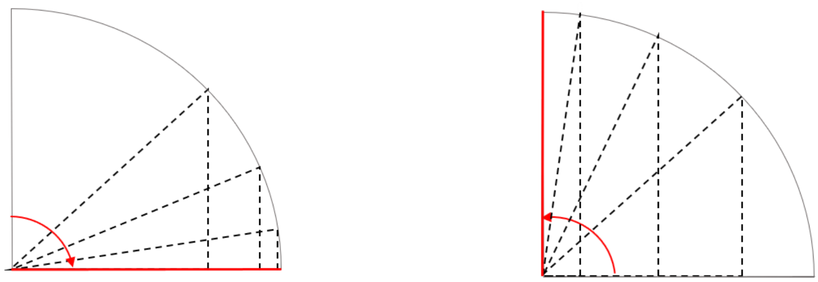


$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$　　$\tan 45° = 1$　　$\tan 60° = \sqrt{3}$

θ 가 0°가 되면 높이가 사라지므로 tan0°=0 입니다. 반면에 θ 가 90°가 되면 밑변이 사라지므로 tanθ 는 분모가 0 이 되어 정의되지 않습니다.

다만, tanθ=sinθ/cosθ 에서 θ 가 90°에 한없이 가까워질수록 cosθ(분모)→0, sinθ(분자)→1 이므로 이때 tanθ 의 값은 무한대로 발산함을 알 수 있습니다.

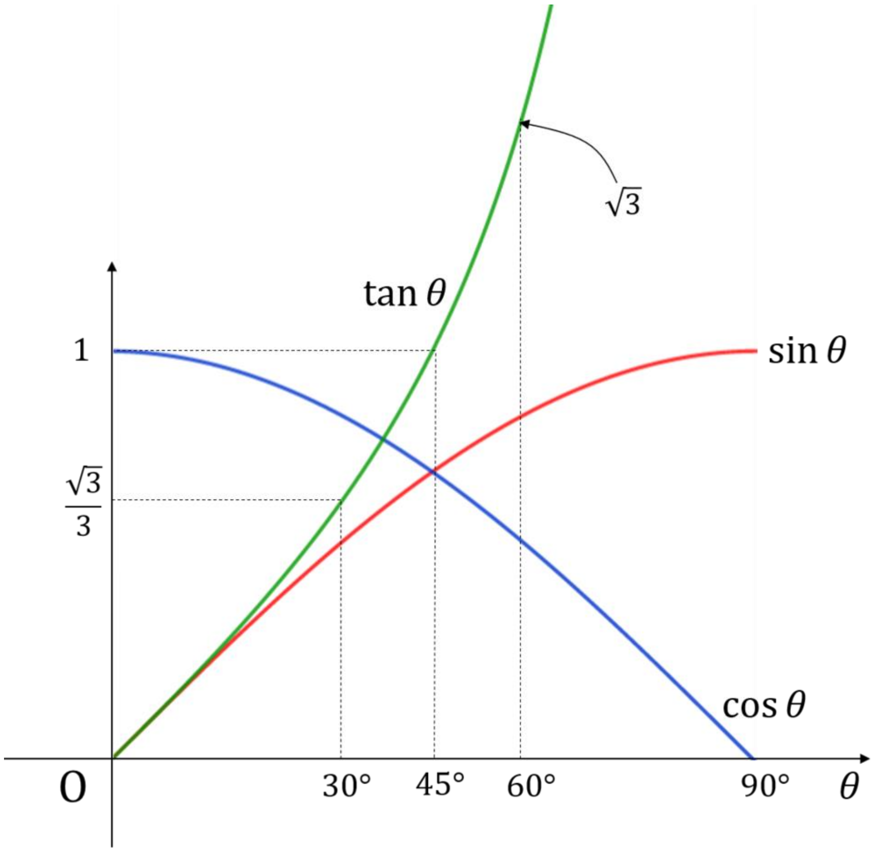
$\theta = 0°$　　$\theta \rightarrow 90°$



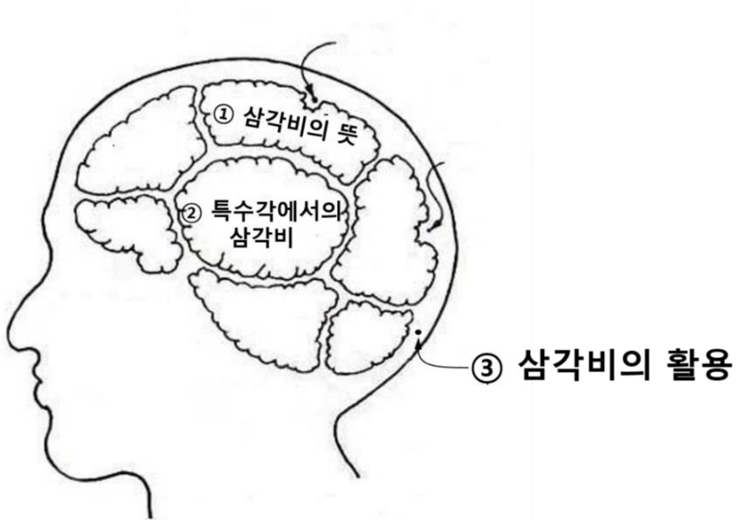
$$\tan 0° = \frac{0}{(\text{밑변})} = 0 \qquad \lim_{\theta \to 90°-} \tan\theta = \infty$$

정리하면 θ 가 0°부터 시작해서 90°에 한없이 가까워질 때, tanθ 의 값은 0 부터 시작해서 무한대로 발산합니다. 0°≤ θ ≤ 90 에서 기껏해야 최대값 1 을 갖는 사인과 코사인과는 그 궤적을 달리하지요.

끝까지 집중해서 세 번째 개념인 '삼각비의 활용'까지 머릿속에 잘 넣어 봅시다.



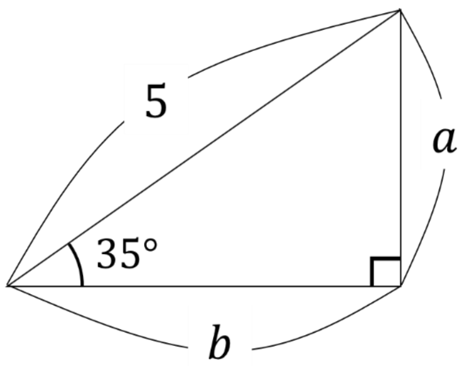
벌써(?) 처음 목표했던 바의 2/3를 이루었습니다!



"활용"이란 단어에 거부감 느끼는 분들이 계실 거라 예상합니다만 너무 걱정하지 않아도 됩니다. 중3때 배운 삼각비의 활용의 모든 내용을 기억해야 하는게 아니라 다음의 능력만 갖추시면 되거든요.

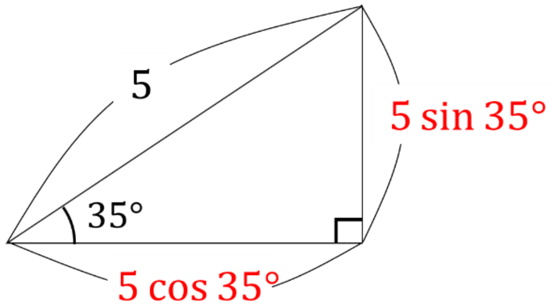
직각삼각형의 한 변의 길이와 한 내각의 크기가 주어졌을 때,
다른 두 변의 길이를 삼각비를 이용하여 표현하는 능력

무슨 말인지 예를 하나 들어보겠습니다. 오른쪽 그림과 같이 빗변의 길이가 5이고 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a, b인 직각삼각형의 한 내각의 크기가 35°라면 사인과 코사인의 정의에 의해 sin35°=a/5, cos35°=b/5이므로 a=5sin35°, b=5cos35°가 됩니다.



$$\sin 35° = \frac{a}{5} \longrightarrow a = 5\sin 35°$$

$$\cos 35° = \frac{b}{5} \longrightarrow b = 5\cos 35°$$



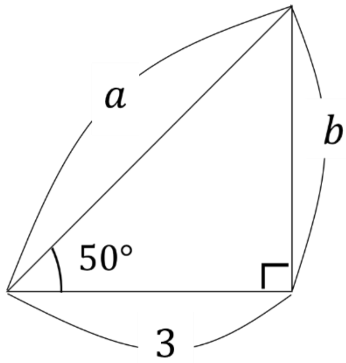
방금 우리가 한 일이 바로 직각삼각형의 한 변의 길이와 한 내각의 크기가 주어졌을 때 다른 두 변의 길이를 삼각비로 표현한 것입니다.

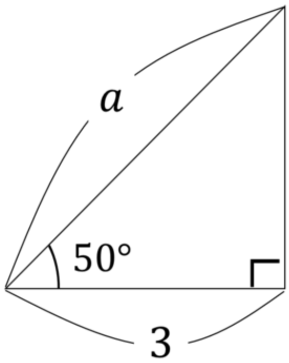
지금부터 연습을 좀 해볼 텐데요. 방법은 이렇습니다.

Step1. 주어진 한 변의 길이와 한 내각, 그리고 구해야 하는 변의 길이로 나타낼 수 있는 삼각비를 써본다.

Step2. Step1.에서 쓴 식을 한 쪽에 구해야 하는 변의 길이만 남기고 정리한다

차근차근 스텝을 밟아가며 오른쪽 직각삼각형의 두 변의 길이 a와 b를 삼각비를 이용하여 표현해 볼까요?





Step1. 주어진 한 변의 길이와 한 내각, 그리고 구해야 하는 변의 길이로 나타낼 수 있는 삼각비를 써본다.

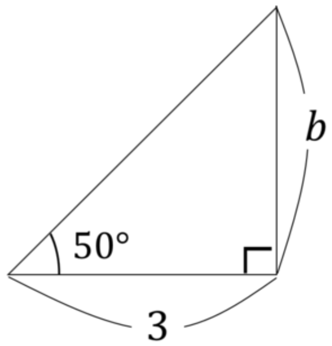
⇒ 길이가 3으로 주어진 변은 크기가 50°로 주어진 각의 밑변이고 a는 빗변의 길이므로 이들로 나타낼 수 있는 삼각비는 cos50°다.

$$\cos 50° = \frac{3}{a}$$

Step2. Step1.에서 쓴 식을 한 쪽에 구해야 하는 변의 길이만 남기고 정리한다

$$\cos 50° = \frac{3}{a} \longrightarrow a = \frac{3}{\cos 50°}$$

(바꿔치기 할 수 있음)



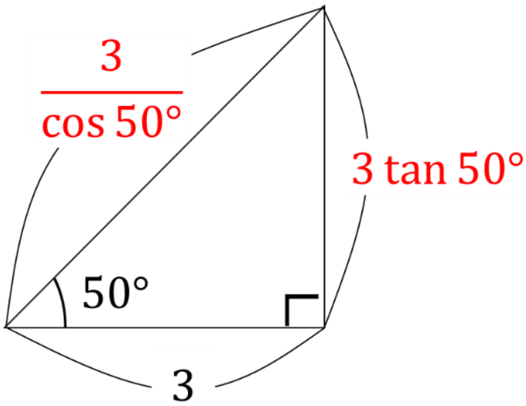
Step1. 주어진 한 변의 길이와 한 내각, 그리고 구해야 하는 변의 길이로 나타낼 수 있는 삼각비를 써본다.

⇒ 길이가 3으로 주어진 변은 각각 크기가 50°로 주어진 각의 밑변이고 b는 그 각의 높이의 길이므로 이들로 나타낼 수 있는 삼각비는 tan50°다.

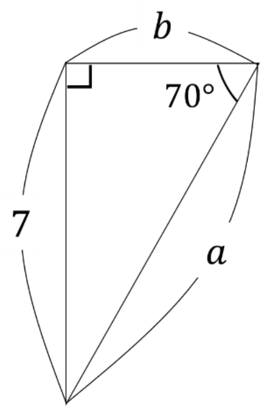
$$\tan 50° = \frac{b}{3}$$

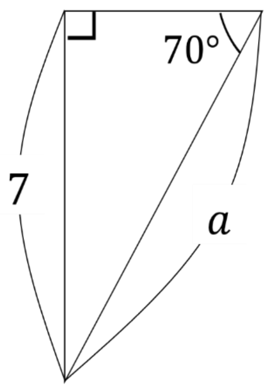
Step2. Step1.에서 쓴 식을 한 쪽에 구해야 하는 변의 길이만 남기고 정리한다

$$\tan 50° = \frac{b}{3} \longrightarrow b = 3\tan 50°$$



좀 더 빠르게 하나 더 연습해 봅시다.



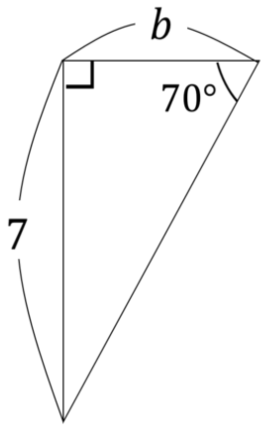


Step1. 주어진 한 변의 길이와 한 내각, 그리고 구해야 하는 변의 길이로 나타낼 수 있는 삼각비를 써본다.

$$\sin 70° = \frac{7}{a}$$

Step2. Step1.에서 쓴 식을 한 쪽에 구해야 하는 변의 길이만 남기고 정리한다

$$a = \frac{7}{\sin 70°}$$

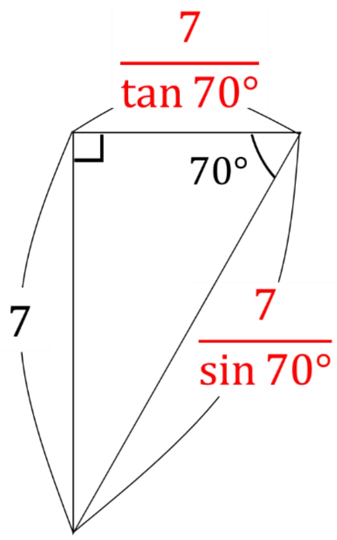


Step1. 주어진 한 변의 길이와 한 내각, 그리고 구해야 하는 변의 길이로 나타낼 수 있는 삼각비를 써본다.

$$\tan 70° = \frac{7}{b}$$

Step2. Step1.에서 쓴 식을 한 쪽에 구해야 하는 변의 길이만 남기고 정리한다

$$b = \frac{7}{\tan 70°}$$



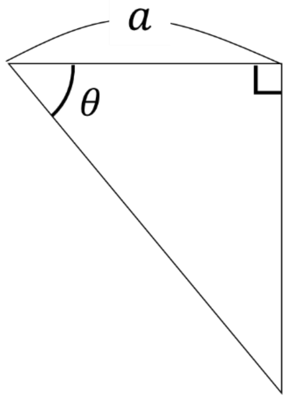
그런데……

앞으로 문제를 풀다 보면 Step1.과 Step2 의 두 단계를 거치는 것도 귀찮게 느껴질 때가 있을 겁니다. 그래서 준비했어요. 한방에 표현하는 방법!

한 방에 표현하는 방법!

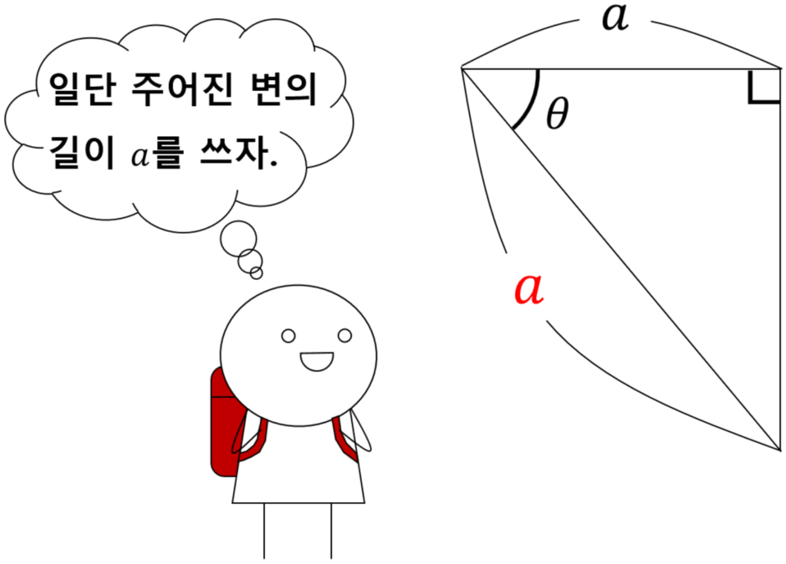
일단 ~~묻지도 말고 따지지도 말고~~ 주어진 변의 길이를 쓴 뒤, 크기가 주어진 각을 기준으로 주어진 변의 길이를 분모, 구해야 하는 변의 길이를 분자로 하는 삼각비를 떠올린다. 이때, 그 삼각비는 $\sin\theta, \cos\theta$, $\tan\theta$, 아니면 이들의 역수 $\frac{1}{\sin\theta}, \frac{1}{\cos\theta}, \frac{1}{\tan\theta}$ 중 하나일 것인데 이 삼각비를 맨 처음에 썼던 주어진 변의 길이에 곱해준다.

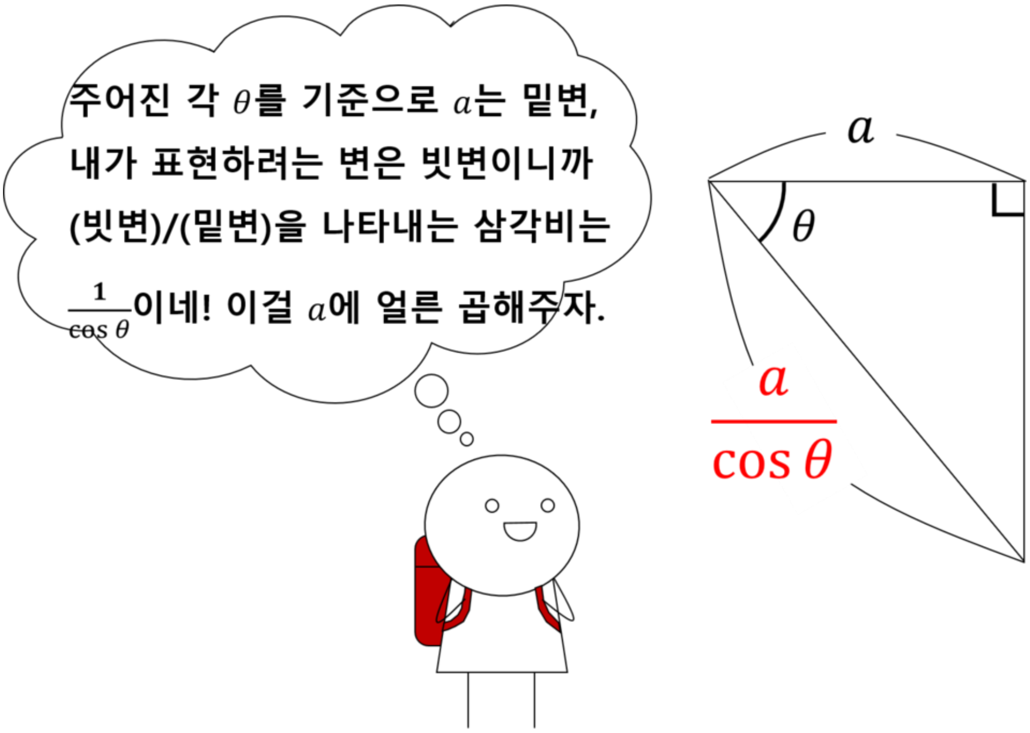
한 방에 표현하는 것 치곤 말이 좀 길죠? 하지만, 말 그대로 말이 길 뿐입니다. 실제로 빠르면 3 초안에 이루어질 수 있는 과정입니다.



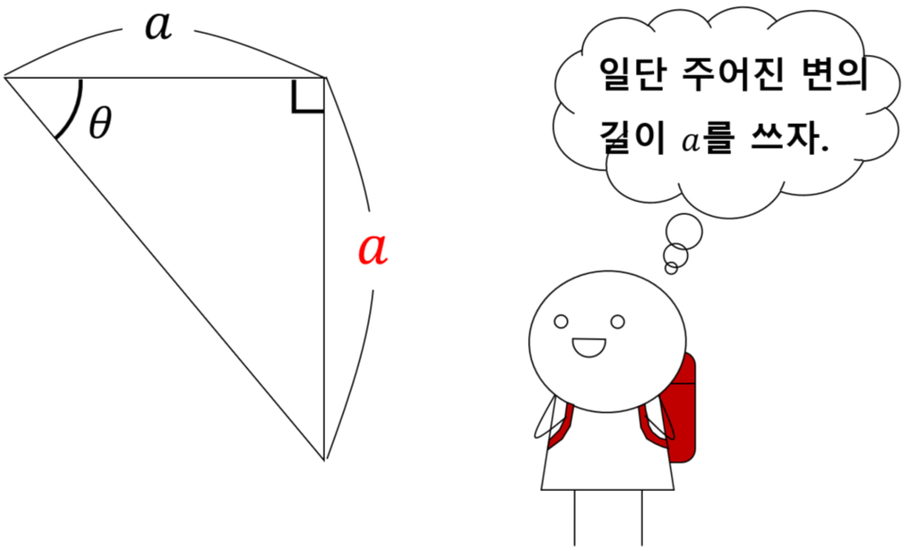
예를 하나 들어보죠.

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형의 한 변의 길이(a)와 한 내각의 크기(θ)주어졌을 때 다른 두 변의 길이를 일명 " 한방에 표현하는 방법" 으로 표현해 봅시다. 빗변의 길이부터 생각해보면......

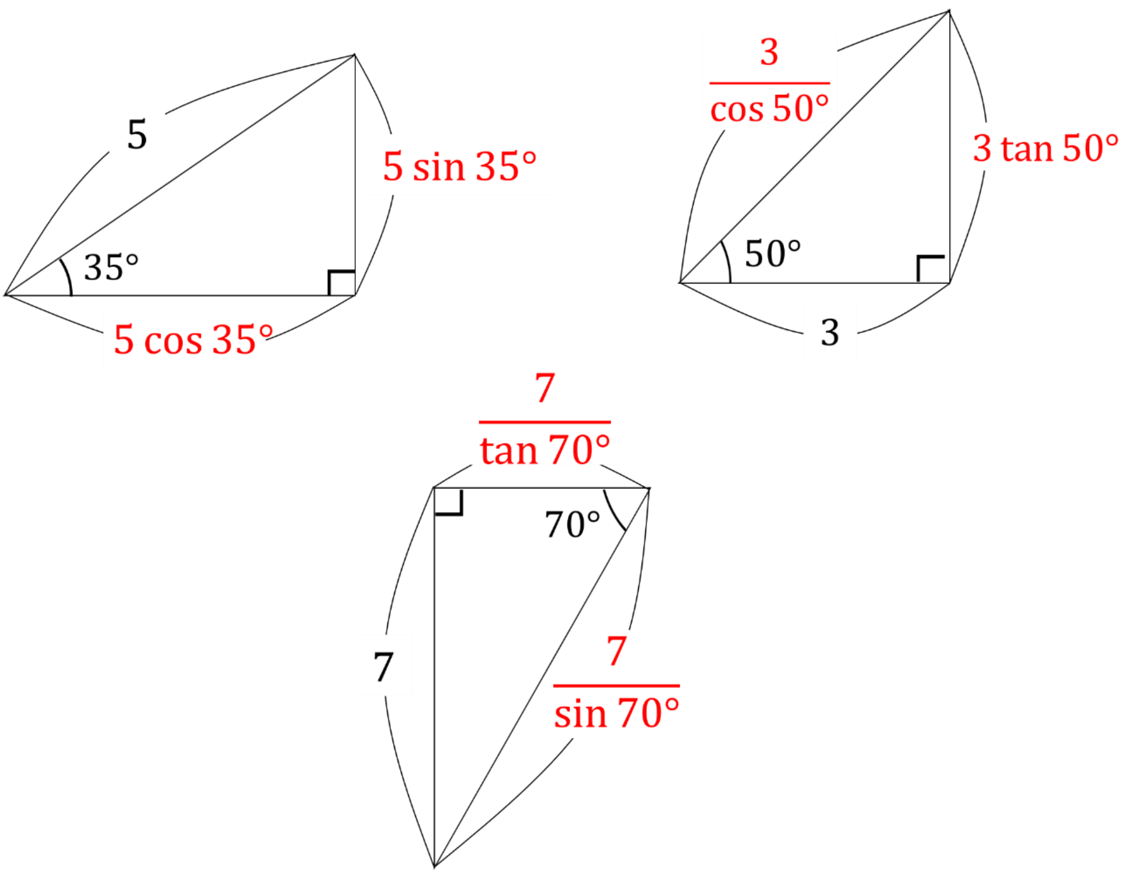




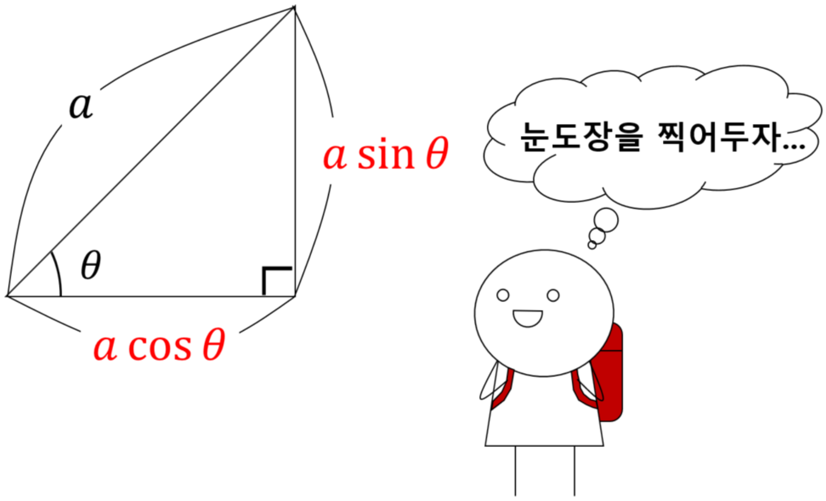
나머지 한 변의 길이도 마저 생각해보면.......



앞서 Step1.과 Step2.를 밟으며 연습했던 예시들에도 이 방법을 스스로 적용해 보세용.



특히 직각삼각형의 빗변의 길이가 주어졌을 때 나머지 두 변의 길이를 각각 사인과 코사인을 이용하여 표현하는 이미지를 강하게 기억해 주세요.



(그 이유는 삼각함수의 정의를 공부하는 날 알게 되실 겁니다^^)

아이고 여러분, 여기까지 읽느라 고생하셨습니다. 부디 여러분 머릿속에 오늘 목표한 개념들이 잘 자리 잡았기를 바랍니다.

그럼 다음 글 "2. 일반각과 호도법"에서 또 만나요!