Principia

reformed ver.

물리 개꿀잼

2019년 8월 11일

차 례

Preface

현행되는 교육과정의 관점에서 본다면, 과학고, 영재학교를 비롯한 특수목적고를 제외한 일반 고등학교의 경우에서는 학생들이 물리학을 깊이 고민할 수 있는 환경이라고 보기는 힘들다. 분명, 학생 개개인의 능력과 열정에 따라 다르기도 하겠거니와, 일반적인 평균치로서 미루어 본다면 그럴 것이다. 저자는 고교에서 물리를 배우면서 주변의 이러한 상황이 매우 안타까웠던 바, 이러한 물리학에 관심이 많고, 미래가 촉망되는 학생들에게 부담없이 자신의 능력을 펼치기 위한 촉진제로서의 작용하기를 기대하면서 이 책을 내놓게 되었다. 대부분의 학생의 경우 '질량이 있는 용수철', '현수곡선'등의 내용에 되려 겁부터 먹을 것임을 저자는 잘 알고 있다. 하지만, 그들을 가장먼저 목차에 끄집어 낸 것은 그러한 학생들이 이들의 물리적 중요도를 인지하면서 학습하기를 바라는 마음에서이다. 분명, 이 책은 대학입학의 논술과 구술면접을 대비하기 위한 목적이기 때문에 대다수의 학생들에게 있어 내용이 조금 과하다는 생각이 들게 할지도 모른다. 저자는 고교시절 물리학을 처음 접하고 공부하면서, 물리학은 고민을 많이 하면 많이 할수록 자신의 실력이 더 많이 상승한다는 것을 몸소 알고 있다. 이 책은 여러분들에게 한층 더 강한 물리학의 압박을 가하여 여러분들을 더욱 단련시킬 뿐만 아니라 앞으로 대학에 진학하여도 두고두고 학업에 도움이 되는 물리학의 백과사전 역할을 할 것으로 기대한다.

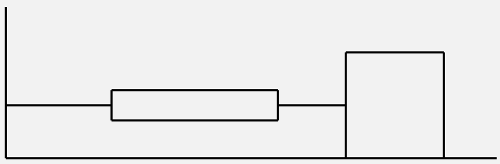
제 1 장

고전역학과 여러 가지 문제 상황

제 1 절 모델 1: 질량이 있는 용수철

이 절에서는 반드시 다루어 져야 했지만, 여러분들이 시간상의 문제로 다루지 못하고 넘어갔던 문제들에 대해서 다루겠다. 내가 던진 예제와 연습문제를 통해 사고력을 향상할 수 있기를 바라는 바이다.

Example 1. **(질량이 있는 용수철의 조화진동)** 다음 그림 1.1 과 같이 질량 $\mathcal{M}$, 용수철 상수 k인 물체가 단조화 진동하고 있다. 이때, 문제의 각진동수를 구하시오.



질량이 있는 용수철계의 단조화 진동

각진동수 $\omega = [\qquad]$

Solution 핵심: $\boxed{\text{진동하는 동안 용수철의 운동에너지도 고려해야 한다!}}$

이 문제의 핵심은 용수철의 각각의 입자가 어떤 운동을 하는지(정확히는 운동에너지)를 알아 내는 것이다. 다음의 특징들을 눈여겨 보아라.

1. 용수철의 각 지점의 속도는 다르다.

2. 용수철의 각 지점에 작용하는 탄성력의 크기는 같다.

다음 그림1.1을 살펴보자.

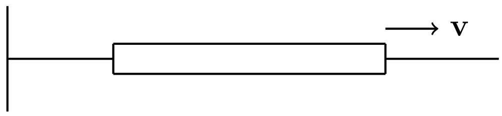


그림 1.1: 용수철 각 지점의 역학상황

그림과 같이 용수철의 가장 오른쪽 끝부분의 속도를 **v**라 하자. 용수철의 각 지점의 속도를 알아내기 위해 $\boxed{\text{용수철을 각 부분으로 분할하여 생각}}$할 것이다. 아래 그림을 살펴보라.

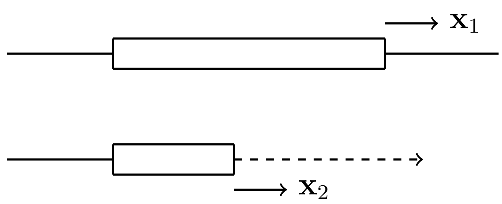


그림 1.2: 용수철전체와 용수철 단편의 운동

위 그림은 용수철 전체의 운동(위)과 용수철 단편(아래)를 보여준다. 전체 용수철을 늘림에 따라 단편용수철이 얼만큼 변화하는지 알아보기 위해 다음과 같은 사고실험을 진행하자.

단편의 길이가 $\frac{L_0}{n}$라면, 전체 용수철을 Δx만큼 늘렸을 때, 단편용수철은 $\frac{\Delta x}{n}$만큼 늘어났어야 한다.(길이 $\frac{L_0}{n}$의 단편이 n개 있다고 생각!)

용수철의 변형길이는 자연 길이에 비례한다.

자연길이가 L_0인 용수철을 L_0만큼 변형시켰을 때, 복원력의 크기를 F라고 한다면, 그 용수철 속의 단편(길이 l)용수철이 받는 힘도 F이다.(비율적으로 용수철 전체가 변형된 길이와 단편이 변형된 길이는 다르다.) 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

용수철을 길이 L_0만큼 늘렸을 때, 용수철에 전체에 작용하는 복원력과 길이 l의 단편에 작용하는 복원력의 크기는

$$\text{전체 용수철}:F_1 = kL_0 \qquad \text{단편 용수철}:F_1 = k_{\text{eq}}\Delta l \tag{1.1}$$

이고, 당연히 이 둘의 크기는 같다. 한편, 전체용수철을 임의의 길이 L만큼 늘렸을 때, 전체용수철과 단편용수철에 작용하는 복원력을 구하면 다음과 같다.

$$\text{전체 용수철:}F_2 = kL \qquad \text{단편 용수철:}F_2 = k_{\text{eq}}\Delta y \tag{1.2}$$

따라서 식(1.1)과 식(1.2)의 양변을 나누면 우리는 다음의 결론을 얻는다.

$$\frac{L_0}{L} = \frac{\Delta l}{\Delta y} \qquad \Rightarrow \qquad F_2 = \underbrace{\left(\frac{L_0 k}{\Delta l}\right)}_{k_{\text{eq}}} \Delta y \tag{1.3}$$

따라서 다음의 정리가 성립한다.

Theorem 1

길이 L_0의 용수철 상수 k인 용수철의 단편(길이 l)의 용수철 상수는 $k_{\text{eq}} = \frac{L_0 k}{l}$이다.

이것이 보여주는 바가 무엇인가? 그것은 용수철의 변형길이와 자연길이의 비가 항상 일정하다는 것이다. 왜냐하면, 식(1.3)에서,

$$kL = \frac{L_0 k}{l} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{L_0}{L} = \frac{\Delta y}{l}}_{\text{자연길이와 변형길이의 비가 일정 하다}} \tag{1.4}$$

가 성립한다. 따라서 우리는 다음의 과정을 통해 임의의 지점에서의 용수철의 각 입자의 속도를 구할 수 있다.(아래 그림을 참조하라!)

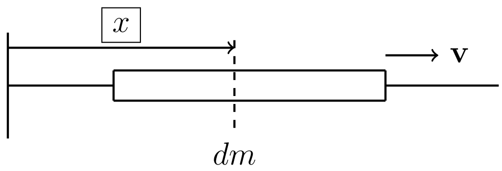


그림 1.3: 용수철 각 지점의 역학상황

앞에서 구한 자연길이-변형길이 관계를 시간미분하면, 최종적으로 우리가 원하는 속도 관계식을 얻는다.

$$\frac{\Delta l}{L_0} = \frac{\Delta y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathbf{v}}{L_0} = \frac{\mathbf{v}_x}{x} \tag{1.5}$$

결국 고정된 한쪽 끝으로부터 거리 x인 지점의 용수철 입자의 속도는 $\mathbf{v}_x = \frac{x}{L_0}\mathbf{v}$이다. 이제, 전체 운동에너지를 구할 수 있다.

잠깐, 여러분들은 내가 왜 굳이 운동에너지를 사용했는지 궁금할 것이다. 그 의문을 해결 하고 넘어 가도록 하자.

Question 1

여러분이 이 문제의 용수철 계의 진동수를 구하기 위해 용수철 입자 하나하나의 힘을 다 분석하여 진동수를 구하려 했다면, 일이 매우 복잡해진다. 우리가 구하고자 하는 것은 용수철 계 전체의 진동수이지 입자각각의 진동수가 아니다.

운동에너지는 이러한 입자계를 단일입자(입자하나)의 운동으로 바꾸어 준다.

용수철계의 운동에너지 용수철계의 총 운동에너지는 두 가지로 나눠질 수 있다. 바로, 용수철의 운동에너지 와 물체의 운동에너지이다.

이 다음 단계는 용수철의 운동에너지와 물체의 운동에너지를 구하는 것이다. 물체의 운동에너지는 매우 쉽다.

$$\textbf{물체의 운동에너지:} T_{\text{obj}} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.6}$$

여기서 내가 미리 언급하지는 않았지만 용수철에 연결된 물체의 질량은 m이다. 예상했듯이, 문제가 되는 부분은 결국 스프링의 운동에너지를 구하는 것이다. 이러한 상황을 처음 마주한 학생이라면 몹시 당황할 것이다. 하지만, 이 역시 핵심은 다르지 않다.

핵심: 용수철의 각 부분이 갖는 운동에너지의 총합이 용수철 전체의 운동에너지이다.

따라서 용수철의 고정된 한쪽 끝으로부터 거리 x만큼 떨어진 위치의 용수철의 미소질량 dm에 해당하는 부분의 운동에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$dT_{\text{spr}} = \frac{1}{2}(dm)\left(\frac{x^2}{L_0^2}v^2\right) \tag{1.7}$$

따라서 위치 $x = 0$으로부터 위치 $x = L_0$까지의 용수철의 모든 부분의 운동에너지의 합(용수철의 전체 운동에너지)은 이들 **미소부분의 운동에너지의 총합으로 나타내어진다.** (적분으로 바뀔 것이다.)

$$T_{\text{spr}} = \int_0^{L_0}\left(\frac{\lambda v^2}{2L_0^2}\right)x^2 dx = \frac{1}{6}\mathcal{M}v^2 \tag{1.8}$$

결국, 이 용수철 계 전체의 운동에너지 T는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2}\underbrace{\left(m + \frac{1}{3}\mathcal{M}\right)}_{m_{\text{eq}}}v^2 \tag{1.9}$$