무엇이 수학을 어렵게 만드는가?

1. '개념', 넌 대체 무엇에 쓰는 물건인고?

수학을 배우는 학생들이 어려움을 느끼는 가장 큰 이유 중의 하나는 도무지 자신이 무엇을 배우고 무엇을 풀고 있는 것인지 전체적인 그림이나 방향을 알지 못한다는 것입니다.

예를 들어, 미분계수(도함수)의 정의나 성질을 배우고 그것을 이용하여 기계적인 계산을 할 줄 아는 학생은 많지만, 정작 미분이 무엇을 해결하기 위한 개념이고 그것이 얼마나 효과적인 방법인지를 이해하는 학생은 매우 드뭅니다.
이것은 마치 '미로 속에서 눈앞에 놓인 상황만 보고 나아갈 방향을 결정하는 것' 과 '미로의 구조가 어떤 식으로 만들어졌는지를 이해하고서 나아가는 것' 의 차이라고 할 수 있습니다.
똑같은 미로를 탐구한다 할지라도 앞의 경우가 어려움을 훨씬 크게 느끼리라는 것은 불 보듯 뻔한 일입니다.

그러므로 수학에 대한 상대적인 난이도를 낮추고 막연한 두려움을 없애기 위해서는 각 단원에서 배우는 개념들이 어떠한 필요에 의해서 만들어졌고, 주어진 상황을 어떠한 방향으로 해결해 나가려는 것인지를 반드시 이해할 필요가 있습니다.

- 「수학의 기준」의 제 1장은 그 단원의 전체적인 밑그림을 보여드립니다. -

2. 난 머리가 받쳐주지 않아서...

흔히들 수학을 잘 하려면 머리가 좋아야 한다는 얘기를 많이 합니다. 그러나 이것은 결코 수능에 필요한 수학을 두고 하는 얘기가 아닙니다.
수학을 필요 이상으로 어렵게 느끼게 만드는 또 하나의 원인은 문제를 푸는 데 개념을 이용하기보다는 자신의 머리를 더 많이 사용하기 때문입니다.

바둑 용어 중에 '정석' 이라는 표현이 있습니다. 정석이란 나도 악수(안 좋은 수)를 두지 않고 상대방도 악수를 두지 않았을 때 나올 수 있는 가장 최선의 방법들을 모아 놓은 것입니다.
바둑에서는 기본 정석만 이해(**그것이 왜 정석이 될 수밖에 없는지를**)해도 상당한 수준의 실력을 쌓을 수 있다고 합니다.

수학에서는 이러한 정석에 해당하는 것이 바로 '개념' 입니다.
즉, 수학적인 문제를 해결할 때는 특별한 요령이나 기발한 아이디어보다 개념을 이용하는 것이 훨씬 효과적이고 검증된 방법이라는 뜻입니다.
따라서 수학을 공부할 때 가장 중요한 부분은 **'그것이 왜 개념이 될 수밖에 없는지'** 를 철저하게 이해하는 것입니다.

3. 개념과 결론의 차이

그런데 여기서 반드시 짚고 넘어가야 할 사항이 있습니다. 단순히 정리된 결과를 이해한 것을 개념을 이해한 것이라고 착각해서는 안 된다는 것입니다.

가령, 다항식 $P(x)=x^3+2x^2-1$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하라는 문제를 살펴봅시다.

나머지 정리를 배운 학생이라면 당연히 'P(x)를 $x-2$로 직접 나누지 않고' $P(2)$의 값을 통해 나머지를 쉽게 구할 것입니다.

하지만 나머지 정리의 결과만을 이해하고 있는 학생들은 주어진 상황이 조금만 달라져도 위와 같이 효율적인 방법을 –바뀐 상황에 특화된 또 다른 정리를 배우지 않는 이상– 전혀 사용하지 못합니다. 나머지 정리라는 결과는 사실, 항등식에서 미정계수를 결정하는 수학의 기본 논리로부터 나온 부산물일 뿐인데, 대게 부산물은 비교적 자주 다뤄지는 상황에서만 유용한 결과이기 때문입니다.

본래 항등식에서 미정계수를 결정하는 기본 논리란 매우 간단합니다.

'만약, $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입해도 주어진 식이 성립해야 하므로 $x=0$ 또는 $x=1$과 같이 **x에 적절한 값을 대입하여** 계수 a, b를 결정한다.'

는 것이지요.

즉, 등식 $x^3+2x^2-1=(x-2)Q(x)+R$은 x에 대한 항등식이므로 $x=2$를 대입하여

$$2^3+2\cdot2^2-1=R$$

로 나머지를 쉽게 찾아낼 수 있었던 것입니다.

이러한 항등식에서의 논리를 이해하고 있는 학생이라면, 아래와 같은 문제를 만났을 때도 굳이 조건식을 도함수의 정의에 끼워 맞추는 식의 기발한(?) 발상을 떠올리지 않더라도 문제의 상황을 어떻게 해결해야 하는지가 한 눈에 보일 것입니다.

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

를 만족할 때, $f(x)$를 구하시오. (단, $f(1)=2$)

우선, 고교 과정에서는 변수가 2개 이상인 함수에 대해 다루지 않으므로, 변수를 하나로 통일시킬 수 있는 적절한 값을 대입해 봅시다.

즉, 주어진 조건식은 $y=x$를 대입해도 성립해야 하므로

$$f(2x)=2f(x)$$

이때, $f(x)$를 n차 함수, 최고차항의 계수를 a(단, $a\neq0$)라고 하면, 좌변과 우변의 최고차항이 일치해야 하므로

$$a(2x)^n=2\cdot ax^n$$

$$\therefore\ n=1$$

따라서 $f(x)=ax+b$로 놓을 수 있고, 다시 주어진 조건식에 $x=y=0$을 대입하여 구한 $f(0)=0$과

또 다른 조건 $f(1)=2$을 이용하면, $a=2$, $b=0$임을 간단히 확인할 수 있습니다.

- 「수학의 기준」을 통해 단순한 결론이 아닌 정확한 개념을 이해해 보시기 바랍니다. -

4. 수학과 산수의 차이

기본적으로 산수가 무작정 빠른 계산을 통해 원하는 결과를 얻어내는 방법이라면, 수학은 계산이 필요한 상황인지 아닌지를 판단한 후에 결론에 다가가는 방법이라고 할 수 있습니다.
물론 이것을 판단하는 기준은 다름 아닌 '개념' 입니다.

바로 앞의 문제를 '고교 과정에서는 변수가 2개 이상인 함수의 개념을 다루지 않는다' 는 이해 없이 무작정 2개의 변수를 계산하려고 달려들었다면, 문제를 처음 접한 학생들은 상당한 어려움에 부딪쳤을 것입니다.
결국, 문제를 풀어 가는 논리를 계속 진행시킬 것인지 멈출 것인지를 결정하는 것 또한 개념이라는 얘기입니다.

그런데 이러한 어려움을 개념에 대한 이해로 극복하지 않고, 매번 새로운 유형으로 정리하거나 단순한 풀이 요령을 익혀 넘어가려고 하는 것은 수학을 어렵게 만드는 또 하나의 원인을 제공합니다.

- 「수학의 기준」의 선별된 문제들을 통해 산수와 수학의 차이를 확실하게 경험해 보세요. -

지금까지 살펴본 몇 가지 원인들만 제거해 나간다면, 적어도 수능에서는 수학이 생각보다 어렵지 않은 과목임을 이해할 수 있습니다.
또한, 개념이라는 검증된 논리를 통해 자신의 비합리적이고 명료하지 않은 생각들을 정리할 수 있다면, 수학은 논리적인 사고력을 키우는데 있어서 가장 확실한 도구가 되어 줄 것입니다.