수학 고득점

규토 N제 가형

by 규토

orbibooks.com

1. 규토 수학 고득점 N제 오리엔테이션

2. 문제지

3. 해설강의 1편

4. 해설강의 2편

1

규토 수학
고득점 N제
오리엔테이션

1.1 책소개

출판하고자 억지로 만든 문제가 아닌 과외학생들을 위해 정성과 애정으로 만든 문제

안녕하세요. 규토입니다. :D
처음 문제를 만들게 된 계기는 어떻게 하면 과외학생들에게 더 양질의 수업을 할 수 있을까 고민하던 중에 자작문제를 만들게 되었습니다. 문제를 풀 수 있니? 가 아닌 이런 것도 있으니 꼭 알아가렴 이라는 마음가짐으로 만들었습니다. 한 문제당 평균 3시간 이상씩 치열하게 고민하면서 문제를 만들었고 어떤 문제들은 하루 종일 고민한 적도 있었습니다. 창작을 하는 과정이 정말 힘든 것은 사실입니다. 그렇지만 만든 문제를 빨리 제자들에게 알려주고 싶은 기쁨과 설렘이 훨씬 더 크기 때문에 계속 만들 수 있었습니다.

한 문제를 풀어도 여러 문제를 푼 것처럼 느껴지는 문제

원래 문제를 만들 때 2~3개의 예제 문제를 적절하게 섞으면 4점짜리 문제가 탄생합니다. 그 2~3개의 예제문제들의 연결 관계를 파악해 풀어내는 것의 난이도에 따라 문제의 난이도가 달라집니다. 보시면 아시겠지만 제 문제들은 대부분 4~5개의 연결 관계를 파악해야 풀 수 있는 문제가 대다수 입니다. 한 문제를 풀더라도 2~3문제를 푼 것 같은 느낌이드는 것도 이 때문입니다. 그러니 당연히 어려울 수밖에 없습니다. 4~5개의 연결 관계를 계속 해석 하다보면 2~3개짜리 연결 관계를 묻는 문제들은 자연스럽게 쉬워질 수밖에 없다고 생각합니다.
수능에서 수학을 치는 이유는 사고력과 논리력을 평가하기 위해서입니다. 단순계산이 아닌 사고력을 측정하는 것입니다.
최대한 사고력을 자극하는 문제들을 만들기 위해 노력했습니다.
총 161문제로 단기간에 수학적 사고력과 문제 해결력을 높일 수 있습니다.

모든 문항마다 테마가 있는 문제

전 문제를 만들 때 항상 테마가 있습니다. 어떤 개념을 알려주고 싶을 때 문제로 그 정보를 전달하려고 노력합니다. 각 문제마다 어떻게 하면 과외학생들에게 효과적으로 내용을 복습하게 하고 사고력을 기를 수 있을까 치열하게 고민했습니다.
틀리셔도 됩니다. 그렇지만 그 개념들을 모조리 흡수해서 확실히 자기 것으로 만들면 다른 문제를 풀 때 큰 도움이 될 수 있다고 생각합니다.
다년간 수능을 치면서 느꼈던 것과 아이들이 생소해 하는 것을 어떻게 하면 전달 할 수 있을까 항상 생각합니다.

4점짜리 문제 중에서도 1등급을 변별하는 문제들만 수록

같은 4점짜리 문제라도 난이도는 천차만별입니다. 굳이 풀어보지 않아도 맞출 수 있는 쉬운 4점짜리 문항이 아니라 대부분 21, 29, 30번 때의 1등급을 변별하는 문제들만 수록하였습니다. 따라서 1등급을 변별하는 문제들만 집중적으로 대비하실 수 있습니다.

기존과 차별화된 해설지

기존의 딱딱한 해설지가 아니라 저자와 소통하는 느낌을 주도록 구어체로 만들었고 저자에게 직접 과외를 받는 느낌이 들도록 구성하였습니다.
① 출제의도 ② 해설 ③ 출제자의 한마디 이렇게 3가지로 구분되어있고 보충이 필요한 부분은 √ 표시해서 별도로 보충 설명하였습니다. 제가 운영하는 네이버 블로그 "규토의 특별한 수학"에 올려놓은 강의들과 쉽게 연동할 수 있도록 QR코드를 넣었습니다. 그 문제만 공부하는 것이 아니라 복합적으로 공부할 수 있도록 만들었습니다.

1.4 문제지 구성

1. [미분 자작문제 40] 미적분 Ⅱ → 단원명

→ 문항 번호

→ 문제 고유번호(Serial Number 라고나 할까..)

必 동그라미 커리큘럼 !

※ 해설 p.xxx

해설강의 Page

규토 N제 100% 공부법 !
반드시 지키자 !

28. 실수 k와 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$에 대하여 미분가능한 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} kx^2e^{-2x} & (x\geq 0) \\ f(x-a)+b & (x<0) \end{cases} \quad (\text{단, } a,\ b\text{는 상수이다.})$$

이다. 함수 $[g(x)]$의 불연속점의 개수가 1개 일 때,

$\dfrac{10k}{e^2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

$\displaystyle\int_a^{M+b} f(x)\,dx+\int_m^0 g(x)\,dx$의 값을 구하시오.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

→ "규토가 생각하는 지극히 주관적인 모의고사 번호" ⇒ 난이도 판단 가능
(큰 의미를 두지 않으셔도 됩니다. 100번 같은 29번 30번도 있으니까요 -_-;;)

이 공간은 하얗게 ~.~

되도록 책에 풀지 않는 것을 추천 드립니다!
(규토 수학 고득점 N제 100% 공부법 참고)

1.5 규토의 생각

규토n제를 구매하신 수험생 여러분 모두 반갑습니다. ~ :D

앞의 오리엔테이션에서는 형식적인 “틀” 안에서 이야기를 했다면 이번에는 여러분과 편하고 자유롭게 이야기 해보려고 합니다~

편하게 질문을 받아볼까요~ 오! 저기 잘생기고 키 큰 남학생 말해보세요!

Q. 이과도 규토 n제에 있는 미적분1 영역을 풀어야하나요?

하하 사실 이 질문이 나올 줄 알고 있었습니다 ㅎㅎ 일단 규토 n제에 실린 미적분1으로 말할 것 같으면 엑키스중에서도 초엑키스만 고농축시킨 문제들로 구성되어있습니다. 현실적으로 이과에게 필요한 미적분1은 다항함수의 개형추론과 빠르게 식(다항함수)을 세울 수 있는 능력입니다. 나올 수 있는 모든 상황을 다 담았다고 해도 과언이 아닐 정도로 개형추론 문제들이 많이 들어 있습니다. 따라서 다항함수 개형추론만큼은 확실히 정복하실 수 있습니다. 빠르게 식을 세울 수 있는 능력 또한 규토 n제에 수록되어있는 엄선된 미적1 문제들을 풀면서 충분히 배양하실 수 있습니다. 요즘 평가원 기조가 다항함수와 초월함수의 혼합으로 출제되는 만큼 미적분1에서 개형추론만큼은 반드시 알아야한다고 생각합니다.
문제를 푸시면 아시겠지만 규토 n제는 그냥 보통 문제집에서 자주 볼 수 있는 일차원적인 물음이 아니라 최대한 사고력을 자극하는 문제들로 구성되어있습니다. 그러니 수학실력을 올린다고 생각하시고 다 푸세요. 말만 미적분1 이지 거기에 쓴 표현과 사고하는 과정을 배우는 것이죠. 논리력과 사고력을 키우기 위해서 다 푸시는 것을 추천합니다. 매번 수능을 칠 때마다 느끼는 거지만 결국 수능에서 나오는 킬러문제는 평소에 보지 못한 유형이 나오거든요. 그걸 대비하려면 본질적으로 사고력을 높여야 해요.
그리고 평가원 모의고사나, 수능에서 좋은 성적을 거두신 이과분들의 후기를 잘 살펴보면 규토 n제 미적분1에서 많은 것을 배웠다고 쓰신 분들을 자주 발견하실 수 있습니다. 미적분1에서 배운 테크닉들(case분류, new함수 테크닉 등등)을 미적분2에 적용시켜보세요~ ㅎㅎ(해설을 보면 미적분1에서는 아무 것도 모른다는 전제로 최대한 자세히 설명했지만 미적분2에서는 미적분1에서 배웠다는 전제하에 설명을 합니다.) 그리고 무슨 100문제도 아니고 딱 28문제 밖에 안 됩니다! 저는 다 푸시는 것을 추천합니다.(오르비에서 조사를 해본결과 나 형에 출제한 미적분1까지 싸그리 넣어달라는 분들이 압도적으로 많았습니다.)

자 또 질문하실 분 계신가요~ ㅎㅎ 저쪽에 빨간 옷 입은 귀여운 여학생! 말해보세요~

Q. 규토 n제 2020 난이도가 어떻게 되나요?

사람마다 느끼는 난이도가 다르겠지만 최대한 객관적으로 말씀드릴게요ㅎㅎ

미적1 : 1~17까지 평가원보단 어렵다고 생각하지만 이과 1~2등급 기준으로 충분히 풀만한 난이도입니다. 18~28번까지는 하드코어로 많이 어렵습니다(초창기 때는 쉬운 거 풀 거면 시중문제집 풀지 굳이 자작문제를 풀 필요가 없다고 생각해서 어렵게 제작했습니다.)ㅎㅎ 저도 어려우니 못 푸신다고 상심할 필요는 전혀~ 없습니다. 대체적으로 난이도 순으로 배치했습니다.

미적2 : 미적2는 제가 잘 말씀드릴 수 있어요. 제가 어떻게 만들었는지 기억조차 가물가물할 때 수험생의 심정으로 다시 풀어봤거든요 ㅋㅋ흠... 일단 어렵습니다... 요번에 새로 만들면서 준킬러도 대거 투입시켰지만 당연히 킬러가 압도적으로 많은 비중을 차지하죠 ㅎㅎ 2017학년도 수능 수학 가형 30번, 2018학년도 수능 수학 가형 30번 같이 역대급문제들도 아예 없다고는 말 못하지만 그 정도 난이도는 손에 꼽을 정도입니다. 대체적으로는 2019학년도 수능 수학 가형 30번 정도 난이도에서 + − 라고 생각하시면 됩니다. 수험생 마인드로 다시 풀어보면서 느낀 점은 문제가 참 잘 뽑혔다는 것 입니다. 자기 PR 죄송합니다.. (근데 진짜 좋은걸 어떡하죠? ㅋ.ㅋ) 대체적으로 난이도 순으로 배치했습니다.

확통 : 진짜 현실적인 난이도로 구성하였습니다. 요번 규토 n제 2020 확통은 경우의 수 확률에 대한 감이 떨어질 때 다시 살리는 용도로 만들었습니다. 과한 것은 다 빼고 수능에 걸 맞는 난이도로 구성하였습니다. 전체적으로 난이도가 비슷합니다.

기벡 : 평범한 난이도로 최근 평가원의 기조를 지키기 위해서 너무 어렵고 직관이 과도하게 들어간 문제는 지양했습니다. 최근 평가원 29번이나 준킬러 기벡정도의 난이도로 생각하시면 됩니다~ 대체적으로 난이도 순으로 배치했습니다.

답변이 됐나요~? ㅎㅎ 또 없으신가요~ 저쪽 안경 쓴 남학생! 말해보세요~

Q. 기출은 어느 정도 풀고 문제집을 사야하나요?

꼭 기출문제를 체화시키고 보셨으면 좋겠어요. 기출문제를 보자마자 풀이과정이 떠오를 정도 일 때 푸시는 것을 권장합니다.~
규토 n제 해설에서 복습으로 추천 드린 기출문제가 문제를 풀 당시 떠올랐다면 더할 나위 없이 좋겠죠? ㅎㅎ
권장 등급은 0과 1등급, 2등급, 3등급까지입니다. 기출문제를 완벽히 체화했다는 전제하에 4등급도 푸셔도 좋습니다~
푸는 속도는 더디겠지만 한 문제 한 문제 정복하다보면 실력이 많이 늘어있을 거라 확신합니다.
저도 2009학년도 수능 수리 가형 4등급에서 재수 선행반에 들어간지 4개월만에 96점으로 1등급 (이 때 1컷 85점)을 받았는걸요. ㅎㅎ자신의 잠재력을 믿으세요! 할 수 있습니다! 한 검토자 분께서 그러셨어요. 규토 n제로 가장 많은 도움을 받을 수 있는 등급 때가 3~4등급일 수 있다고 말이에요. 사실 저도 같은 생각입니다 ㅎㅎ 그리고 만약 자신이 안정적인 1등급이 나온다면 시간을 제고 푸는 것도 방법이 될 수 있습니다. (킬러의 경우 15분 정도 잡고 풀어보세요~)

또 다른 분 계시나요~ 편하게 질문하세요~ 저기 박보영 닮으신 여학생! 말해보세요~

Q. 어떤 식으로 규토 n제를 공부를 해야할까요?

책에 규토 n제 100% 공부법이라고 적어놨어요.(앞에 서 봤죠??ㅎ) 효과를 극대화하기 위해서 꼭 그렇게 해보셨으면 합니다. ~
아니 꼭! 제발 그렇게 해보셨으면 합니다. 아마 대다수의 학생들이 양치기 용도로 규토 n제를 대할 것 같아요. 여러 커뮤니티를 잘 살펴보면 규토 n제 0일 컷 가능? 이라는 말을 종종 볼 수 있는데요. 이건 정말 미친 짓이라고 생각해요. 문제만 풀면 정말 아무것도 남지 않습니다. 아 뭔가를 해냈구나! 라고 다소 기분만 좋을 뿐입니다. 시간이 지나면 어짜피 기억나지도 않습니다. 바가지에 구멍 뚫어 놓고 물을 들이 부어보세요. 처음에는 막 넘칠 것처럼 보이지만 시간이 지나면 한 방울도 남지 않습니다. 복습도 열심히 하고 치열하게 고민(자기 스스로 논리력과 사고력을 자극해야 합니다)해야 질적 성장이 일어난다고 생각합니다. 규토n제 100%공부법에 적혀있는 대로 하시는 것이 best입니다. :D

아주 참여도가 좋네요 ㅎㅎ 저쪽에 N수의 포스를 뿜고 계신 아저씨(?!) 장난이고요. 남학생 말해보세요~

Q. 규토 n제 문항의 성격이 궁금합니다!

많은 분들이 오해하고 계시는 부분이 있는 것 같습니다. 규토 n제도 강의 교재입니다. 다만 다른 강의 교재와는 다르게 제가 책 속에 있을 뿐이죠. 그래서 해설편이 문제편보다 3.5배나 더 두껍습니다.

모든 문항들은 과외학생들을 위해서 만든 문제들입니다. 만들 당시에도 "현실성을 추구해서 모의고사 스타일로 만들어야지!"라는 생각은 1도 하지 않았습니다. 그런 문제집들은 시중에 많으니까요. "어떻게 하면 한 문제를 풀면서 그동안 배웠던 스킬들과 교과개념들을 복습할 수 있게 만들지? 그리고 수능이 요구하는 사고력과 논리력을 향상시킬 수 있는 방법이 없을까?"를 고민한 끝에 만들게 되었습니다. 그렇기에 시중문제들과 달리 2~3개의 연결관계가 아닌 4~5개의 연결관계와 복잡한 case분류를 하도록 제작했습니다. (+모래주머니 효과) 애초에 책 표지 뒤에도 써있지만 출판하고자 만든 문제들이 아니기 때문입니다. 그렇기에 문제만 풀고 즉, 양치기로만 문제집을 대하는 것은 매우 추천하지 않습니다. 양치기 하려면 다른 문제집을 알아보세요.

규토 n제는 해설을 완전히 정독하고 자기 것으로 만들어야지 규토를 풀었다고 말할 수 있습니다. 애초에 강의교재로 만든 것이니까요. 일종에 분석서? 같은 개념으로 보시면 될 것 같습니다. 제가 직접 만들었기 때문에 출제의도가 무엇이고 그 문제에 사용된 중요한 개념들, 같이 풀어보면 좋을 것 같은 기출문제, 코멘트 등이 자세히 수록되어 있습니다. ㅎㅎ또한 구어체로 만들었기 때문에 해설을 읽다보면 제가 말하는 소리가 들리도록 만들었습니다. 그래서 요번 2020 규토 n제 부터는 해설지라고 안하고 해설강의라고 변경하였습니다. :D

자 마지막 한 분만 더 받을게요~ 저기 회색 후드티 입고 있는 남학생 ! 말해보세요

**Q. 오늘 배송을 받았습니다. 풀어봤는데 미적분1부터 잘 풀리지 않아요.. 괜찮을까요?
작년 수능 2등급입니다**

잘 안 풀리시는 것이 정상입니다 ㅎㅎ 그만큼 많이 성장할 수 있다는 것이니 너무 상심하지마세요~ 잘 안 풀리시면 먼저 미적1 1번 해설 큐알코드에있는 show me the 3차4차 강의를 수강하시고 보시면 좀 더 손쉽게 접근하실 수 있습니다 ㅎ 그리고 최대한 100퍼센트공부법에 적힌대로 해보세요. 보통문제들과는 다르게 한 문제씩 풀어보고 해설에서 배운 내용들을 다른 문제에 적용시켜보세요.(한 번에 여러 문제들을 풀고 한꺼번에 해설을 보시지 마세요.) 그냥 문제만 풀면 아무것도 남지 않아요. 그 문제를 완벽히 체화시키고 넘어가는 것이 좋습니다. 난이도 순서대로 배치했기 때문에 점진적으로 사고를 확장하실 수 있습니다. 그러니 너무 겁먹지 마세요 ㅎㅎ 규토 n제에 있는 문항들은 보통문제(2~3개의 연결관계)와는 다르게 4~5개의 연결관계와 복잡한 case분류를 하도록 제작했습니다. 운동선수들이 모래주머니를 차고 훈련하는 것과 마찬가지 효과를 얻도록 만들었습니다. (지금은 어려우실 수 있지만 나중에 체화하시고 시중문제들을 보시면 답이 너무 그냥 딱 나온다는 인상을 받게 되실 거예요. ㅎㅎ)
그리고 모든 문제들이 손쉽게 풀리면 그게 무슨 도움이 되겠습니까..기분은 좋을 수 있겠죠..그렇지만 틀린 것을 정복할 때! 바로 그때 질적 성장이 일어난다고 생각해요~ 해설도 자세히 써놨으니까(진짜 옆에 앉혀놓고 과외해준다는 생각으로 작성했습니다 흐흐) 이해하시는데 큰 무리는 없을 거예요 ㅎㅎ 화이팅입니다! 너무 기죽지마세요 그게 정상입니다. 양보단 질로 갑시다. 빨리 문제집을 끝내야지 보다는 (진짜 그건 미친짓이라고 생각해요..한번 보고 넘어가면 누누이 얘기하지만 딱히 도움이 되지 않습니다. 약간의 뿌듯함만 있을 뿐이에요.) 질적 성장이 일어날 수 있도록 치열히 고민해보고 복습도하고 (100퍼센트공부법으로 하시는게 베스트입니다. 저도 그렇게 공부했었고 많은 과외학생들의 성장을 눈으로 봤습니다.) 그러셨으면 좋겠어요 ㅎㅎ

많은 학생들을 만나 보았는데요. ㅎㅎ 또 다른 궁금한 점(규토 n제 문제 질문 등)이 또 있으시면
eric9579@naver.com 으로 언제든지 메일 보내주세요~ ㅎㅎ

지금으로부터 15년 전 중학교 2학년이었던 규토는 "버킷리스트"라는 것을 작성하게 됩니다. 많은 항목들이 있었지만 그 중에서 가장 기억에 남는 것은 바로 저 만의 책을 만드는 것이었습니다. 그로부터 12년 후 규토 수학 고득점 N제를 발간하게 됩니다.

첫 책을 받았을 때의 감동... 아직도 잊을 수가 없네요..ㅠㅠ

벌써 규토 수학 고득점 n제 2017 ⇒규토 수학 고득점 n제 2019 ⇒ 규토 수학 고득점 n제 2020 가/나 로

이번이 2번째 개정판입니다. ㅎㅎ 아주 감개무량하네요. 보통 개정을 하면 규토 n제 1에서 규토 n제 2라고 생각합니다.

하지만 저는 개정 전을 0, 개정 후를 1이라고 생각합니다. 즉, 단순히 양적인 차이가 아닌 질적인 차이라고 생각합니다.

규토 n제를 푸시는 모든 분들께 감사의 인사를 전하면서 저는 해설강의로 찾아 뵐게요~ :D

(개인 적으로 개정판의 퀄리티를 비교하자면 2017<<<2019<<<2020 인 것 같습니다. 계속해서 발전해 나가는 규토 n제가 되겠습니다! 내년 개정판은 더 더욱 좋아지겠죠?-_-;;)

2. [미분 자작문제 17] **미적분 I**

必 동그라미 커리큘럼 !

※ 해설 194p

29. $f'(3)=f(3)$ 인 사차함수 $f(x)$와 $g'(0)=3$ 인 다항함수 $g(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ g(x) & (x<0) \end{cases}$$

이다. $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a<0$, $b<0$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{b}{h(b)-36}=\frac{a}{h(a)-36}\text{ 이다.}$$

(나) 함수 $|h(x)|$는 $x=p$, $x=3$, $x=4$에서만 극솟값을 갖는다.

$\dfrac{h(8)}{p}$의 값을 구하시오. [4점]

3. [미분 자작문제 18] **미적분 I**

21. 최고차항의 계수가 1이고 $\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k = 1\ (k=1,\ 2,\ 3)$을 만족시키는 사차함수 $f(x)$에 대하여 집합 S를

$$S = \left\{ x \mid \int_1^x \{f'(t) - t\}dt = 0 \text{ 이고 } x \neq 3 \right\}$$

라 하고, $n(S) = 2$일 때, 집합 S의 모든 원소의 합은? [4점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

必 동그라미 커리큘럼 !

※ 해설 198p

4. [미분 자작문제 68] **미적분Ⅱ**

28. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$에 대하여 함수 $\int_{0}^{x}|f'(t)|\,dt$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{-5}^{5}|f(x)-g(x)|\,dx=\frac{a}{\pi}+b$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [4점]

必 동그라미 커리큘럼 !

※ 해설 294p

47. [미분 자작문제 83] **미적분Ⅱ**

30. $l+m+n \leq 10$를 만족시키는 세 자연수 l, m, n에 대하여 연속함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 미분 가능하고

$$x^n f(x) = \left|(x-\pi)\sin^m \frac{l}{2}x\right|$$

를 만족시킬 때, $f(0) \neq 0$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

必 동그라미 커리큘럼 !

※ 해설 427p

3. [미분 자작문제 18] **미적분 I**

21. 최고차항의 계수가 1이고 $\left(\dfrac{f'(k)}{k}\right)^k=1\ (k=1,\ 2,\ 3)$을 만족시키는 사차함수 $f(x)$에 대하여 집합 S를

$$S=\left\{x \mid \int_1^x \{f'(t)-t\}dt=0 \text{ 이고 } x\neq 3\right\}$$

라 하고, $n(S)=2$일 때, 집합 S의 모든 원소의 합은? [4점]

① $\dfrac{10}{3}$ ② $\dfrac{11}{3}$ ③ $\dfrac{14}{3}$ ④ $\dfrac{17}{3}$ ⑤ $\dfrac{20}{3}$

출제의도

① $\left(\dfrac{f'(k)}{k}\right)^k=1$ 식을 통해 $f'(2)=2$ or -2 로 case 분류할 수 있는가?

② $n(S)=2$ 조건을 활용 할 수 있는가?

③ $f(x)$ 에 관해 식 세우기 !

해설

$\left(\dfrac{f'(k)}{k}\right)^k=1$ (단, $k=1,\ 2,\ 3$) 이라고 했으니까 k에 각각 대입해보면

$f'(1)=1$ ($f'(2)=2$, $f'(2)=-2$가 될 수 있는 것이 point !)

$$(f'(2))^2=4 \begin{cases} f'(2)=2 \\ f'(2)=-2 \end{cases}$$

$(f'(3))^3=27 \Rightarrow f'(3)=3$

이렇게 case 분류할 수 있겠죠?

① $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$
② $f'(1)=1,\ f'(2)=-2,\ f'(3)=3$

① $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$

조심하세요!
$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이니까 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 4가 되겠죠?

자 이제 식 세우기를 해봅시다!
$f'(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ 라고 두고 문자가 3개 이고 식이 3개 이니까 풀 수 있겠죠?
그렇지만 ! 더 효과적으로 식 세우는 방법을 알려드리고자 이 문제를 만들었어요.
일단 $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$ 에서 오른쪽 항을 왼쪽으로 넘기면
$f'(1)-1=0$, $f'(2)-2=0$, $f'(3)-3=0$ 이렇게 되겠죠?

여기서 $f'(1)\ f'(2)\ f'(3)$ 를 $f'(x)$ 로 변환하면
$-1\ -2\ -3$ 을 $-x$ 라고 쓸 수 있겠네요.

$f'(x)-x=h(x)$ 라고 하면 $h(1)=0$, $h(2)=0,\ h(3)=0$ 을 만족하므로
$(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 인수를 가지겠죠? 또한 $h(x)$ 는 $f'(x)$ 가 삼차함수니까 당연히 삼차함수가 돼요. 여기서 $-x$ 는 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으니까 $h(x)$ 의 최고차항의 계수는 4가 되겠죠?
결국 $h(x)$ 는 최고차항이 계수가 4인 삼차함수군요 !
$\therefore h(x)=f'(x)-x=4(x-1)(x-2)(x-3)$
√ $f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)+x$ 라는 식을 세울 수 있어요.

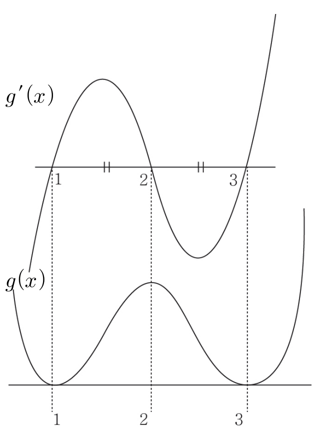
$\int_1^x \{f'(t)-t\}dt=g(x)$ 라고 보면

$$S=\left\{x \mid \int_1^x \{f'(t)-t\}dt=0 \text{ 이고 } x\neq 3\right\}$$

$$\Rightarrow\ S=\{\,x \mid g(x)=0 \text{ 이고 } x\neq 3\,\}$$

(기억하세요! 이 technic! $g(x)$ 로 보는 순간 문제를 굉장히 쉽게 접근할 수 있어요.)
$g'(x)=f'(x)-x$ 와 $g(1)=0$ 을 뽑아먹을 수 있겠네요.(거의 기계처럼 나와야 해요~)

$f'(x)-x=4(x-1)(x-2)(x-3)$ 이기 때문에 그림을 그리면



√ $g'(x)$가 $(2,\ 0)$ 에 점대칭 되어져 있으니까 x축과 둘러싸인 넓이가 서로 같겠죠? 따라서 $g(x)$를 그리면 $x=2$에 대칭된 사차함수가 나와요.
$g(1)=0$ √ x축 설정 ! (다음페이지에 설명)

$g(x)=0$ 이 되는 것은 $x=1,3$ 이죠?
그렇지만 $x\neq 3$ 이기 때문에 $x=1$만 돼요.
따라서 $n(S)=1$이니까 조건을 만족하지 않겠죠?

√ **check**

처음에는 어렵지만 계속 연습하다보면 너무나 당연히 식을 세울 수 있을 거에요.
지금 설명이 잘 이해가 되지 않으시면 제 블로그 규토의 특별한 수학에 있는 (show me the 3차 4차)를 참고해주세요~

ex) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=2$, $f(2)=4,\ f(3)=6$
$f(x)=?$
한번 적용시켜 보세요.
다음 페이지에 답을 적어 놓을게요.

$g'(x)$가 $(2,\ 0)$에 점대칭 되어져 있는 것을 직관적으로 보고 알 수 도 있지만 식으로 보이려면 어떻게 해야 할까요?

$f(x)+f(2a-x)=2b$
이 의미하는 것이 $f(x)$ 가 $(a,\ b)$ 에 점대칭 되어 있다.
는 것이니까
$f(x)+f(4-x)=0$ 만 만족시키면 되겠죠?
$4(x-1)(x-2)(x-3)+$
$4(3-x)(2-x)(1-x)=0$
성립하네요 !

따라서 $(2,\ 0)$에 점대칭 되어져 있다고 할 수 있어요~

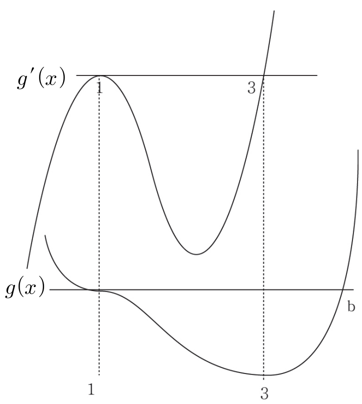
증명은 아래 강의를 참고해 주세요~
자취방정식 QR코드

② $f'(1)=1,\ f'(2)=-2,\ f'(3)=3$

마찬가지로 식을 세워볼까요~ 여기서는 $f'(1)-1=0,\ f'(3)-3=0$ 밖에 없으니까 한 번에 $f'(x)-x$ 를 구할 수는 없어요. 저번에 배운 미지수 technic ! 을 써볼게요~

$f'(x)-x=4(x-1)(x-3)(x-a)$

☆ 여기서 $(x-a)$ 라고 쓴 이유는 ?
$f'(x)-x$ 가 삼차이고 서로 다른 2개의 실근을 갖기 때문에 무조건 실근 하나를 더 가져야 하겠죠?
$f'(2)=-2$ 를 만족해야하니까 $x=2$ 를 대입하면
$f'(2)-2=4(2-1)(2-3)(2-a)$
$f'(2)-2=-4(2-a)=-8+4a$
$-4=-8+4a \Rightarrow a=1$
$\therefore f'(x)-x=4(x-1)^2(x-3)$ case ① 과 마찬가지로
$g'(x)=4(x-1)^2(x-3)$ 그래프를 그리면



$g(1)=0$ x축 설정!

$g(x)$ 에 대해 식을 세워봅시다 ! 나올 때 마다 적용시켜주세요~ 미지수 b 놓고 식을 세우면
$g(x)=(x-1)^3(x-b)$
$g'(x)=3(x-1)^2(x-b)+(x-1)^3$
$=(x-1)^2(3x-3b+x-1)$
$g'(3)=0$ 이니까 $b=\dfrac{11}{3}$

결국 구하고자 하는 것은 $g(x)=0$ 을 만족하고 3이 아닌 x값이죠?
따라서 $S=\left\{1,\ \dfrac{11}{3}\right\}$ 가 되겠죠?

답은 ③ $\dfrac{14}{3}$

출제자의 한마디

만약 관성적으로 풀어서 $f'(2)=-2$ 를 보지 못했다면 당황할 수 있는 문제에요.
너무나 당연하지만 막상 긴장상태에서 풀면 보이지 않을 수 있어요. 조심하세요~
S 집합에 있는 $x\neq 3$ 이라는 조건을 준 이유는 case ①을 제거해 주기 위해서 에요. $\int_1^x \{f'(t)-t\}\,dt=g(x)$ 로 바꾸는 technic 도 꼭 챙겨가세요.
계속 식 세우기 문제가 나오고 있죠? 적용시켜 보셨나요?
앞으로도 계속 나오니까 꿈에 나올 정도로 반복해서 적용시켜주세요~
이 문제집에서 식 세우기만이라도 완벽히 알아 가면 문제 풀 때 큰 도움이 될 것이라 생각해요.

√ **check**

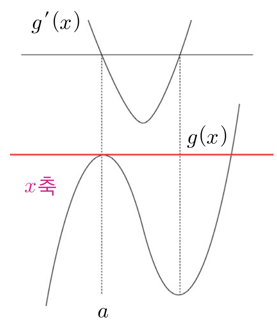
① $g(x)=\int f(x)\,dx$

② $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

①, ②차이점은 무엇일까요?
①도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 이고

②도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 에요.

①은 x축이 어디 있는지 모르지만 ②는 $g(a)=0$ 임을 토대로 x축을 설정할 수 있어요.



ex) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6$
$f(x)=?$

답은
$f(x)$
$=(x-1)(x-2)(x-3)+2x$

모르겠다. 라고요? ㅎㅎ;; 자 잘 생각해보세요. 우리는 $f(x)$ 의 그래프를 그려야해요.
$x \geq 0$ 일 때 $x(x-a)^2$ 라고 했어요. 그래프를 그리려고 하는데 무엇 때문에 난감하나요?
바로 a 때문이죠? 그래프를 그릴 때 x축에 접하는 a값에 따라 그래프가 달라지겠네요?
크게 몇 가지로 case 분류할 수 있죠?
그래요. ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분할 수 있어요.
$x<0$ 일 때를 살펴볼까요? 자 $x<0$ 일 때는 $(x+a)^2x(x-a)$ 라고 했죠? 이것도 그래프를 그리려고 하니까 a 때문에 난감해요. 따라서 a에 따라 case분류를 해줘야 해요.
case 분류를 해주면 마찬가지로 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로
구분이 되겠죠?
결국 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 경우만 case분류하면 되겠네요.

여기서 잠깐 !
“아니 그럼 규토 쎈세 무조건 이런 문제가 나오면
① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 로 case 분류해야 하나요?”
√ 여러분이 대답해주세요. 아니죠? 그래프를 그리려니까 a 때문에 난감해서 같은 그래프 개형이 나오도록 a의 범위를 case 분류 한 거에요.

이제 A집합의 의미를 파악해볼게요.

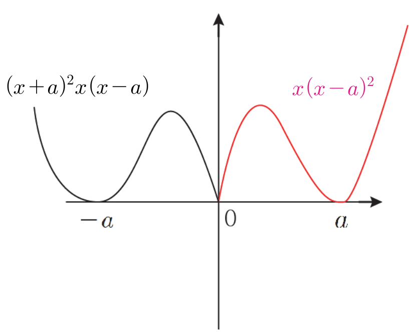
$$A=\left\{t \mid \lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \neq \lim_{x\to t-}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\right\}$$

$x=t$ 에서 우미분계수와 좌미분계수가 다르다는 의미에요.
결국 미분이 불가능한 점의 x좌표가 A집합의 원소가 되겠죠?

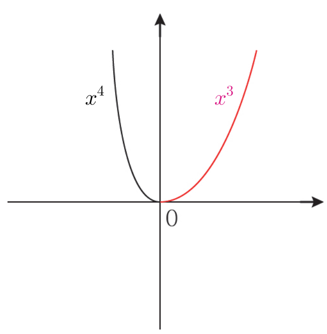
B집합은 $B=\{t \mid f(x)$ 는 $x=t$ 에서 극솟값을 갖고 $t\neq 0\}$ 라고 했는데요.
극솟값을 가지면서 $t\neq 0$ 를 만족해야 해요. 왜 하필 $t\neq 0$일까요?
조건을 만족시키는 case를 제거하기 위함이에요~
출제자는 조건을 줄 때는 무엇인가 의도가 있다는 거에요. +_+

이제 a에 따라 case 분류 해봅시다!

① $a>0$



② $a=0$



√ check
$f(x)=(x-1)(x-a)^2$
이면
① $a>1$
② $a=1$
③ $a<1$
이렇게 3가지로 분류할 수
있겠죠? 이해 되셨나요?

4. [미분 자작문제 68] **미적분Ⅱ**

28. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$에 대하여 함수 $\int_0^x |f'(t)|\,dt$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{-5}^{5}|f(x)-g(x)|\,dx=\frac{a}{\pi}+b$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [4점]

출제의도

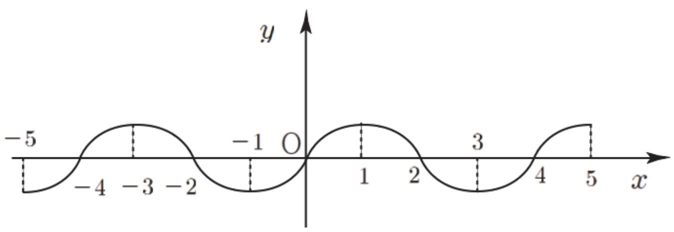
① $\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 의 그래프를 그릴 수 있는가?

② $\int_{-5}^{5}|f(x)-g(x)|\,dx$ 가 의미하는 것을 reading할 수 있는가?

③ 대칭성을 이용해서 넓이구하기

해설

먼저 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 의 그래프를 그려봅시다~



$\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 를 파악하기 위해서 New함수 technic을 써봅시다~

$F(x)=\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 라 하고 양변에 미분을 취하면

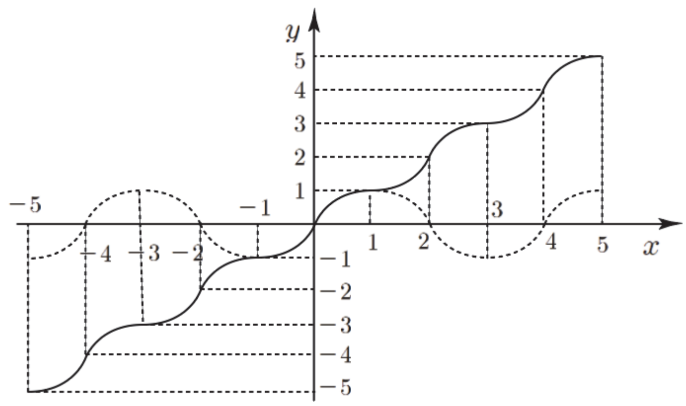
$F'(x)=|f'(x)|$가 되겠군요. $f'(x)$의 부호에 따라 달라지니까 case분류하면

$f'(x)>0 \Rightarrow F'(x)=f'(x) \Rightarrow F(x)=f(x)+c_1$

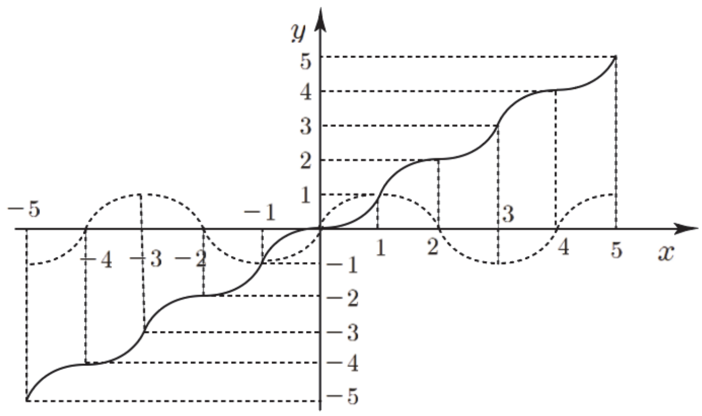
$f'(x)<0 \Rightarrow F'(x)=-f'(x) \Rightarrow F(x)=-f(x)+c_2$

$F(0)=0$에서 출발하여, $F(x)$가 연속함수가 되도록 $f(x)$가 증가하는 범위에서는 $f(x)$를 적당히 y축 방향으로 평행이동한 것을, $f(x)$가 감소하는 범위에서는 $-f(x)$ ($f(x)$를 x축 대칭 시킨 것)을 적당히 y축 방향으로 평행이동한 것을 이어붙이면 되겠군요!

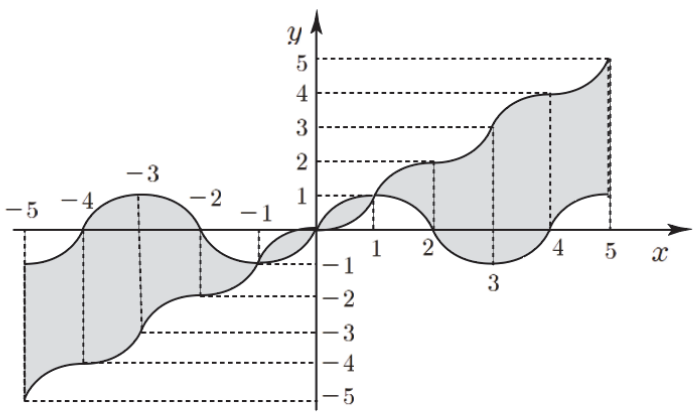
이제 $F(0)=0$ 인 것을 감안하여 $F(x)=\int_{0}^{x}|f'(t)|\,dt$ 를 그려봅시다~



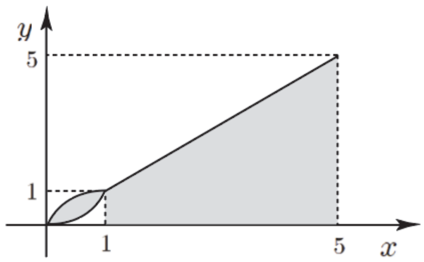
$F(x)$ 의 역함수 $g(x)$는 $y=x$ 대칭만 시켜주면 되겠죠?



$\int_{-5}^{5}|f(x)-g(x)|\,dx$ 는 $f(x)$ 와 $g(x)$ 사이의 넓이를 나타내는 식이니까 구하는 부분의 넓이는 색칠한 부분이 되겠죠?



대칭되어 있으니까 양수인 부분만 구해서 x 2를 해주면 되겠군요.
싸인 그래프도 대칭이 되어 있으니까 2에서 4사이의 넓이를 양쪽으로 붙여주고
$F(x)$ 와 $g(x)$ 가 $y=x$ 대칭임을 이용해서 넓이를 간단히 해봅시다~



따라서 양수에서의 넓이는

$2\int_0^1 \left(\sin\frac{\pi}{2}x - x\right) dx + 12$ (사다리꼴 넓이) 겠죠?

$2\int_0^1 \left(\sin\frac{\pi}{2}x - x\right) dx = \frac{4}{\pi} - 1$ 이니까 $\frac{4}{\pi} + 11$!!

음수에서의 넓이는 양수에서의 넓이랑 같으니까 곱하기 2하면 답이겠군요~

$\therefore \frac{8}{\pi} + 22$

답은 30

출제자의 한마디

이 문제의 핵심은 $\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 의 그래프를 그리는 것이에요~ 처음이니까 case분류해서 그림을 그렸지만 이제는 $f(x)$ 만 보고도 그림을 그릴 수 있어야 해요.

추후에도 $\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 의 그래프를 그려서 푸는 문제들이 있습니다ㅎㅎ

이번에 완벽히 익혀서 나중에 나올 문제에 적용시켜보세요~

대칭성을 이용한 넓이 찾기는 매번 나오는 사골 소재죠? ㅎㅎ