03

2019 - 06 - (가) 19

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는? [4점]

> (가) $n=1,\ 2,\ 3$일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$이다.
> (나) $x_4 \leq 12$

① 210　② 220　③ 230　④ 240　⑤ 250

04

2019 - 06 - (가) 20

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)>0$
> (나) $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.
ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 할 때, $f(1)+\{F(1)\}^2=1$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05

2019 - 06 - (가) 21

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$ ④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

06

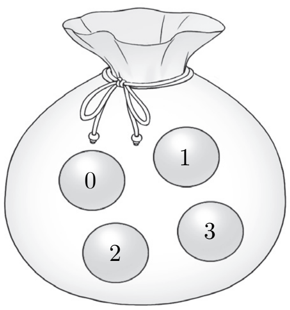
2019 - 06 - (가) 26

좌표평면에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에서의 접선을 l, 원점을 지나고 방향벡터가 $(1,\ 1)$인 직선을 m이라 하고, 두 직선 $l,\ m$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$일 때, 두 수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, $a>b>0$이다.) [4점]

15

2019 - 03 - (가) 29

주머니 속에 네 개의 숫자 0, 1, 2, 3 이 각각 하나씩 적혀 있는 공 4 개가 들어 있다. 이 주머니에서 1 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이 과정을 3 번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b, c 라 하자. $\frac{bc}{a}$ 가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오. [4점]



16

2019 - 03 - (가) 30

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 1 인 모든 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$) [4점]

> (가) $f(1)=0$, $f'(1)=0$
>
> (나) 방정식 $f(x)=0$ 의 모든 실근은 10 이하의 자연수이다.
>
> (다) 함수 $g(x)=\frac{3x}{e^{x-1}}+k$ 에 대하여 함수 $|(f \circ g)(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k 의 개수는 4 이다.

03

2019 - 06 - (가) 19

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는? [4점]

(가) $n=1, 2, 3$일 때, $x_{n+1}-x_n \ge 2$이다.
(나) $x_4 \le 12$

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

$x_n + 2 \le x_{n+1}$ 이므로

$0 \le x_1$

$x_1 + 2 \le x_2$

$x_2 + 2 \le x_3$

$x_3 + 2 \le x_4 \le 12$

$6 \le x_1 + 6 \le x_2 + 4 \le x_3 + 2 \le x_4 \le 12$

$6 \le a \le b \le c \le d \le 12$ 로 치환.

∴ a, b, c, d는 $6 \sim 12$ 사이 정수의 중복선택.

∴ ${}_7H_4 = {}_{10}C_4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 210$

04

2019 - 06 - (가) 20

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) > 0$
(나) $\ln f(x) + 2\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$라 할 때, $f(1) + \{F(1)\}^2 = 1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(나); $x=0$ 대입 $\rightarrow \ln f(0) = 0 \rightarrow f(0) = 1$

$\ln f(x) + 2x\int_0^x f(t)\,dt - 2\int_0^x t f(t)\,dt = 0$

$\frac{f'(x)}{f(x)} + 2\int_0^x f(t)\,dt = 0$

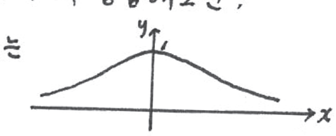
∴ $f'(x) = -2f(x)\int_0^x f(t)\,dt$ 인데 ············ ①

$x>0$ 이면 $\rightarrow \int_0^x f(t)\,dt > 0 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow$ 감소

$x<0$ 이면 $\rightarrow \int_0^x f(t)\,dt < 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow$ 증가

∴ $f(x) > 0$, $f(0) = 1$ 과 종합해보면,

$y = f(x)$ 그래프는



∴ ㄱ(참), ㄴ(참)

ㄷ; ①에서 $-\frac{1}{2}f'(x) = f(x)F(x)$ 이므로,

$\{F(1)\}^2$을 만들기 위해 양변 적분;

$-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)F(x)\,dx$

$= \left[\{F(x)\}^2\right]_0^1 - \int_0^1 F(x)f(x)\,dx$

$= \{F(1)\}^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx$

∴ $\{F(1)\}^2 = -\int_0^1 f'(x)\,dx = -f(1) + f(0)$

∴ $\{F(1)\}^2 + f(1) = f(0) = 1 \longrightarrow$ ㄷ(참)

05

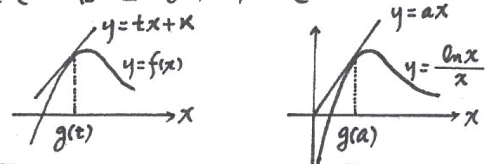
2019 - 06 - (가) 21

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$　② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$　③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$

④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

<조건을 그림으로 정리 해 보면>



$\boxed{f'(g(t))=t}$　　$\boxed{f'(g(a))=a}$

<a의 값을 구해본다>

$y=ax$ 와 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 가 $x=g(a)$에서 접한다.

$$\begin{cases} ax=\dfrac{\ln x}{x} \\ a=f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\end{cases}\quad ax^2=\ln x=1-\ln x,\quad 2\ln x=1,\quad x=\sqrt{e}$$

$$\boxed{\therefore a=\frac{1-\ln\sqrt{e}}{e}=\frac{1}{2e},\quad g(a)=\sqrt{e}}$$

<$g'(a)$를 구하기 위해 $f'(g(t))=t$를 미분 ;>

$f''(g(t))g'(t)=1 \quad \therefore f''(g(a))g'(a)=1$

$$\left[\begin{array}{l} f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3} \\ f''(g(a))=f''(\sqrt{e})=\dfrac{2\ln\sqrt{e}-3}{e\sqrt{e}}=\dfrac{-2}{e\sqrt{e}} \text{ 이므로}\end{array}\right]$$

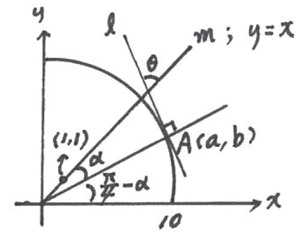
$\therefore \dfrac{-2}{e\sqrt{e}}g'(a)=1 \rightarrow g'(a)=\dfrac{e\sqrt{e}}{-2}$

$$\therefore a\times g'(a)=\frac{1}{2e}\times\frac{e\sqrt{e}}{-2}=-\frac{\sqrt{e}}{4}$$

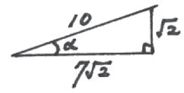
06

2019 - 06 - (가) 26

좌표평면에서 $|\overrightarrow{OP}|=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 위의 점 $A(a, b)$에서의 접선을 l, 원점을 지나고 방향벡터가 $(1, 1)$인 직선을 m이라 하고, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$일 때, 두 수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, $a>b>0$이다.) [4점]



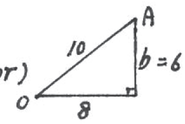
$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$$



$$a=10\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)=5\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{10}+\frac{\sqrt{2}}{10}\right)=8$$

$$b=10\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)=5\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{10}-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)=6$$

(or)



$\therefore ab=48.$

2019 - 03 - (가) 30

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$) [4점]

> (가) $f(1)=0,\ f'(1)=0$
>
> (나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 10 이하의 자연수이다.
>
> (다) 함수 $g(x)=\dfrac{3x}{e^{x-1}}+k$에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수는 4이다.

(가) ; $f(x)$는 $(1,0)$에서의 접선이 x축이다.

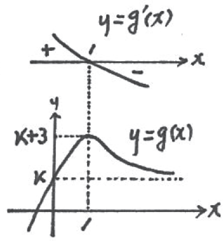
(다) ; $g(x) = 3x\cdot e^{-x+1}+K$

$g'(x) = e^{-x+1}(-3x+3)$ →

$g(0) = K$

$g(1) = K+3$

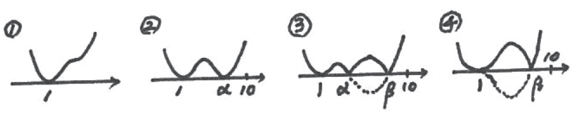
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = K$ ⟶



$\boxed{\therefore\ y=f(g(x))\text{에서 } g(x)\text{는 } K+3\text{까지 증가하다가 } K\text{를 향해서 한없이 감소한다.}}$

(가), (나)에 의하면,

$y=|f(x)|$의 그래프 개형은 ;



이 중에서 조건(다)를 만족하는 경우는 ;

①, ② 의 경우 → $y=|f(g(x))|$ 에서

$g(x)$가 $K+3$까지 증가하다 K로 감소하는데,

$g(x)=K+3$ 일때 $(x=1)$ 미분가능성은,

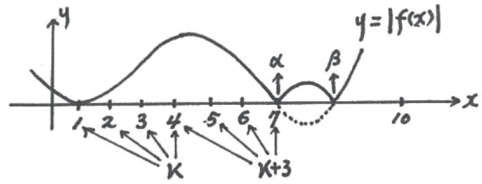
$y=f(g(x)) \rightarrow y'=f'(g(x))g'(x)$

$y'(1)=f'(g(1))g'(1)$ 에서 $g'(1)=0$ 이므로 미분가능

∴ ①, ②의 경우는 모든 자연수 K에 미분가능

⟶ 조건(다)에 불만족.

③의 경우 <graph 예시>



$f(x) = (x-1)^2(x-\alpha)(x-\beta)$

$K+3>7$ 이면 $|f(x)|$는 7에서 미분불가 이므로

$(K, K+3) \rightarrow (1,4), (2,5), (3,6), (4,7)$ → 자연수 K는 4개

이때 $(\alpha,\beta) \rightarrow (7,8), (7,9), (7,10)$ 이 가능하고

$\boxed{f(0)=\alpha\beta \rightarrow 7\times8,\ 7\times9,\ 7\times10}$

④ 의 경우는 ;

$f(x) = (x-1)^3(x-7)$ 일때

자연수 K가 $1\sim4$로 4개 가능하고

이때의 $\boxed{f(0)=7}$

∴ $f(0)$의 최대값 $=70$, 최소값 $=7$.

∴ $M+m = 77$