11

이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0,\ \infty]$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다. (나) $n \le x < n+1$일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$이다. (단, n은 연수이다.)

어떤 자연수 k $(k>6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$ 이다. 수열

$\{a_n\}$을 $a_n=\displaystyle\int_0^n h(x)\,dx$라 할 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\frac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오.

25

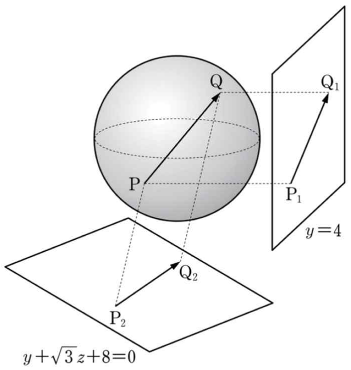
$x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다. (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$) (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오.

좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자.

$2\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}\right|^2$의 최댓값을 구하시오.



주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)