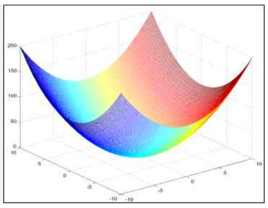
심화 수학 I

V. 이차곡선 (심화)

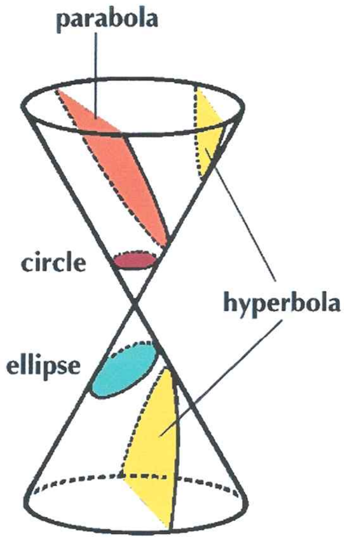
-이차 곡선의 정의와 기하학적 성질

-이차 곡선의 접선



1. 이차곡선이란?

이차곡선 혹은 **원뿔곡선**(Conic Section)은 원뿔을 자른 단면의 모양에서 유래한다. 원뿔의 단면에서 유래해 원뿔곡선이라 불리고, 수학적인 형태로 x와 y에 관한 이차식으로 표현되기 때문에 이차곡선이라고도 불린다. 즉, 모든 이차곡선은 다음과 같은 형태로 표현된다.



$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

이 때, b^2-4ac의 부호는 이차곡선의 형태를 결정한다. 고교 과정에서는 $b=0$인 형태만 다룬다.[1] 이차곡선의 종류로는 원, 포물선, 타원, 쌍곡선이 있으며 각각의 정의는 다음과 같다.

원	한 점으로부터 거리가 일정한 점들의 자취
포물선	한 직선과 한 점으로부터의 거리가 같은 점들의 자취
타원	두 점으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 자취
쌍곡선	두 점으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 자취

2. 포물선(Parabola)[2]

포물선은 정직선과 정점으로부터의 거리가 같은 점들의 자취이다. 이 때 이 직선을 **준선**, 정점을 **초점**이라고 한다. 준선이 $x=-p$이고 초점이 $F(p,0)$인 포물선의 방정식을 유도해보자.

포물선 위의 임의의 점을 $P(x,y)$라고 하면

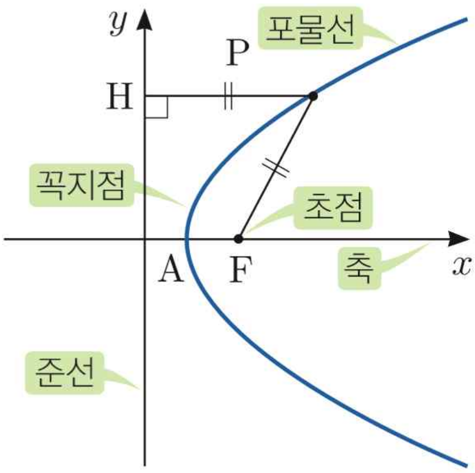
정의에 따라 $|x+p|=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$

양변을 제곱해 정리하면 $(x+p)^2-(x-p)^2=4px=y^2$

즉, 포물선의 자취 P의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq 0$)

만일 $p=0$이면 초점이 준선 위에 있으므로 포물선이 정의 되지 않는다.

포물선의 준선이 $y=-p$, 초점이 $F(0,p)$라면 포물선의 방정식은 $x^2=4py$가 됨을 쉽게 알 수 있다. 이는 앞서 배운 이차함수에 해당된다.



1) xy항이 존재하는 경우는 축이 x,y축과 수직한 이차곡선을 회전변환했을 때다.

2) "원“의 정의와 기하적 성질은 이미 다룬 내용이므로 생략한다.

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선을 구해보자. 이 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 하면, 우리가 소거해야할 문자는 n이다. 포물선과 직선이 접하는 것은 두 연립방정식의 해가 하나임과 동치이므로 방정식 $(mx+n)^2=4px$ 의 **판별식이 0**임을 이용한다.

방정식을 x에 관한 내림차순으로 정리하면 $m^2x^2-2(2p-mn)x+n^2=0$

판별식 $D/4=(2p-mn)^2-m^2n^2=4p^2-4pmn=0$

이 때 $p=0$이면 포물선이 정의되지 않으므로, 양변을 $4p$로 나눠서 정리하면 $p=mn$

따라서 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음과 같다.[3)]

$$y=mx+\frac{p}{m}$$

같은 방법으로 $x^2=4py$ 꼴의 접선의 방정식도 쉽게 유도할 수 있다. 혹은 직관적으로 $x^2=4py$가 $y^2=4px$의 역함수이므로 접선의 방정식 역시 역함수를 구하겠다고 생각하면[4)] $mx=y+pm^2$이다. 이를 정리하면 $y=mx-pm^2$이 된다.

이번에는 기울기가 주어지지 않고 포물선 위의 한 점 (x_1,y_1)에서의 접선의 방정식을 구해보자. 구하고자 하는 방정식을 $y=m(x-x_1)+y_1$이라고 두면 이는 앞에서 구한 $y=mx+p/m$과 동일한 식이다. 따라서, $p/m=-mx_1+y_1$, $x_1m^2-y_1m+p=0$라는 m에 관한 이차방정식을 구할 수 있다. 이 때 직접 근을 구해($y_1{}^2=4px_1$이용) 정리하면 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

마찬가지로 $x^2=4py$ 위의 한 점 (x_1,y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x=2p(y+y_1)$이다.

포물선은 다양한 기하학적 성질을 갖는다. 대표적으로 6가지를 살펴볼 것인데, 이는 다음과 같다:

〈포물선의 기하학적 성질〉

① 반사 성질: 포물선의 축에 평행하게 입사된 빛은 포물선에서 반사되어 초점을 지난다.
② 접선의 성질 I: 준선 위의 한 점에서 포물선에 그은 두 접선은 직교한다. (역도 성립)
③ 접선의 성질 II: 포물선의 한 접선으로 만들어지는 사각형은 마름모다.
④ 극선의 성질 I: 준선 위의 한 점에서 포물선에 그은 극선은 초점을 지난다. (역도 성립)
⑤ 극선의 성질 II: $1/a+1/b=1/f$
⑥ 원점에서 직교하는 두 직선과 포물선의 교점을 이은 직선은 $(4p,0)$을 지난다.

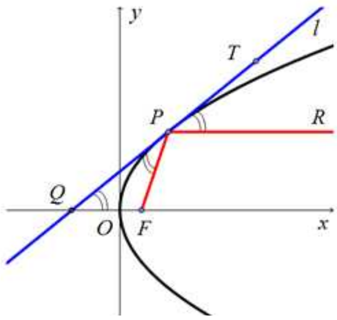
물론, 이 외에도 수많은 기하학적 성질이 존재[5)]하지만 가장 많이 알려진 이 6가지 성질 외에는 대부분 그 concept이나 유도하는 idea가 비슷하기 때문에 다루지 않는다.

---

3) 다만, 이 식은 x축에 수직한 접선 $x=0$을 표현하지 못한다.
4) 단, 기울기가 계속 m인 것에 유의한다.
5) 여담으로, 포물선, 타원 쌍곡선 중 포물선이 가장 다루기 쉽다. 즉 알려진 기하학적 성질은 포물선과 관련된 내용이 가장 많다.

① 포물선의 반사 성질

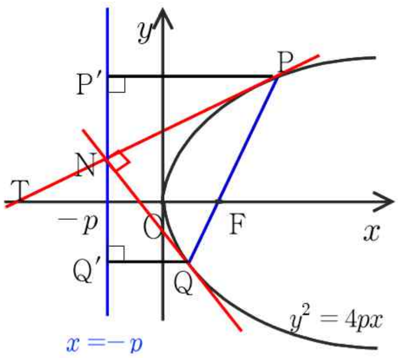
모든 이차곡선은 **반사성**을 갖는다. 포물선의 경우 축과 평행하게 입사한 빛은 포물선에서 반사되어 초점을 향해 나아간다. 이 때 반사의 수학적 의미는 **입사각과 반사각이 같다**는 것이다.



이차곡선의 기하학적 성질의 증명에 있어 우리는 논증기하학적 방법과 해석학적 방법을 시도해볼 수 있다. 때에 따라서는 두 방법을 적절히 섞어 사용해야 한다. 일반성을 잃지 않고 포물선 $y^2=4px$이 반사성을 가짐을 보이자. 포물선 위의 임의의 좌표를 $P(a,b)$라고 하면 P를 접점으로 갖는 접선 l의 방정식은 $by=2p(x+a)$이고, 이 방정식의 x절편인 Q의 좌표는 $(-a,0)$이 된다. 따라서 $\overline{FQ}=|a+p|$이고, $\overline{FP}$의 길이는 $\overline{FP}=\sqrt{(a-p)^2+b^2}=\sqrt{(a+p)^2}$ 가 된다. ($\because$점 P는 포물선 위의 점이므로 $b^2=4pa$가 성립) 따라서 $\triangle QPF$는 이등변삼각형임을 알 수 있다. $\triangle QPF$가 이등변삼각형이라는 사실을 알았으면 $\angle PQF=\angle TPR$(동위각)이므로 반사 성질을 쉽게 증명할 수 있다.

결국 반사 성질은 $\triangle QPF$가 이등변삼각형임을 보이는 것과 동치이다.

② 접선의 성질: 직교한다



포물선의 준선 위의 임의의 한 점에서 포물선에 그은 두 접선은 직교한다. 준선 위의 임의의 한 점을 $N(-p,a)$라고 하자. 이 때 N에서 그은 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx+\frac{p}{m},\ \ a=-mp+\frac{p}{m}$$

식을 정리하면 $pm^2+am-p=0$이므로 m에 관한 이차방정식이 만들어진다. **근과 계수의 관계**에서 두 근의 곱이 -1므로 N에서 그은 두 직선의 기울기 곱이 -1이라는 것을 알 수 있다. 따라서 두 직선은 직교한다.

이 명제는 역도 성립한다. 다시 말해, 두 접선이 직교하면 그 교점은 반드시 준선 위에 있다.[6] 두 접선이 직교하므로 각각의 기울기를 m과 $-1/m$이라고 두면 두 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx+\frac{p}{m},\ \ y=-\frac{1}{m}x-mp$$

두 식을 연립하여 y를 소거하면 $\left(m+\dfrac{1}{m}\right)x=-\left(m+\dfrac{1}{m}\right)p$ 이고, $m+\dfrac{1}{m}\neq 0$이므로 $x=-p$가 유도되고, 이는 준선이다.

또다른 접선의 성질로 접선의 x절편과 초점, 접점, 준선 위의 점이 이루는 사각형이 마름모라는 성질이 있다. 그러나 이것은 접선으로 만들어지는 삼각형이 이등변삼각형이라는 명제와 동치이므로 따로 다루진 않겠다.

6) 단, 교점이 만들어지는 경우만 생각한다. (x축에 수직한 접선은 생각하지 않는다.)